

Plan du cours

- “Vrai” et “faux” parallélisme
- Rappels (rapides): systèmes de transitions et bisimulation
- Une reformulation “algébrique” des constructions sur les systèmes de transitions, et de la bisimulation forte
- Systèmes de transition asynchrones, concurrents,

3

Plan du cours

- Automates de trace, traces de Mazurkiewicz (généralisées)
- Structures d'événements (étiquetées ou pas), pomsets et systèmes de transitions avec indépendance.
- Réseaux de Petri
- Comparaison des différents modèles, sémantiques vraiment parallèles de CCS et bisimulations sur les différents modèles
- Quelques idées géométriques (si le temps le permet)

4

Modèles du Vrai Parallélisme

Eric Goubault

Commissariat à l'Energie Atomique, Saclay

email: Eric.Goubault@cea.fr

<http://www.di.ens.fr/~goubault>

<http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/>

Eric.Goubault

avec Pierre-Louis Curien (PPS)

James Leifer (INRIA Rocquencourt)

Jean-Jacques Lévy (INRIA Rocquencourt)

Catuscia Palamidessi (INRIA Futurs)

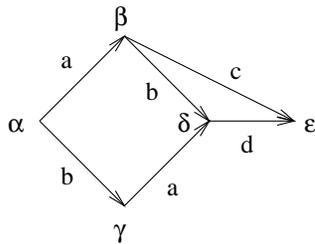
1

Remarques et références

- On utilisera parfois le langage catégorique sans faire appel à une connaissance de la théorie. Il est néanmoins bon de savoir que tout peut être traité de façon générique
- Référence: Saunders Mac Lane “Categories for the working mathematician”, Giuseppe Longo et Andrea Asperti “Categories for the working computer scientist”
- Référence sur les modèles du parallélisme: Glyn Winskel “Models for Concurrency”, Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 4

2

Exemple

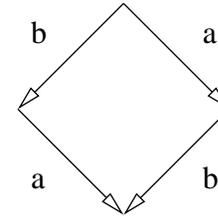


7

"Vrai" et "faux" parallélisme

$$a \mid b \sim a.b + b.a?$$

Identifier non-déterminisme et parallélisme est moralement malsain:



Faut-il l'interpréter comme exclusion mutuelle entre a et b ou exécution asynchrone de a avec b ?

8

Motivation du cours

- Grand nombre de modèles introduits à des niveaux d'abstraction différents (événements/états, branchements ou pas etc.)
- Par des correspondances (style correspondances de Galois, ou adjonctions en général), les constructions sémantiques utiles pour la sémantique du parallélisme sont définissables dans tous ces modèles de façon similaire ("produit cartésien" = composition parallèle..)
- Les congruences sémantiques peuvent aussi être définies de façon très générales sur tous ces modèles (ex. bisimulation forte, par "span de morphismes ouverts")
- On illustrera tout cela sur un certain nombre de modèles les plus classiques, à commencer par la reformulation dans le cas des systèmes de transition.

5

Rappels – Systèmes de transitions (cf. cours 3)

Définition 1 Un système de transitions est une structure

$$(S, i, L, Tran)$$

- S ensemble d'états et i état initial,
- L ensemble d'étiquettes, et
- $Tran \subseteq S \times L \times S$ la relation de transition

6

Catégorie

On en fait une catégorie avec pour morphismes les simulations (Glynn Winskel et al.).

Un système de transition T_1 simule un système de transitions T_0 à la condition que si T_0 peut effectuer une action a dans un certain contexte, alors T_1 peut effectuer a également dans un contexte similaire.

Un morphisme $f : T_0 \rightarrow T_1$ définit la façon dont les états et les transitions de T_0 sont reliés aux états et transitions de T_1 .

