École Polytechnique

CSC_52064 – Compilation

Jean-Christophe Filliâtre

analyse lexicale et syntaxique

l'objectif de l'analyse syntaxique est de reconnaître les phrases appartenant à la syntaxe du langage

son entrée est la syntaxe concrète, c'est-à-dire une suite de caractères, et sa sortie est la syntaxe abstraite

on découpe ce travail en deux étapes

- l'**analyse lexicale**, qui découpe le texte source en ≪ mots ≫ appelés lexèmes (*tokens*)
- l'**analyse syntaxique** proprement dite, qui reconnaît les suites de mots légales

source = suite de caractères

```
fun x -> (* ma fonction *)
    x+1
```

↓

analyse lexicale

↓

suite de lexèmes

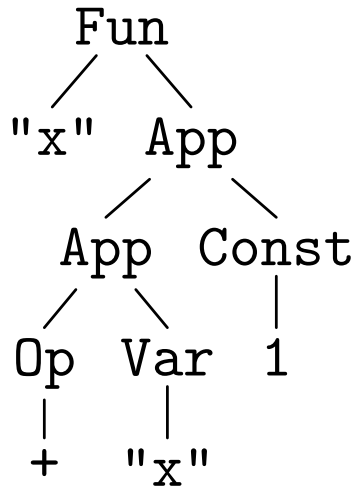
⋮

↓

analyse syntaxique

↓

syntaxe abstraite



analyse lexicale

les blancs

les blancs (espace, retour chariot, tabulation, etc.) jouent un rôle dans l'analyse lexicale ; ils permettent notamment de séparer deux lexèmes

ainsi `funx` est compris comme un seul lexème (l'identificateur `funx`) et `fun x` est compris comme deux lexèmes (le mot clé `fun` et l'identificateur `x`)

de nombreux blancs sont néanmoins inutiles (comme dans `x + 1`) et simplement ignorés

les blancs n'apparaissent pas dans le flot de lexèmes renvoyé

les blancs

les conventions diffèrent selon les langages,
et certains des caractères ≪ blancs ≫ peuvent être significatifs

exemples :

- les tabulations pour `make`
- retours chariot et espaces de début de ligne en Python ou en Haskell (l'indentation détermine la structure des blocs)

les commentaires jouent le rôle de blancs

```
fun(* et hop *)x -> x + (* j'ajoute un *) 1
```

ici le commentaire `(* et hop *)` joue le rôle d'un blanc significatif (sépare deux lexèmes) et le commentaire `(* j'ajoute un *)` celui d'un blanc inutile

note : les commentaires sont parfois exploités par certains outils (`javadoc`, `ocamldoc`, etc.), qui les traitent alors différemment dans leur propre analyse lexicale

```
val length : 'a list -> int
  (** Return the length (number of elements) of ...
```

pour réaliser l'analyse lexicale, on va utiliser

- des **expressions régulières** pour décrire les lexèmes
- des **automates finis** pour les reconnaître

on exploite notamment la capacité à construire automatiquement un automate fini déterministe reconnaissant le langage décrit par une expression régulière

expressions régulières

on se donne un alphabet A

$$
\begin{array}{rcll}
r & ::= & \emptyset & \text{langage vide} \\
 & | & \epsilon & \text{mot vide} \\
 & | & a & \text{caractère } a \in A \\
 & | & r\,r & \text{concaténation} \\
 & | & r \mid r & \text{alternative} \\
 & | & r\star & \text{étoile}
\end{array}
$$

conventions : l'étoile a la priorité la plus forte, puis la concaténation, puis enfin l'alternative

le **langage** défini par l'expression régulière r est l'ensemble de mots $L(r)$ défini par

$$
\begin{aligned}
L(\emptyset) &= \emptyset \\
L(\epsilon) &= \{\epsilon\} \\
L(a) &= \{a\} \\
L(r_1\, r_2) &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L(r_1) \wedge w_2 \in L(r_2)\} \\
L(r_1 \mid r_2) &= L(r_1) \cup L(r_2) \\
L(r\star) &= \textstyle\bigcup_{n\geq 0} L(r^n) \quad \text{où } r^0 = \epsilon,\ r^{n+1} = r\, r^n
\end{aligned}
$$

sur l'alphabet $\{a, b\}$

- mots de trois lettres

$$(a|b)(a|b)(a|b)$$

- mots se terminant par un a

$$(a|b) \star a$$

- mots alternant a et b

$$(b|\epsilon)(ab) \star (a|\epsilon)$$

constantes entières décimales, éventuellement précédées de zéros

$$(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)\,(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)\star$$

identificateurs composés de lettres, de chiffres et du souligné, et commençant par une lettre

$$(a|b|\ldots|z|A|B|\ldots|Z)\,(a|b|\ldots|z|A|B|\ldots|Z|\_|0|1|\ldots|9)\star$$

constantes flottantes (`3.14` `2.` `1e-12` `6.02e23` etc.)

$$d\,d\star\,(.d\star\,|\,(\epsilon\,|\,.d\star)(e|E)\,(\epsilon|+|-)d\,d\star)$$

avec $d = 0|1|\ldots|9$

les commentaires de la forme `(* ... *)`, **non imbriqués**, peuvent également être définis de cette manière

$$\boxed{(}\boxed{*}\left(\boxed{*}\star r_1 \mid r_2\right)\star\boxed{*}\boxed{*}\star\boxed{)}$$

où r_1 = tous les caractères sauf $*$ et)
et r_2 = tous les caractères sauf $*$

les expressions régulières ne sont pas assez expressives pour définir les commentaires **imbriqués** (le langage des mots bien parenthésés n'est pas régulier)

on expliquera plus loin comment contourner ce problème

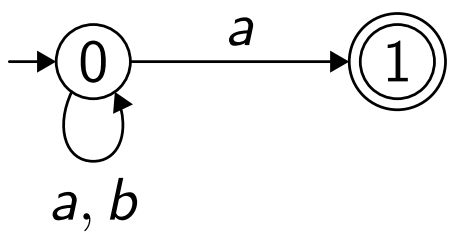
automates finis

Définition

Un automate fini sur un alphabet A est un quadruplet (Q, T, I, F) où

- *Q est un ensemble fini d'états*
- *$T \subseteq Q \times A \times Q$ un ensemble de transitions*
- *$I \subseteq Q$ un ensemble d'états initiaux*
- *$F \subseteq Q$ un ensemble d'états terminaux*

exemple : $Q = \{0, 1\}$, $T = \{(0, a, 0), (0, b, 0), (0, a, 1)\}$, $I = \{0\}$, $F = \{1\}$



un mot $a_1 a_2 \dots a_n \in A^\star$ est **reconnu** par un automate (Q, T, I, F) ssi

$$s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} s_2 \cdots s_{n-1} \xrightarrow{a_n} s_n$$

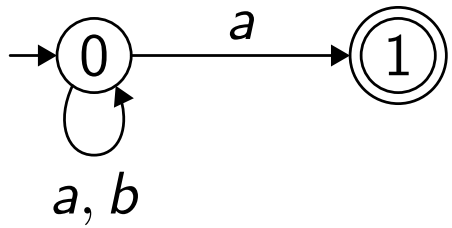
avec $s_0 \in I$, $(s_{i-1}, a_i, s_i) \in T$ pour tout i, et $s_n \in F$

le **langage** défini par un automate est l'ensemble des mots reconnus

Théorème (de Kleene)

Les expressions régulières et les automates finis définissent les mêmes langages.

