

# MPRI 2010-11 Cours 2-7-1

Examen du 30-11-2010

Correction

## 1 Théorie des types

On a construit en théorie des types de Martin-Löf un terme clos :

$$f : \Pi x : N. \Pi y : N. \Sigma z : N. x = y + z \vee y = x + z$$

Quelles peuvent être les formes normales de :

- $\pi_1(f\ 5\ 3)$   $\boxed{2}$
- $(f\ 3\ 5)$   $\boxed{(2, j(refl\ 5))}$
- $(f\ 5\ 5)$   $\boxed{(0, j(refl\ 5)) \text{ ou } (0, i(refl\ 5))}$

## 2 Logique du 1er ordre

On rappelle que les  $\lambda$ -termes en forme normale peuvent toujours s'écrire

$$\lambda x_1 \dots \lambda x_n. (x\ t_1 \dots t_m)$$

On considère le langage constitué d'un seul symbole de proposition  $A$ . Soit la preuve suivante de  $\Box \vdash A \Rightarrow A$ .

$$\frac{\frac{\overline{[A \Rightarrow A] \vdash A \Rightarrow A} \text{ (Ax)}}{\Box \vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)} \text{ } (\Rightarrow\text{-I}) \quad \frac{\overline{[A] \vdash A} \text{ (Ax)}}{\Box \vdash A \Rightarrow A} \text{ } (\Rightarrow\text{-I})}{\Box \vdash A \Rightarrow A} \text{ } (\Rightarrow\text{-E})$$

a) Donnez la version sans coupures de la preuve ci-dessus.

$$\boxed{\frac{\overline{[A] \vdash A} \text{ (Ax)}}{\Box \vdash A \Rightarrow A} \text{ } (\Rightarrow\text{-I})}$$

b) Que donnent ces preuves vues à travers l'isomorphisme de Curry-Howard ?

$$\boxed{(\lambda x^{A \rightarrow A}. x\ \lambda y^A. y) \text{ et } \lambda y^A. y}$$

c) Y a-t-il d'autres preuves sans coupures de  $\Box \vdash A \Rightarrow A$  ? Justifiez (sans faire trop long!).

$\boxed{\text{Non. En analysant les termes clos normaux de types } A \rightarrow A \text{ on voit qu'il n'y en a pas d'autres.}}$

d) On rajoute maintenant la réécriture  $A \triangleright (A \Rightarrow A)$ . On est donc en déduction modulo. Donnez alors une preuve de  $\Box \vdash A$ . Que peut-on dire du  $\lambda$ -terme correspondant ?

$\boxed{\text{Dans ce système, une preuve de } A \Rightarrow A \text{ est aussi une preuve de } A, \text{ donc l'identité convient.}}$

### 3 Système T

Définissez dans le système T une fonction  $\text{eg} : N \rightarrow N \rightarrow N$  qui retourne 1 si ses arguments sont égaux et 0 s'ils sont différents.

$$\begin{aligned} t_0 &= \lambda m^N . R \ 0 \ \lambda \_ . \lambda \_ . 1 \quad \text{test à 0} \\ \text{eg} &= \lambda n^N . R_{N \rightarrow N} \ t_0 \ \lambda n'^N . \lambda f . \lambda m^N . (R \ 1 \ \lambda m' . \lambda \_ . (f \ m') \ m) \end{aligned}$$

### 4 Choisir n'est pas construire

On se place dans l'arithmétique de Heyting. Rappelons que c'est l'arithmétique intuitioniste.

a) Indiquez comment on peut démontrer la proposition

$$\forall x . \forall y . x = y \vee \neg(x = y)$$

On pourra s'inspirer de la question précédente.

On montre par récurrence sur  $x$  que  $\forall y . x = y \vee \neg(x = y)$ .

— Si  $x = 0$ , on montre  $\forall y . x = y \vee \neg(0 = y)$  par cas sur  $y$ .

— Si  $x = S(x')$ , on montre  $\forall y . S(x') = y \vee \neg(S(x') = y)$  par cas sur  $y$ .

—  $S(x') = 0 \vee \neg(S(x') = 0)$  est vrai (gauche)

— On sait que  $x' = y' \vee \neg x' = y'$ . Par élimination de la disjonction, on en déduit  $S(x') = S(y') \vee \neg S(x') = S(y')$ .

b) On dit qu'une proposition  $P$  est décidable si on sait démontrer  $P \vee \neg P$ .

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont des propositions décidables, alors  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$  et  $A \Rightarrow B$  sont décidables.

Diverses petites preuves, qui correspondent aux cas booléens.

c) On ajoute maintenant à l'arithmétique un opérateur de choix, ou "opérateur de Hilbert". C'est-à-dire que pour toute proposition  $P$  de l'arithmétique et toute variable  $x$  on a :

- un objet  $\mathcal{E}(x.P)$  dans le langage,
- la famille d'axiomes  $P[x \setminus t] \Rightarrow P[x \setminus \mathcal{E}(x.P)]$  (pour tout objet  $t$ ).

Montrer que si  $P[x \setminus t]$  est décidable, pour tout objet  $t$ , alors  $\exists x . P$  est décidable, dans cette théorie.

On remarque que  $\exists x . P$  est équivalent à  $P[x \setminus \mathcal{E}(x.P)]$ . Aussi, si  $P[x \setminus \mathcal{E}(x.P)]$  est décidable, alors  $\exists x . P$  l'est aussi.

d) Montrer que si  $P[x \setminus t]$  est décidable, pour tout objet  $t$ , alors  $\forall x . P$  est décidable, dans cette théorie.

Le truc est de considérer  $\mathcal{E}(x.\neg P)$ . Comme  $P$  est décidable, on a  $\neg\neg P \Rightarrow P$ .

On a vu aussi que  $\exists x . \neg P[x \setminus \mathcal{E}(x.\neg P)]$  est décidable. Si c'est vrai, alors  $\forall x . \neg\neg P$  et donc  $\forall x . P$ . Si c'est faux, on montre  $\neg\forall x . P$ .

e) Que peut-on en déduire pour toutes les propositions de cette théorie? Ou cette théorie en général? Essayez de justifier en étant concis et précis.

On peut alors montrer que toutes les propositions de cette théorie sont décidables, c'est-à-dire qu'ajouter l'opérateur de choix rend l'arithmétique classique. On raisonne par récurrence sur la taille des propositions (en comptant le nombre de connecteurs et quantificateurs). Les questions précédentes correspondent exactement aux différents cas.

## 5 Déconstruire est-ce choisir ?

On travaille maintenant dans la théorie des types de Martin-Löf. On se donne l'axiome du tiers-exclu :

$$\frac{\Gamma \vdash A : \text{Type}}{\Gamma \vdash EM_A : A + (A \rightarrow \perp)}$$

a) Dans un contexte où  $A : \text{Type}$ ,  $a : A$  et  $P : A \rightarrow \text{Type}$ , construisez un terme  $\mathcal{E}(P) : A$  tel que :

$$\Sigma x : A. (P x) \rightarrow (P \mathcal{E}(P)).$$

$$\boxed{\mathcal{E}(P) = \delta(EM_{\sigma x:A.P x, p.\pi_1(p)}, q.a)}$$

b) La construction de la question 4 vous semble-t-elle possible dans la théorie des types de Martin-Löf? Quelle est la conclusion, en deux mots?

Oui, on peut montrer qu'un opérateur de choix rend (cette version de) la théorie des types de Martin-Löf classique. Donc l'opérateur et le tiers-exclu "reviennent au même". Le terme précis est que l'opérateur est une *extension conservative* de la théorie avec tiers-exclu.