

## PC2 : Particule chargée dans un champ magnétique

On considère une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  placée dans un champ magnétique uniforme orienté selon l'axe  $z$ ,  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . On utilisera la jauge dite de Landau, correspondant au potentiel vecteur  $\vec{A} = Bx\vec{e}_y$ . On introduit l'observable  $\hat{v}$  définie par

$$m\hat{v} = \hat{p} - q\vec{A}(\hat{r}) \quad (1)$$

et on rappelle que l'hamiltonien s'écrit alors

$$\hat{H} = \frac{1}{2}m\hat{v}^2 = \frac{(\hat{p} - q\vec{A}(\hat{r}))^2}{2m}. \quad (2)$$

### Exercice 1 : Force de Lorentz

- 1.1. Calculer les relations de commutation entre les composantes cartésiennes de  $\hat{v}$ .
- 1.2. Calculer les relations de commutation entre les composantes de  $\hat{r}$  et celles de  $\hat{v}$ .
- 1.3. Calculer  $d\langle\vec{r}\rangle/dt$  à l'aide du théorème d'Ehrenfest. Que peut-on en déduire sur la signification physique de l'observable  $\hat{v}$ ?
- 1.4. Calculer  $d\langle\vec{v}\rangle/dt$  à l'aide du théorème d'Ehrenfest, et interpréter le résultat obtenu.

### Exercice 2 : niveaux de Landau

- 2.1. Identifier les composantes cartésiennes de  $\hat{p}$  qui commutent avec l'hamiltonien.
- 2.2. En déduire sous quelle forme on peut chercher les états propres de  $\hat{H}$ .
- 2.3. A l'aide d'un changement de variable approprié, exprimer les états propres à l'aide de ceux de l'oscillateur harmonique.
- 2.4. On s'intéresse maintenant au cas d'une structure semiconductrice à puits quantique où le mouvement de la particule selon  $z$  est confiné dans le plan  $z = 0$ . Que dire des niveaux d'énergie?
- 2.5. Déterminer la dégénérescence des niveaux d'énergie. On appellera  $L_x$  et  $L_y$  les dimensions de l'échantillon selon  $x$  et  $y$  et on utilisera les conditions aux limites périodiques.

### Exercice 3 : invariance de jauge

On considère dans cet exercice le cas général d'une particule placée dans un champ électromagnétique dépendant de l'espace et du temps, avec  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t) - \partial\vec{A}/\partial t$ , où  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  et  $\Phi(\vec{r}, t)$  sont les potentiels vecteur et scalaire. L'hamiltonien s'écrit alors

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} - q\vec{A}(\hat{r}, t))^2}{2m} + q\Phi(\hat{r}, t) \quad (3)$$

Il est *a priori* surprenant que l'hamiltonien soit défini à partir des potentiels, alors que ces derniers ne sont pas uniques, étant définis à un changement de jauge près :

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t) \quad (4)$$

$$\Phi'(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (5)$$

Pour traiter ce problème, on va considérer la transformation unitaire  $\hat{T}$  définie par  $\hat{T}|\psi\rangle = |\psi'\rangle$ , avec

$$\psi'(\vec{r}, t) = \exp\left(i\frac{q\chi(\vec{r}, t)}{\hbar}\right)\psi(\vec{r}, t) \quad (6)$$

- 3.1.** Montrer que si  $|\psi(t)\rangle$  est solution de l'équation de Schrödinger dans la jauge initiale, alors  $|\psi'(\vec{r}, t)\rangle$  est solution de l'équation de Schrödinger dans la nouvelle jauge.
- 3.2.** Que dire de la densité de probabilité dans la nouvelle jauge ?
- 3.3.** Que dire de la valeur moyenne de la quantité de mouvement dans la nouvelle jauge ?
- 3.4.** Que dire de la valeur moyenne de l'impulsion dans la nouvelle jauge ?