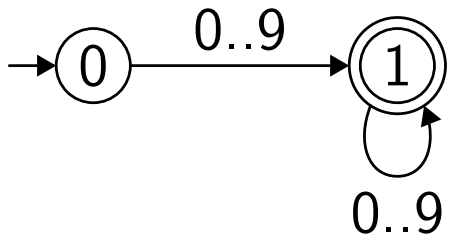
$(a|b) \star a$



expression régulière

$$(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)\,(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)\star$$

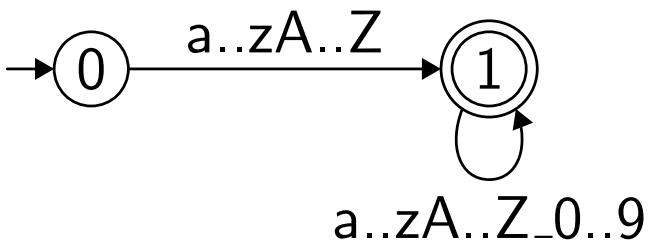
automate



expression régulière

$$(a|b|\ldots|z|A|B|\ldots|Z)\,(a|b|\ldots|z|A|B|\ldots|Z|\_|0|1|\ldots|9)\star$$

automate

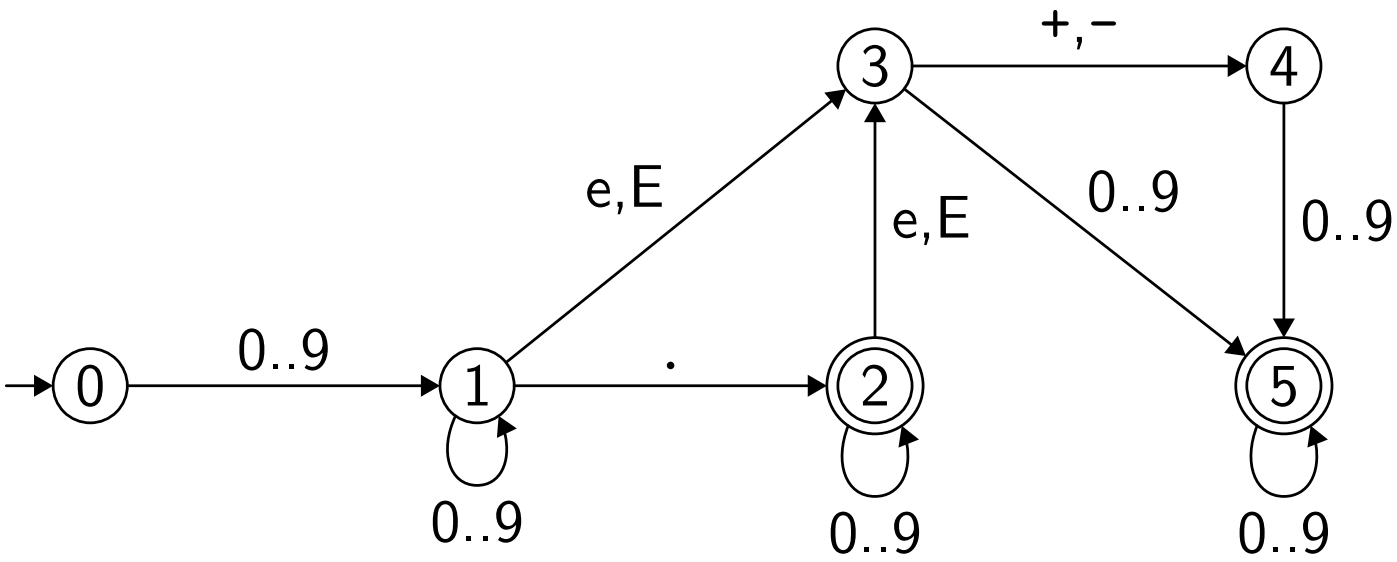


expression régulière

$$d\,d\star\,(.d\star\,|\,(\epsilon\,|\,.d\star)(e|E)\,(\epsilon|+|-)d\,d\star)$$

où $d = 0|1|\ldots|9$

automate

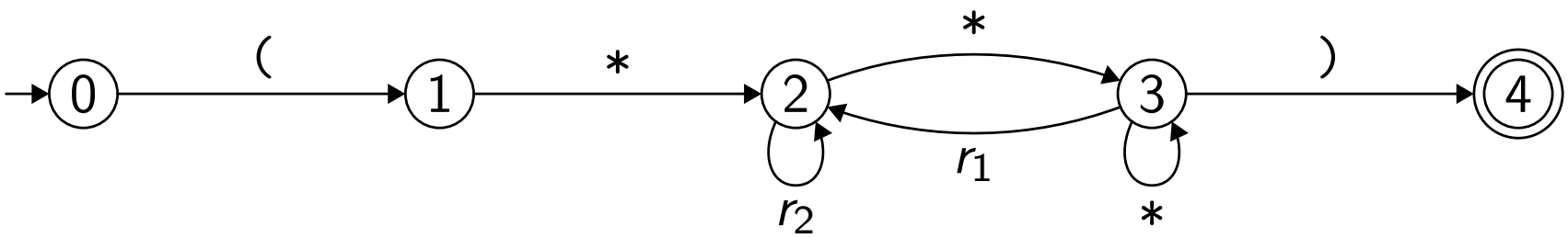


expression régulière

$$\boxed{(}\ \boxed{*}\ \left(\boxed{*}\star r_1 \mid r_2\right)\star\ \boxed{*}\ \boxed{*}\star\ \boxed{)}$$

où r_1 = tous les caractères sauf $*$ et)
et r_2 = tous les caractères sauf $*$

automate fini



analyseur lexical

un **analyseur lexical** est un automate fini pour la ≪ réunion ≫ de toutes les expressions régulières définissant les lexèmes

le fonctionnement de l'analyseur lexical, cependant, est différent de la simple reconnaissance d'un mot par un automate, car

- il faut décomposer un mot (le source) en une **suite** de mots reconnus
- il peut y avoir des **ambiguïtés**
- il faut construire les lexèmes (les états finaux contiennent des **actions**)

le mot `funx` est reconnu par l'expression régulière des identificateurs, mais contient un préfixe reconnu par une autre expression régulière (`fun`)

$\Rightarrow$ on fait le choix de reconnaître le lexème le plus long possible

le mot `fun` est reconnu par l'expression régulière du mot clé `fun` mais aussi par celle des identificateurs