11

Morphismes

Définition 2 Soit $T_0 = (S_0, i_0, L_0, Tran_0)$ et $T_1 = (S_1, i_1, L_1, Tran_1)$ deux systèmes de transition. Un morphisme $f : T_0 \rightarrow T_1$ est un couple $f = (\sigma, \lambda)$ où,

- $\sigma : S_0 \rightarrow S_1$,
- $\lambda : L_0 \rightarrow L_1$ est tel que $\sigma(i_0) = i_1$ et

$$(s, a, s') \in Tran_0 \Rightarrow (\sigma(s), \lambda(a), \sigma(s')) \in Tran_1$$

12

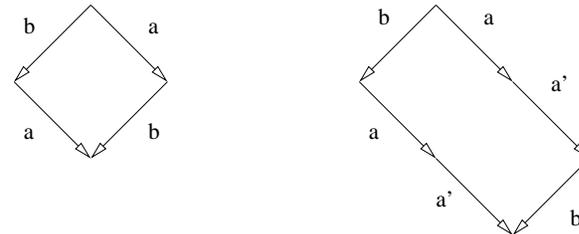
Raffinement d'actions

- D'un point de vue de l'ingénierie, il est bon de pouvoir raisonner sur un système sans se préoccuper de tous les détails à grain fin, voire atomique
- \Rightarrow trouver des méthodes sémantiques qui permettent de raffiner progressivement le grain (ou de composer les résultats acquis sur des sous-systèmes)
- Exemple: on étudie $a \mid b$, mais a est en fait raffiné en $a.a'$

9

Raffinement d'actions

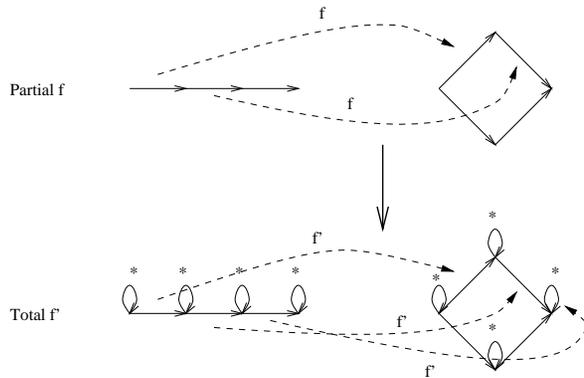
Si $a \mid b \sim a.b + b.a$, alors $(a.a') \mid b$ et $a.a'.b + b.a.a'$ doivent aussi être équivalents (si \sim est une congruence):



Mais il manque la trace $a.b.a'$ dans le deuxième cas! (et on aime en général que \sim contienne l'équivalence de trace...)

10

Exemple



15

Sémantique de CCS (rappel)

$$\frac{}{\alpha.t \xrightarrow{\alpha} t} \quad (1)$$

$$\frac{t_i \xrightarrow{\alpha} t'_i}{t_1 + t_2 \xrightarrow{\alpha} t'_i} \quad (2)$$

16

Morphismes partiels

Les morphismes partiels permettent à T_1 de ne pas effectuer d'action quand T_0 le fait.

Définition 3 Soient $T_0 = (S_0, i_0, L_0, Tran_0)$ et $T_1 = (S_1, i_1, L_1, Tran_1)$ deux systèmes de transition. Un morphisme partiel $f : T_0 \rightarrow T_1$ est un couple $f = (\sigma, \lambda)$ où,

- $\sigma : S_0 \rightarrow S_1$,
- $\lambda : L_0 \rightarrow L_1$ est une fonction partielle. (σ, λ) est tel que
 - $\sigma(i_0) = i_1$,
 - $(s, a, s') \in Tran_0$ et $\lambda(a)$ est défini implique $(\sigma(s), \lambda(a), \sigma(s')) \in Tran_1$. Sinon, si $\lambda(a)$ n'est pas défini alors $\sigma(s) = \sigma(s')$.

13

Transitions silencieuses

On complète un système de transition $T = (S, i, L, Tran)$ en $T_* = (S_*, i_*, L_*, Tran_*)$,

- $S_* = S$,
- $i_* = i$,
- $L_* = L \cup \{*\}$,
- $Tran_* = Tran \cup \{(s, *, s) / s \in S\}$.