$\Rightarrow$ on classe les lexèmes par ordre de priorité

avec les trois expressions régulières

$$a, \quad ab, \quad bc$$

un analyseur lexical va **échouer** sur l'entrée

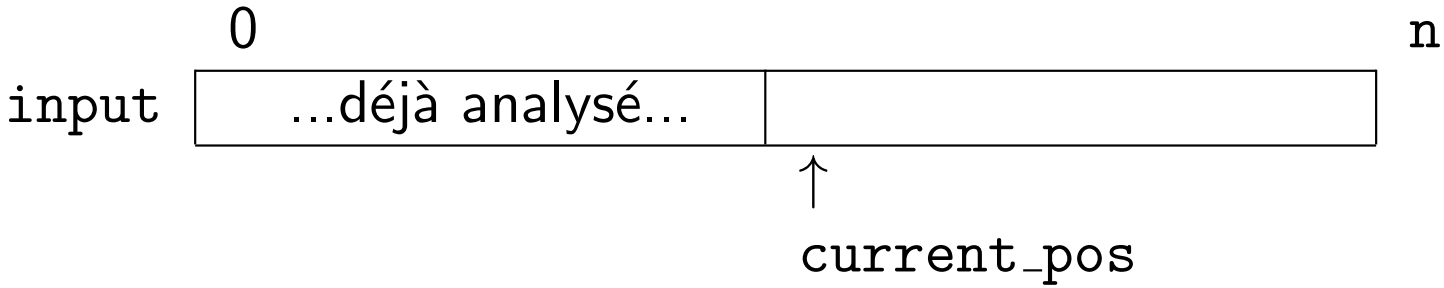
$$abc$$

(ab est reconnu, comme plus long, puis échec sur c)

pourtant le mot abc appartient au langage $a|ab|bc$

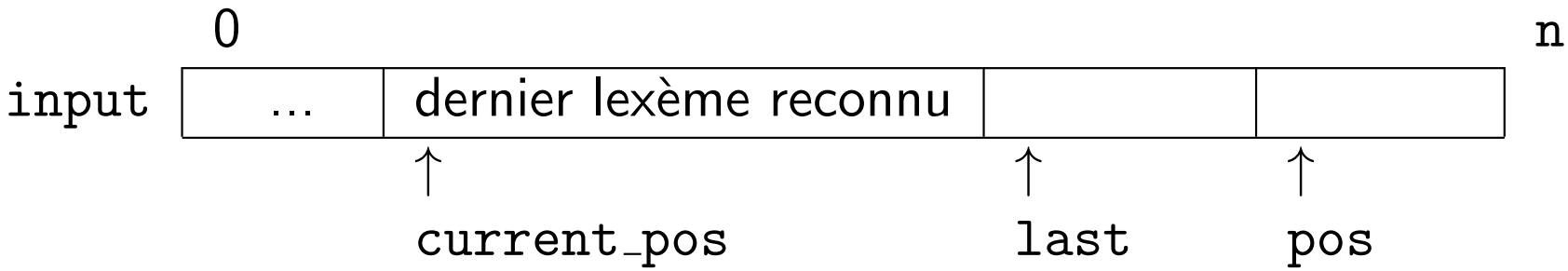
les lexèmes sont produits un par un, à la demande (de l'analyseur syntaxique)

l'analyseur lexical mémorise donc la position où l'analyse de l'entrée devra reprendre



lorsqu'un nouveau lexème est demandé, on démarre dans l'état initial de l'automate, à partir de `current_pos`

tant qu'une transition est possible, on l'emprunte, tout en mémorisant le dernière lexème reconnu (dernier état final rencontré)

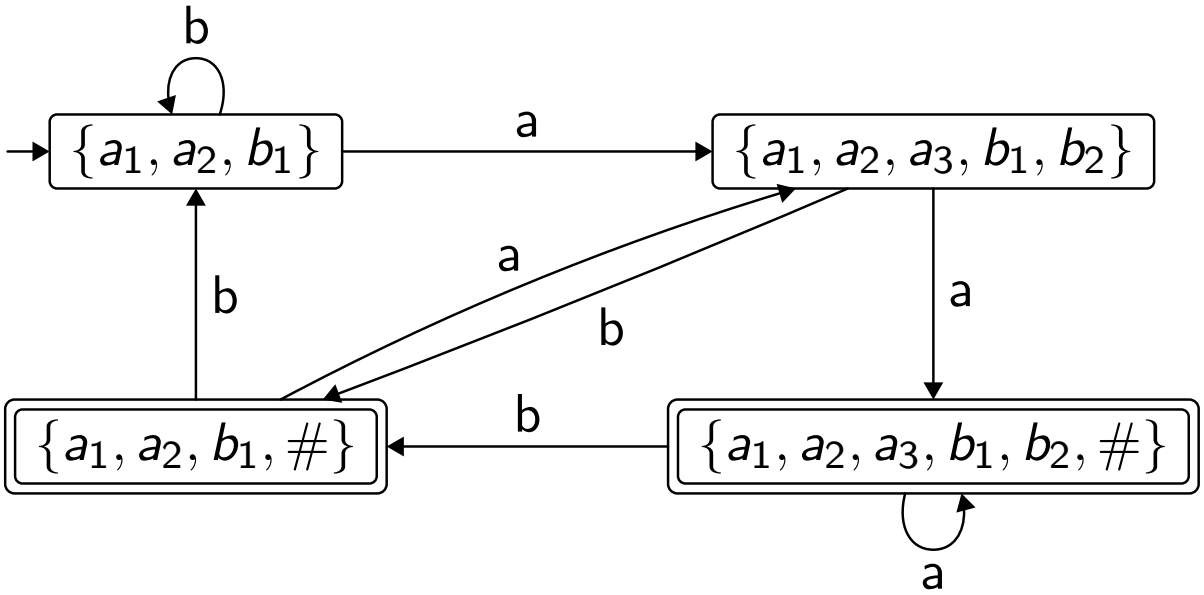


lorsqu'une transition n'est plus possible, de deux choses l'une :

- si un lexème a été reconnu, on le renvoie et `current_pos` prend la valeur de `last`
- sinon, c'est un échec de l'analyse lexicale

on peut construire l'automate fini correspondant à une expression régulière en passant par l'intermédiaire d'un automate non déterministe (Thompson, 1968)

mais on peut aussi construire directement un automate déterministe (Berry, Sethi, 1986) ; pour $(a|b) \star a(a|b)$ on obtient



voir le poly page 48

outils

en pratique, on dispose d'outils qui construisent les analyseurs lexicaux à partir de leur description par des expressions régulières et des actions

c'est la grande famille de `lex` : `lex`, `flex`, `jflex`, `ocamllex`, etc.

on présente ici `jflex` (pour Java) et `ocamllex` (pour OCaml)

pour illustrer ces outils, écrivons un analyseur lexical minimal pour un langage d'expressions arithmétiques avec

- des constantes entières
- des parenthèses
- une soustraction

l'outil jflex

un fichier `jflex` porte le suffixe `.flex` et a la forme suivante

```
... préambule ...
%{
... code Java arbitraire
%}
%%
<YYINITIAL> {
  expression régulière { action }
  ...
  expression régulière { action }
}
```

où chaque `action` est un code Java
(qui le plus souvent renvoie un lexème)

on écrit un fichier `Lexer.flex` pour nos expressions arithmétiques

```
import static sym.*;    /* importe les lexèmes */

%%

%class Lexer            /* notre classe s'appellera Lexer */
%unicode                /* les caractères sont unicode    */
%cup                    /* analyse syntaxique avec cup    */
%line                   /* activer le décompte des lignes */
%column                 /* et celui des colonnes          */
%yylexthrow Exception   /* on peut lever Exception        */

%{
   /* pas besoin de préambule Java ici */
%}
```

...

exemple 2/2

...

```
WhiteSpace          = [ \t\r\n]+      /* raccourcis */
Integer             = [:digit:]+
%%
<YYINITIAL> {
  "-"   { return new Symbol(MINUS, yyline, yycolumn); }
  "("   { return new Symbol(LPAR,  yyline, yycolumn); }
  ")"   { return new Symbol(RPAR,  yyline, yycolumn); }
  {Integer}
        { return new Symbol(INT, yyline, yycolumn,
                            Integer.parseInt(yytext())); }
  {WhiteSpace}
        { /* ignore */ }
  .     { throw new Exception (String.format (
           "Line %d, column %d: illegal character: '%s'\n",
           yyline, yycolumn, yytext())); }
}
```

explications

- la nature des lexèmes est libre ;
  on utilise ici la classe `Symbol` qui vient avec `cup` (voir plus loin)

- `MINUS`, `LPAR`, `RPAR` et `INT` sont des entiers (la nature des lexèmes)
  ici produits par l'outil `cup` et importés depuis `sym.java`

- les variables `yyline` et `yycolumn` sont mises à jour automatiquement

- `yytext()` renvoie la chaîne reconnue par l'expression régulière

on compile le fichier `Lexer.flex` avec `jflex`

```
jflex Lexer.flex
```

on obtient un fichier `Lexer.java` contenant notamment

- un constructeur

```
Lexer(java.io.Reader)
```

- une méthode

```
Symbol next_token()
```

les expressions régulières de `jflex`

`.`	n'importe quel caractère
`a`	le caractère `'a'`
`"foobar"`	la chaîne `"foobar"` (en particulier ϵ = `""`)
`[`*caractères*`]`	ensemble de caractères (par ex. `[a-zA-Z]`)
`[^`*caractères*`]`	complémentaire (par ex. `[^"]`)
`[:`*ident*`:]`	ensemble prédéfini de caractères (par ex. `[:digit:]`)
{*ident*}	expression régulière définie plus haut
r_1 `|` r_2	l'alternative
$r_1\ r_2$	la concaténation
r `*`	l'étoile
r `+`	une ou plusieurs répétitions de r ($\stackrel{\text{def}}{=} r\, r\star$)
r `?`	une ou zéro occurrence de r ($\stackrel{\text{def}}{=} \epsilon \mid r$)
`(` r `)`	parenthésage

l'outil ocamllex

un fichier `ocamllex` porte le suffixe `.mll` et a la forme suivante

```
{
  ... code OCaml arbitraire ...
}
rule nom = parse
| expression régulière { action }
| expression régulière { action }
| ...
{
  ... code OCaml arbitraire ...
}
```

où chaque `action` est un code OCaml

```
let white_space = [' ' '\t' '\n']+
let integer     = ['0'-'9']+
rule next_token = parse
  | white_space
      { next_token lexbuf }
  | integer as s
      { INT (int_of_string s) }
  | '-'
      { MINUS }
  | '('
      { LPAR }
  | ')'
      { RPAR }
  | eof
      { EOF }
  | _ as c
      { failwith ("illegal character" ^ String.make 1 c) }
```

- on suppose ici le type suivant pour les lexèmes

```
type token =
| INT of int
| MINUS
| LPAR
| RPAR
| EOF
```

il sera construit par l'analyseur syntaxique

- contrairement à `jflex`
  - on rappelle explicitement `next_token` quand on ignore les blancs
  - on ne manipule pas explicitement les lignes et colonnes

on compile le fichier `lexer.mll` avec `ocamllex`

```
ocamllex lexer.mll
```

ce qui produit un fichier OCaml `lexer.ml` qui définit une fonction

```
val next_token: Lexing.lexbuf -> token
```

(on construit son argument avec la fonction `Lexing.from_channel`)

les expressions régulières d'ocamllex

`_`	n'importe quel caractère
`'a'`	le caractère `'a'`
`"foobar"`	la chaîne `"foobar"` (en particulier ϵ = `""`)
`[`*caractères*`]`	ensemble de caractères (par ex. `['a'-'z' 'A'-'Z']`)
`[^`*caractères*`]`	complémentaire (par ex. `[^ '"']`)
ident	expression régulière définie plus haut
r_1 `|` r_2	l'alternative
$r_1\, r_2$	la concaténation
r `*`	l'étoile
r `+`	une ou plusieurs répétitions de r ($\stackrel{\text{def}}{=} r\, r\star$)
r `?`	une ou zéro occurrence de r ($\stackrel{\text{def}}{=} \epsilon \mid r$)
`(` r `)`	parenthésage
`eof`	la fin de l'entrée

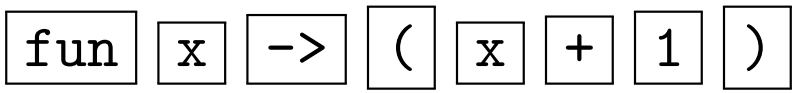
pour plus de détails, voir les documentations de `jflex` et `ocamllex`, accessibles depuis

- la page du cours
- le TD 3

- les **expressions régulières** sont à la base de l'analyse lexicale
- le travail est grandement **automatisé** par des outils tels que `jflex` ou `ocamllex`
- `jflex`/`ocamllex` est **plus expressif** que les expressions régulières car on peut écrire du code arbitraire dans les actions et rappeler l'analyseur lexical récursivement sur une condition
  $\Rightarrow$ permet notamment de reconnaître des commentaires **imbriqués**

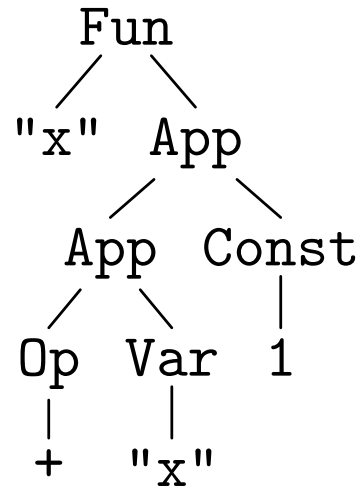
analyse syntaxique

suite de lexèmes



analyse syntaxique

syntaxe abstraite



en particulier, l'analyse syntaxique doit détecter les erreurs de syntaxe et

- les localiser précisément
- les identifier (le plus souvent seulement « erreur de syntaxe » mais aussi « parenthèse non fermée », etc.)
- voire, reprendre l'analyse pour découvrir de nouvelles erreurs

pour l'analyse syntaxique, on va utiliser

- une **grammaire non contextuelle** pour décrire la syntaxe
- un **automate à pile** pour la reconnaître

c'est l'analogue des expressions régulières / automates finis utilisés dans l'analyse lexicale

Définition

Une grammaire non contextuelle (ou hors contexte) est un quadruplet (N, T, S, R) *où*

- N *est un ensemble fini de* **symboles non terminaux**
- T *est un ensemble fini de* **symboles terminaux**
- $S \in N$ *est le symbole de départ (dit* **axiome***)*
- $R \subseteq N \times (N \cup T)^\star$ *est un ensemble fini de* **règles de production**

$N = \{E\}$, $T = \{+, *, (,), \texttt{int}\}$, $S = E$,
et $R = \{ (E, E+E), (E, E*E), (E, (E)), (E, \texttt{int}) \}$

en pratique on note les règles sous la forme

$$\begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E + E \\ & | & E * E \\ & | & (E) \\ & | & \texttt{int} \end{array}$$

les terminaux de la grammaire seront les lexèmes produits par l'analyse lexicale

`int` désigne ici le lexème correspondant à une constante entière
(*i.e.* sa nature, pas sa valeur)