14

Bisimulation - rappel, cours 3

Idée d'expérimentation formalisée:

Une relation binaire $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ entre agents est une bisimulation (forte) si $(P, Q) \in \mathcal{S}$ implique, pour tout $\alpha \in \Sigma$,

- (i) dès que $P \rightarrow^\alpha P'$ il existe Q' tel que $Q \rightarrow^\alpha Q'$ et $(P', Q') \in \mathcal{S}$,
- (ii) dès que $Q \rightarrow^\alpha Q'$ il existe P' tel que $P \rightarrow^\alpha P'$ et $(P', Q') \in \mathcal{S}$

Maintenant P et Q sont (fortement) équivalents ou (fortement) bisimilaires si et seulement si il existe une bisimulation \mathcal{S} telle que $(P, Q) \in \mathcal{S}$.

On écrit $P \sim Q$ quand P et Q sont bisimilaires.

19

Exemple

On considère les agents A et B définis par:

$$A = a.A'$$

$$A' = \bar{c}.A$$

et

$$B = c.B'$$

$$B' = \bar{b}.B$$

Peut-on trouver un équivalent pour $(A \mid B) \setminus c$?

20

Sémantique de CCS (rappel - cours 3)

$$\frac{t_1 \xrightarrow{\alpha} t'_1}{t_1 \mid t_2 \xrightarrow{\alpha} t'_1 \mid t_2} \quad (3)$$

$$\frac{t_2 \xrightarrow{\alpha} t'_2}{t_1 \mid t_2 \xrightarrow{\alpha} t_1 \mid t'_2} \quad (4)$$

$$\frac{t_1 \xrightarrow{\alpha} t'_1 \quad t_2 \xrightarrow{\bar{\alpha}} t'_2}{t_1 \mid t_2 \xrightarrow{\tau} t'_1 \mid t'_2} \quad (5)$$

17

Sémantique de CCS (rappel)

$$\frac{t \xrightarrow{\alpha} t' \quad \alpha \neq c \text{ and } \alpha \neq \bar{c}}{t \setminus c \xrightarrow{\alpha} t' \setminus c} \quad (6)$$

$$\frac{t \xrightarrow{\alpha} t'}{t[f] \xrightarrow{f(\alpha)} t'[f]} \quad (7)$$

$$\frac{\text{rec } x.t[x] \xrightarrow{\alpha} t'}{t[\text{rec } x.t[x]] \xrightarrow{\alpha} t'} \quad (8)$$

18

Arbres de synchronisation (cf. cours 3)

Un arbre de synchronisation est un système de transition $(S, i, L, tran)$ tel que:

- tout état est atteignable
- il n'y a pas de boucle non-triviale
- $(s', a, s) \in Tran$ et $(s'', b, s) \in Tran$ implique $a = b$ et $s' = s''$

$Bran_L$ sera la sous-catégorie pleine de la catégorie des systèmes de transition sur l'alphabet L .

23

Bisimulations et morphismes

- Soit \mathcal{M} une catégorie de modèles (ici, par exemple, les systèmes de transition).
- Soit \mathcal{P} une sous-catégorie de "chemins" de \mathcal{M}
- Un chemin de $X \in \mathcal{M}$ sera un morphisme $p : P \rightarrow X$ pour un $P \in \mathcal{P}$

24

Exemple

La réponse est oui

Soient,

$$C_0 = \bar{b}.C_1 + a.C_2$$

$$C_1 = a.C_3$$

$$C_2 = \bar{b}.C_3$$

$$C_3 = \tau.C_0$$

Alors, $(A | B) \setminus c \sim C_1$.

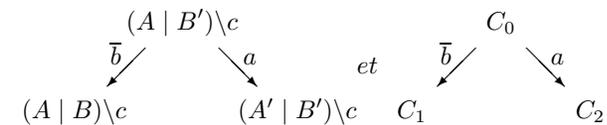
Preuve...

21

Exemple

Soit $S = \{(A | B) \setminus c, C_1\}, \{(A' | B) \setminus c, C_3\}, \{(A | B') \setminus c, C_0\}, \{(A' | B') \setminus c, C_2\}$.