Définition

Un mot $u \in (N \cup T)^\star$ *se* **dérive** *en un mot* $v \in (N \cup T)^\star$, *et on note* $u \to v$, *s'il existe une décomposition*

$$u = u_1 X u_2$$

avec $X \in N$, $X \to \beta \in R$ *et*

$$v = u_1 \beta u_2$$

exemple :

$$\underbrace{E * (}_{u_1} \; \underbrace{E}_{X} \; \underbrace{)}_{u_2} \quad \to \quad E * (\; \underbrace{E + E}_{\beta} \;)$$

une suite $w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_n$ est appelée une dérivation

on parle de **dérivation gauche** (resp. **droite**) si le non terminal réduit est systématiquement le plus à gauche *i.e.* $u_1 \in T^\star$ (resp. le plus à droite *i.e.* $u_2 \in T^\star$)

on note $\to^\star$ la clôture réflexive transitive de $\to$

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow E \texttt{ * } E \\
&\rightarrow \texttt{int * } E \\
&\rightarrow \texttt{int * (} E \texttt{)} \\
&\rightarrow \texttt{int * (} E \texttt{ + } E \texttt{)} \\
&\rightarrow \texttt{int * (int + } E \texttt{)} \\
&\rightarrow \texttt{int * (int + int)}
\end{aligned}
$$

Définition

Le **langage** *défini par une grammaire non contextuelle* $G = (N, T, S, R)$ *est l'ensemble des mots de* $T^\star$ *dérivés de l'axiome, i.e.*

$$L(G) = \{ w \in T^\star \mid S \rightarrow^\star w \}$$

dans notre exemple

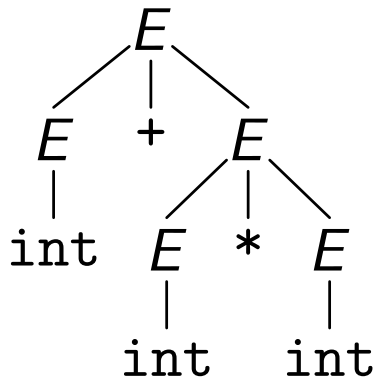
$$\texttt{int * (int + int)} \in L(G)$$

Définition

Un **arbre de dérivation** *est un arbre dont les nœuds sont étiquetés par des symboles de la grammaire, de la manière suivante :*

- *la racine est l'axiome S*
- *tout nœud interne X est un non terminal dont les fils sont étiquetés par $\beta \in (N \cup T)^\star$ avec $X \to \beta$ une règle de la dérivation*

exemple :



attention : ce n'est pas la même chose que l'arbre de syntaxe abstraite

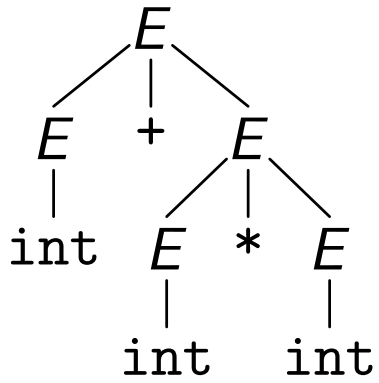
pour un arbre de dérivation dont les feuilles forment le mot w dans l'ordre infixe, il est clair qu'on a $S \rightarrow^\star w$

inversement, à toute dérivation $S \rightarrow^\star w$, on peut associer un arbre de dérivation dont les feuilles forment le mot w dans l'ordre infixe

la dérivation gauche

$$E \rightarrow E + E \rightarrow \texttt{int} + E \rightarrow \texttt{int} + E * E \rightarrow \texttt{int} + \texttt{int} * E \rightarrow \texttt{int} + \texttt{int} * \texttt{int}$$

donne l'arbre de dérivation



mais la dérivation droite

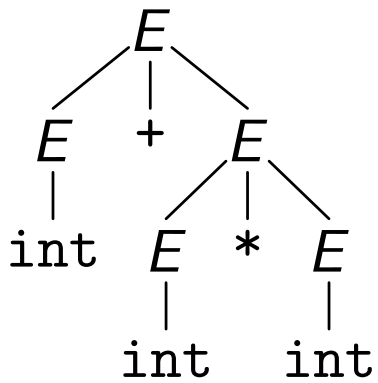
$$E \rightarrow E + E \rightarrow E + E * E \rightarrow E + E * \texttt{int} \rightarrow E + \texttt{int} * \texttt{int} \rightarrow \texttt{int} + \texttt{int} * \texttt{int}$$

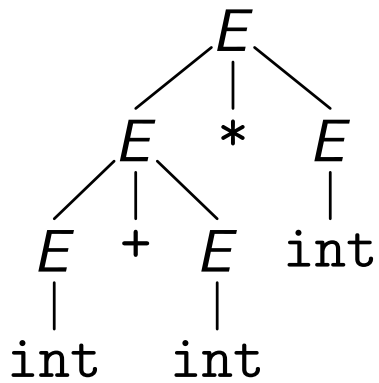
également

Définition

Une grammaire est dite **ambiguë** *si un mot au moins admet plusieurs arbres de dérivation*

exemple : le mot `int + int * int` admet les deux arbres de dérivations





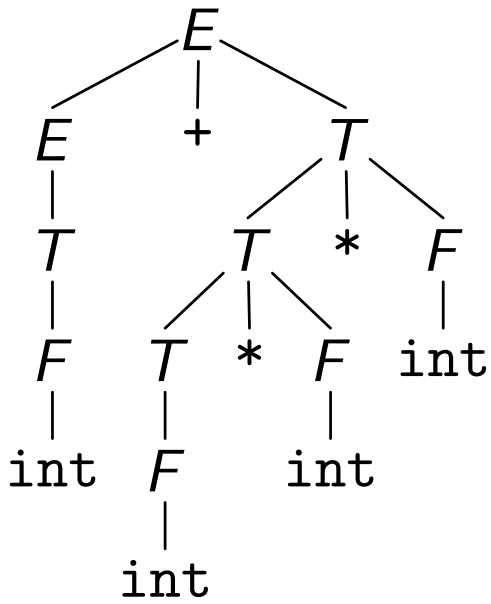
et notre grammaire est donc ambiguë

pour ce langage-là, il est néanmoins possible de proposer une autre grammaire, non ambiguë, qui définit le même langage

$$
\begin{array}{rcl}
E & \rightarrow & E + T \\
 & | & T \\
T & \rightarrow & T * F \\
 & | & F \\
F & \rightarrow & (E) \\
 & | & \texttt{int}
\end{array}
$$

cette nouvelle grammaire traduit la priorité de la multiplication sur l'addition, et le choix d'une associativité à gauche pour ces deux opérations

ainsi, le mot `int + int * int * int` n'a plus qu'un seul arbre de dérivation, à savoir



correspondant à la dérivation gauche

$$E \to E + T \to T + T \to F + T \to \texttt{int} + T \to \texttt{int} + T * F$$
$$\to \texttt{int} + T * F * F \to \texttt{int} + F * F * F \to \texttt{int} + \texttt{int} * F * F$$
$$\to \texttt{int} + \texttt{int} * \texttt{int} * F \to \texttt{int} + \texttt{int} * \texttt{int} * \texttt{int}$$

déterminer si une grammaire est ou non ambiguë n'est **pas décidable**

(rappel : décidable veut dire qu'on peut écrire un programme qui, pour toute entrée, termine et répond oui ou non)

on va utiliser des **critères décidables suffisants** pour garantir qu'une grammaire est non ambiguë, et pour lesquels on sait en outre décider l'appartenance au langage efficacement (avec un automate à pile déterministe)

les classes de grammaires définies par ces critères s'appellent LR(0), SLR(1), LALR(1), LR(1), LL(1), etc.

avant de commencer, on a besoin de quelques définitions...

Définition (NULL)

Soit $\alpha \in (T \cup N)^\star$. $\textsc{null}(\alpha)$ *est vrai si et seulement si on peut dériver ϵ à partir de α i.e. $\alpha \to^\star \epsilon$.*

Définition (FIRST)

Soit $\alpha \in (T \cup N)^\star$. $\textsc{first}(\alpha)$ *est l'ensemble de tous les premiers terminaux des mots dérivés de α, i.e. $\{a \in T \mid \exists w.\, \alpha \to^\star aw\}$.*

Définition (FOLLOW)

Soit $X \in N$. $\textsc{follow}(X)$ *est l'ensemble de tous les terminaux qui peuvent apparaître après X dans une dérivation, i.e. $\{a \in T \mid \exists u, w.\, S \to^\star uXaw\}$.*

pour calculer $\text{NULL}(\alpha)$ il suffit de déterminer $\text{NULL}(X)$ pour $X \in N$

$\text{NULL}(X)$ est vrai si et seulement si

- il existe une production $X \to \epsilon$,
- ou il existe une production $X \to Y_1 \dots Y_m$ où $\text{NULL}(Y_i)$ pour tout i

problème : il s'agit d'un ensemble d'équations mutuellement récursives

dit autrement, si $N = \{X_1, \dots, X_n\}$ et si $\vec{V} = (\text{NULL}(X_1), \dots, \text{NULL}(X_n))$, on cherche la **plus petite solution** d'une équation de la forme

$$\vec{V} = F(\vec{V})$$

deux exemples de telles équations

Théorème (existence d'un plus petit point fixe (Tarski))

Soit A un ensemble fini muni d'une relation d'ordre $\leq$ et d'un plus petit élément ε. Toute fonction $f : A \to A$ croissante, i.e. telle que $\forall x, y . x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, admet un plus petit point fixe.

preuve : comme ε est le plus petit élément, on a $\varepsilon \leq f(\varepsilon)$
f étant croissante, on a donc $f^k(\varepsilon) \leq f^{k+1}(\varepsilon)$ pour tout k
A étant fini, il existe donc un plus petit k_0 tel que $f^{k_0}(\varepsilon) = f^{k_0+1}(\varepsilon)$
$a_0 = f^{k_0}(\varepsilon)$ est donc un point fixe de f

soit b un autre point fixe de f
on a $\varepsilon \leq b$ et donc $f^k(\varepsilon) \leq f^k(b)$ pour tout k
en particulier $a_0 = f^{k_0}(\varepsilon) \leq f^{k_0}(b) = b$
a_0 est donc le plus petit point fixe de f □

le théorème de Tarski donne des conditions suffisantes mais pas nécessaires

dans le cas du calcul de NULL, on a
$A = \text{BOOL} \times \cdots \times \text{BOOL}$ avec $\text{BOOL} = \{\texttt{false}, \texttt{true}\}$

on peut munir BOOL de l'ordre $\texttt{false} \leq \texttt{true}$ et A de l'ordre point à point

$$(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{si et seulement si} \quad \forall i.\, x_i \leq y_i$$

le théorème s'applique alors en prenant

$$\varepsilon = (\texttt{false}, \ldots, \texttt{false})$$

car la fonction calculant $\text{NULL}(X)$ à partir des $\text{NULL}(X_i)$ est croissante

pour calculer les $\text{NULL}(X_i)$, on part donc de

$$\text{NULL}(X_1) = \texttt{false}, \ldots, \text{NULL}(X_n) = \texttt{false}$$

et on applique les équations jusqu'à obtention du point fixe *i.e.* jusqu'à ce que la valeur des $\text{NULL}(X_i)$ ne soit plus modifiée

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & T\ E' \\
E' & \rightarrow & \texttt{+}\ T\ E' \\
 & | & \epsilon \\
T & \rightarrow & F\ T' \\
T' & \rightarrow & \texttt{*}\ F\ T' \\
 & | & \epsilon \\
F & \rightarrow & \texttt{(}\ E\ \texttt{)} \\
 & | & \texttt{int}
\end{array}
$$

E	E'	T	T'	F
false	false	false	false	false
false	true	false	true	false
false	true	false	true	false

pourquoi cherche-t-on le **plus petit** point fixe ?

$\Rightarrow$ par récurrence sur le nombre d'étapes du calcul précédent, on montre que si $\text{NULL}(X) = \texttt{true}$ alors $X \rightarrow^\star \epsilon$

$\Leftarrow$ par récurrence sur le nombre d'étapes de la dérivation $X \rightarrow^\star \epsilon$, on montre que $\text{NULL}(X) = \texttt{true}$ par le calcul précédent

de même, les équations définissant FIRST sont mutuellement récursives

$$\text{FIRST}(X) = \bigcup_{X \to \beta} \text{FIRST}(\beta)$$

et

$$\begin{aligned}
\text{FIRST}(\epsilon) &= \emptyset \\
\text{FIRST}(a\beta) &= \{a\} \\
\text{FIRST}(X\beta) &= \text{FIRST}(X), \quad \text{si } \neg\text{NULL}(X) \\
\text{FIRST}(X\beta) &= \text{FIRST}(X) \cup \text{FIRST}(\beta), \quad \text{si NULL}(X)
\end{aligned}$$

de même, on procède par calcul de point fixe sur le produit cartésien $A = \mathcal{P}(T) \times \cdots \times \mathcal{P}(T)$ muni, point à point, de l'ordre $\subseteq$ et avec $\varepsilon = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & T\ E' \\
E' & \rightarrow & \texttt{+}\ T\ E' \\
 & | & \epsilon \\
T & \rightarrow & F\ T' \\
T' & \rightarrow & \texttt{*}\ F\ T' \\
 & | & \epsilon \\
F & \rightarrow & \texttt{(}\ E\ \texttt{)} \\
 & | & \texttt{int}
\end{array}
$$