Alors S est une bisimulation forte. Il suffit de tester toutes les actions que les 8 agents peuvent exécuter, par exemple,



22

Preuve

- Soit f un tel morphisme. Soit s un état atteignable de T tel que $\sigma(s) \xrightarrow{a} s' \in T'$. Comme s est atteignable, il existe dans T :

$$i = s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} s_n = s$$

- Soit $P \in \text{Bran}_L$ qui est exactement cette suite de transitions et $p : P \rightarrow T$ le morphisme inclusion
- Soit $Q \in \text{Bran}_L$:

$$\xrightarrow{a_1} \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} \xrightarrow{a}$$

et $q : Q \rightarrow T'$ le morphisme dont l'image est:

$$\sigma(s_0) \xrightarrow{a_1} \sigma(s_1) \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} \sigma(s) \xrightarrow{a} s'$$

27

Preuve

- Soit $m : P \rightarrow Q$ le morphisme inclusion dans Bran_L . Le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & T \\ m \downarrow & & \downarrow f \\ Q & \xrightarrow{q} & T' \end{array}$$

- f est un morphisme ouvert donc il existe $r : Q \rightarrow T$ tel que les deux triangles commutent.
- L'état final de Q donne $s' \xrightarrow{a} u$ dans T tel que $\sigma(u) = s'$.

28

Morphismes \mathcal{P} -ouverts

Un morphisme est \mathcal{P} -ouvert ssi pour tout diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & X \\ m \downarrow & & \downarrow f \\ Q & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

il existe un morphisme p' tel que $p' \circ m = p$ et $f \circ p' = q$.

25

Morphismes Bran_L -ouverts

Ce sont les morphismes "zig-zag" $(\sigma, Id_L) : T \rightarrow T'$ tels que pour tout état s de T :

Si $(\sigma(s), a, s')$ est dans T' , alors il existe un état u de T tel que (s, a, u) est dans T et $\sigma(u) = s'$.

26

\mathcal{P} -bisimilarité et bisimilarité forte

Deux systèmes de transition avec le même alphabet L sont $Bran_L$ -bisimilaires ssi ils sont fortement bisimilaires au sens de Milner.

31

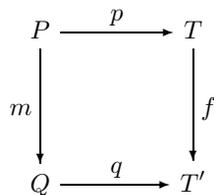
Preuve

- Si deux systèmes de transition sont connectés par un morphisme ouvert (vis-à-vis de $Bran_L$), sa restriction aux états vérifie la condition zig-zag. Cela implique que son graphe sous-jacent est une bisimulation forte.
- La bisimulation forte étant une relation d'équivalence, un span de morphismes $Bran_L$ -ouverts les rend donc bisimilaires

32

Preuve

- A l'inverse, si f satisfait la condition zig-zag, et si on suppose que l'on a un diagramme commutatif:

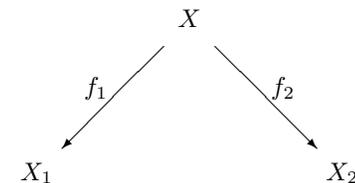


- A isomorphisme près, Q est simplement une extension de P par des transitions simples.
- Par itération de la condition zig-zag, on obtient un morphisme $r : Q \rightarrow T$ tel que $r \circ m = p$ et $f \circ r = q$.

29

\mathcal{P} -bisimilarité

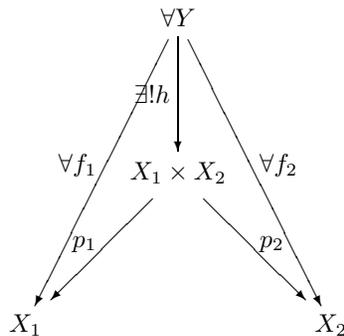
X_1 et X_2 du modèle \mathcal{M} sont \mathcal{P} -bisimilaire si il existe un span de morphismes \mathcal{P} -ouverts:



30

Produits Cartésiens

Comme dans les ensembles, ils vérifient la “propriété universelle”:



35

Produits Cartésiens

Soient deux systèmes de transitions $T_0 = (S_0, i_0, L_0, Tran_0)$ et $T_1 = (S_1, i_1, L_1, Tran_1)$. Leur produit est $T_0 \times T_1 = (S, i, L, Tran)$ avec,

- $S = S_0 \times S_1$ et $i = (i_0, i_1)$. Soient $\rho_0 : S_0 \times S_1 \rightarrow S_0$ et $\rho_1 : S_0 \times S_1 \rightarrow S_1$ les projections canoniques,
- $L = L_0 \times_* L_1 = \{(a, *) / a \in L_0\} \cup \{(*, b) / b \in L_1\} \cup \{(a, b) / a \in L_0, b \in L_1\}$ avec des projections canoniques π_0 et π_1 ,
- $(s, a, s') \in Tran_*$ ssi $(\rho_0(s), \pi_0(a), \rho_0(s')) \in Tran_{0*}$ et $(\rho_1(s), \pi_1(a), \rho_1(s')) \in Tran_{1*}$

36

Preuve

- Soit R une bisimulation forte entre T_1 et T_2
- On construit un système de transition T_L à partir de R :
 - l'ensemble de ses états est R , avec état initial (i_1, i_2) (la paire d'états initiaux de T_1 et de T_2)
 - ses transitions sont $((s_1, s_2), a, (s'_1, s'_2))$ où $(s_1, s_2) \in R$ et $(s'_1, s'_2) \in R$ pour lesquelles $(s_1, a, s'_1) \in T_1$ et $(s_2, a, s'_2) \in T_2$.

33

Preuve

- On a des morphismes évidents $f_1 : R \rightarrow T_1$, $f_2 : R \rightarrow T_2$ (projections)
- Comme R est une bisimulation forte, f_1 et f_2 satisfont la condition zig-zag, et donc forment un span de morphismes $Bran_L$ -ouverts.

34

Définition

- $S = S_0 \times S_1, i = (i_0, i_1),$
- $L = L_0 \times L_1,$
- $((s, t), a, (u, v)) \in Tran$ ssi
 - $a \in L_0 \cap L_1$ et $(s, a, u) \in Tran_0$ et $(t, a, v) \in Tran_1,$
 - $a \in L_0 \setminus L_1$ et $(s, a, u) \in Tran_0$ et $v = t,$
 - $a \in L_1 \setminus L_0$ et $u = s$ et $(t, a, v) \in Tran_1.$

39

Sémantique de processus parallèles

- Automate pour chaque processus séquentiel,
- produit synchronisé correspondant aux différentes primitives de communications utilisées.

Les états globaux du système de transition résultant P sont donc des n -uplets (n =nombre de processus communicants) $s = (s_1, \dots, s_n)$ avec s_i état local du processus P_i .

Jusqu'à une exponentielle de plus par rapport au cas séquentiel!

Dans le cas d'un langage proche de CCS, on pourra trouver dans [Winskel] une sémantique dénotationnelle, utilisant produits cartésiens, coproduits etc.

40

Autres Constructions catégoriques

Le coproduit ("propriété universelle duale" du produit cartésien) de deux systèmes de transitions $T_0 = (S_0, i_0, L_0, Tran_0)$ et $T_1 = (S_1, i_1, L_1, Tran_1)$ est $T_0 \oplus T_1 = (S, i, L, Tran)$ avec,

- $S = (S_0 \cup S_1) / \{i_0 = i_1\},$ et $i = i_0 = i_1,$
- $L = L_0 \cup L_1,$
- $Tran = Tran_0 \cup Tran_1.$

37

Produits Synchronisés

Un cas particulier: produit fibré suivant.

Référence plus générale: Arnold et M.Nivat.

Soient $T_0 = (S_0, i_0, L_0, Tran_0)$ et $T_1 = (S_1, i_1, L_1, Tran_1)$ deux systèmes de transition. Leur produit synchronisé (à la CSP) est $T = (S, i, L, Tran)$ avec,

38