NULL

E	E'	T	T'	F
`false`	`true`	`false`	`true`	`false`

FIRST

E	E'	T	T'	F
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{\texttt{+}\}$	$\emptyset$	$\{\texttt{*}\}$	$\{\texttt{(}, \texttt{int}\}$
$\emptyset$	$\{\texttt{+}\}$	$\{\texttt{(}, \texttt{int}\}$	$\{\texttt{*}\}$	$\{\texttt{(}, \texttt{int}\}$
$\{\texttt{(}, \texttt{int}\}$	$\{\texttt{+}\}$	$\{\texttt{(}, \texttt{int}\}$	$\{\texttt{*}\}$	$\{\texttt{(}, \texttt{int}\}$
$\{\texttt{(}, \texttt{int}\}$	$\{\texttt{+}\}$	$\{\texttt{(}, \texttt{int}\}$	$\{\texttt{*}\}$	$\{\texttt{(}, \texttt{int}\}$

là encore, les équations définissant FOLLOW sont mutuellement récursives

$$\text{FOLLOW}(X) = \bigcup_{Y \to \alpha X \beta} \text{FIRST}(\beta) \cup \bigcup_{Y \to \alpha X \beta,\, \text{NULL}(\beta)} \text{FOLLOW}(Y)$$

on procède par calcul de point fixe, sur le même domaine que pour FIRST

on introduit un symbole spécial # dans les suivants du symbole de départ (ce que l'on peut faire directement, ou en ajoutant une règle $S' \to S\#$)

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & T\ E' \\
E' & \rightarrow & \texttt{+}\ T\ E' \\
 & | & \epsilon \\
T & \rightarrow & F\ T' \\
T' & \rightarrow & \texttt{*}\ F\ T' \\
 & | & \epsilon \\
F & \rightarrow & \texttt{(}\ E\ \texttt{)} \\
 & | & \texttt{int}
\end{array}
$$

NULL

E	E'	T	T'	F
`false`	`true`	`false`	`true`	`false`

FIRST

E	E'	T	T'	F
{`(`, `int`}	{`+`}	{`(`, `int`}	{`*`}	{`(`, `int`}

FOLLOW

E	E'	T	T'	F
{#}	∅	∅	∅	∅
{#, `)`}	{#}	{`+`, #}	∅	{`*`}
{#, `)`}	{#, `)`}	{`+`, #, `)`}	{`+`, #}	{`*`, `+`, #}
{#, `)`}	{#, `)`}	{`+`, #, `)`}	{`+`, #, `)`}	{`*`, `+`, #, `)`}
{#, `)`}	{#, `)`}	{`+`, #, `)`}	{`+`, #, `)`}	{`*`, `+`, #, `)`}

analyse ascendante

l'idée consiste à lire l'entrée de gauche à droite, en cherchant à reconnaître des membres droits de productions pour construire l'arbre de dérivation de bas en haut (*bottom-up parsing*)

l'analyse manipule une pile qui est un mot de $(T \cup N)^\star$

à chaque instant, deux actions sont possibles

- opération de **lecture** (*shift* en anglais) : on lit un terminal de l'entrée et on l'empile
- opération de **réduction** (*reduce* en anglais) : on reconnaît en sommet de pile le membre droit β d'une production $X \to \beta$, et on remplace β par X en sommet de pile

dans l'état initial, la pile est vide

lorsqu'il n'y a plus d'action possible, l'entrée est reconnue si elle a été entièrement lue et si la pile est réduite à S

exemple

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & E + T \\
 & | & T \\
T & \rightarrow & T * F \\
 & | & F \\
F & \rightarrow & (E) \\
 & | & \texttt{int}
\end{array}
$$

pile	entrée	action
ϵ	`int+int*int`	lecture
`int`	`+int*int`	réduction $F \rightarrow$ `int`
F	`+int*int`	réduction $T \rightarrow F$
T	`+int*int`	réduction $E \rightarrow T$
E	`+int*int`	lecture
E`+`	`int*int`	lecture
E`+int`	`*int`	réduction $F \rightarrow$ `int`
$E+F$	`*int`	réduction $T \rightarrow F$
$E+T$	`*int`	lecture
$E+T$`*`	`int`	lecture
$E+T*$`int`		réduction $F \rightarrow$ `int`
$E+T*F$		réduction $T \rightarrow T*F$
$E+T$		réduction $E \rightarrow E+T$
E		succès

comment prendre la décision lecture / réduction ?

en se servant d'un automate fini et en examinant les k premiers caractères de l'entrée ; c'est l'analyse LR(k)

(LR signifie « **L**eft to right scanning, **R**ightmost derivation »)

en pratique $k = 1$
i.e. on examine uniquement le premier caractère de l'entrée

la pile est de la forme

$$s_0\, x_1\, s_1\, \ldots\, x_n\, s_n$$

où s_i est un état de l'automate et $x_i \in T \cup N$ comme auparavant

soit a le premier caractère de l'entrée ; on regarde la transition de l'automate pour l'état s_n et l'entrée a

- si c'est un succès ou un échec, on s'arrête
- si c'est une lecture, alors on empile a et l'état résultat de la transition
- si c'est une réduction $X \to \alpha$, avec α de longueur p, alors on doit trouver α en sommet de pile

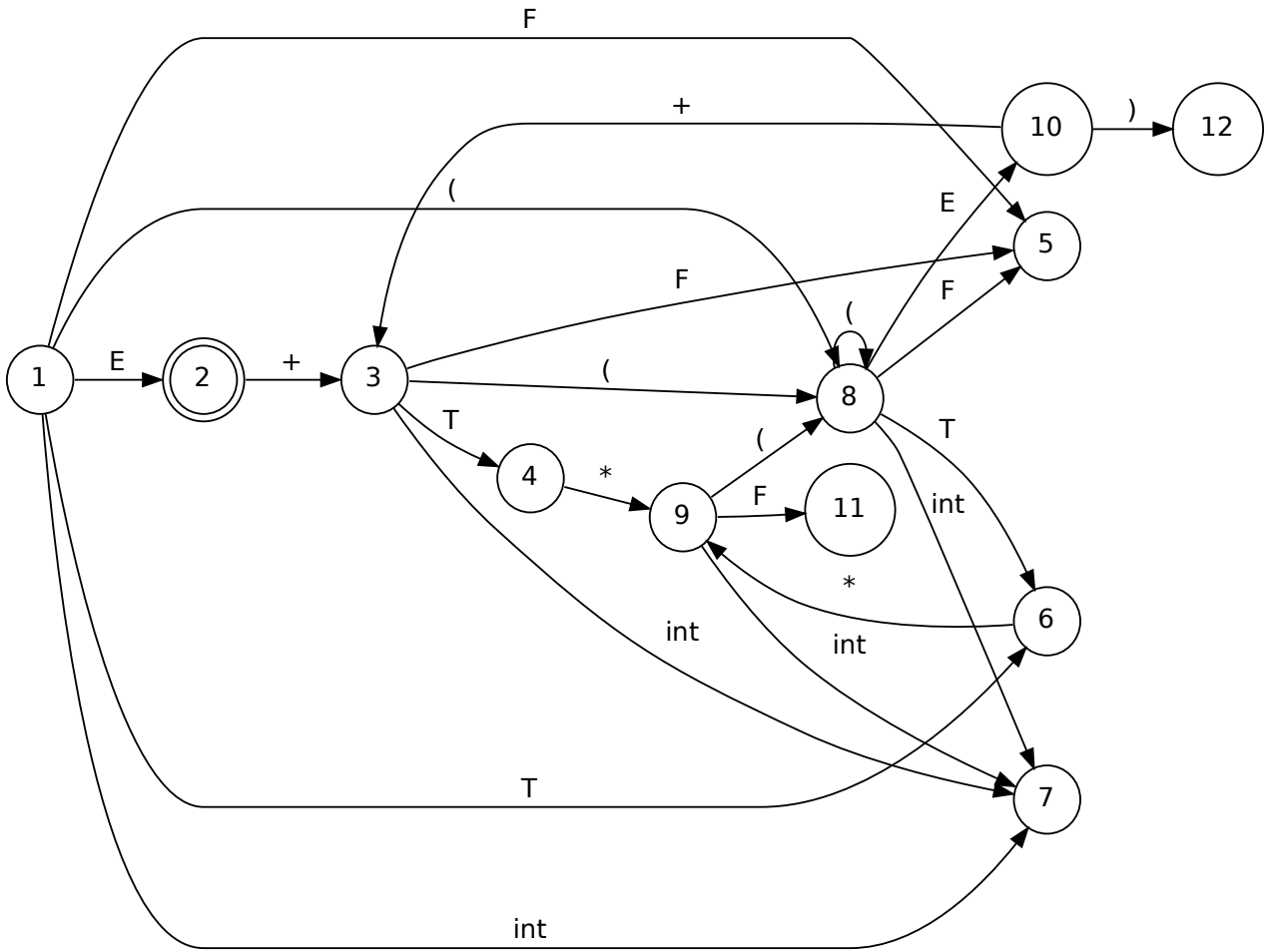
$$s_0\, x_1\, s_1\, \ldots\, x_{n-p}\, s_{n-p}\, |\alpha_1\, s_{n-p+1} \ldots\, \alpha_p\, s_n$$

on dépile alors α et on empile $X\, s$, où s est l'état résultat de la transition $s_{n-p} \xrightarrow{X} s$, *i.e.*

$$s_0\, x_1\, s_1\, \ldots\, x_{n-p}\, s_{n-p}\, X\, s$$

dans l'exemple plus haut, on s'est servi de cet automate

$$
\begin{array}{rcl}
E & \rightarrow & E + T \\
 & | & T \\
T & \rightarrow & T * F \\
 & | & F \\
F & \rightarrow & (E) \\
 & | & \texttt{int}
\end{array}
$$



construction de l'automate

fixons pour l'instant $k = 0$

on commence par construire un automate **asynchrone**

c'est-à-dire contenant des transitions spontanées
appelées ϵ-**transitions** et notées $s_1 \xrightarrow{\epsilon} s_2$

les **états** sont des *items* de la forme

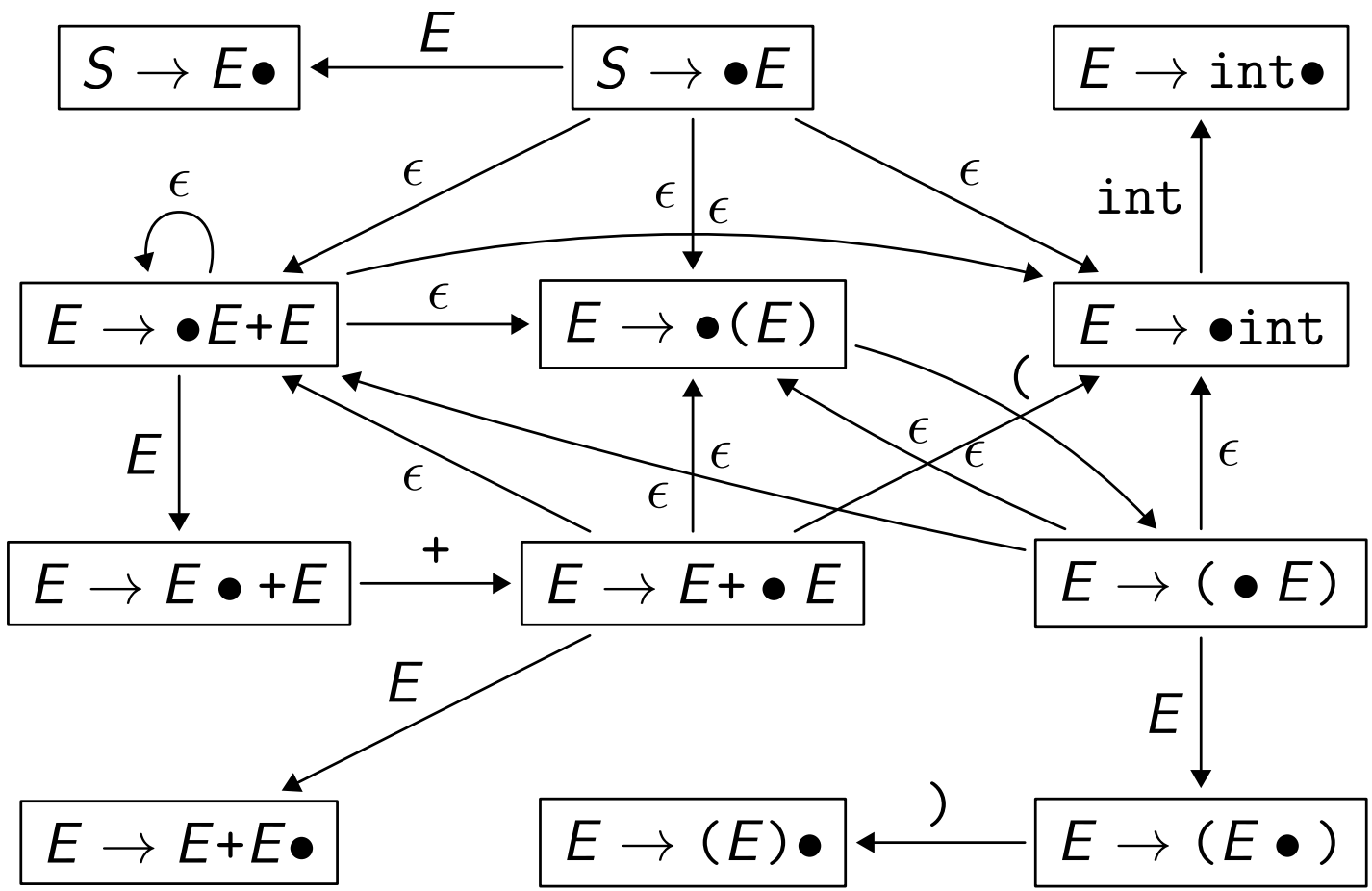
$$[X \to \alpha \bullet \beta]$$

où $X \to \alpha\beta$ est une production de la grammaire ; l'intuition est « je cherche à reconnaître X, j'ai déjà lu α et je dois encore lire β »

les **transitions** sont étiquetées par $T \cup N$ et sont les suivantes

$$\begin{array}{rcll} [Y \to \alpha \bullet a\beta] & \xrightarrow{a} & [Y \to \alpha a \bullet \beta] & \\ [Y \to \alpha \bullet X\beta] & \xrightarrow{X} & [Y \to \alpha X \bullet \beta] & \\ [Y \to \alpha \bullet X\beta] & \xrightarrow{\epsilon} & [X \to \bullet\gamma] & \text{pour toute production } X \to \gamma \end{array}$$

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & E \\
E & \rightarrow & E{+}E \\
 & | & (E) \\
 & | & \texttt{int}
\end{array}
$$



déterminisons l'automate LR(0)

pour cela, on regroupe les états reliés par des ϵ-transitions

les états de l'automate déterministe sont donc des ensembles d'*items*, tel que

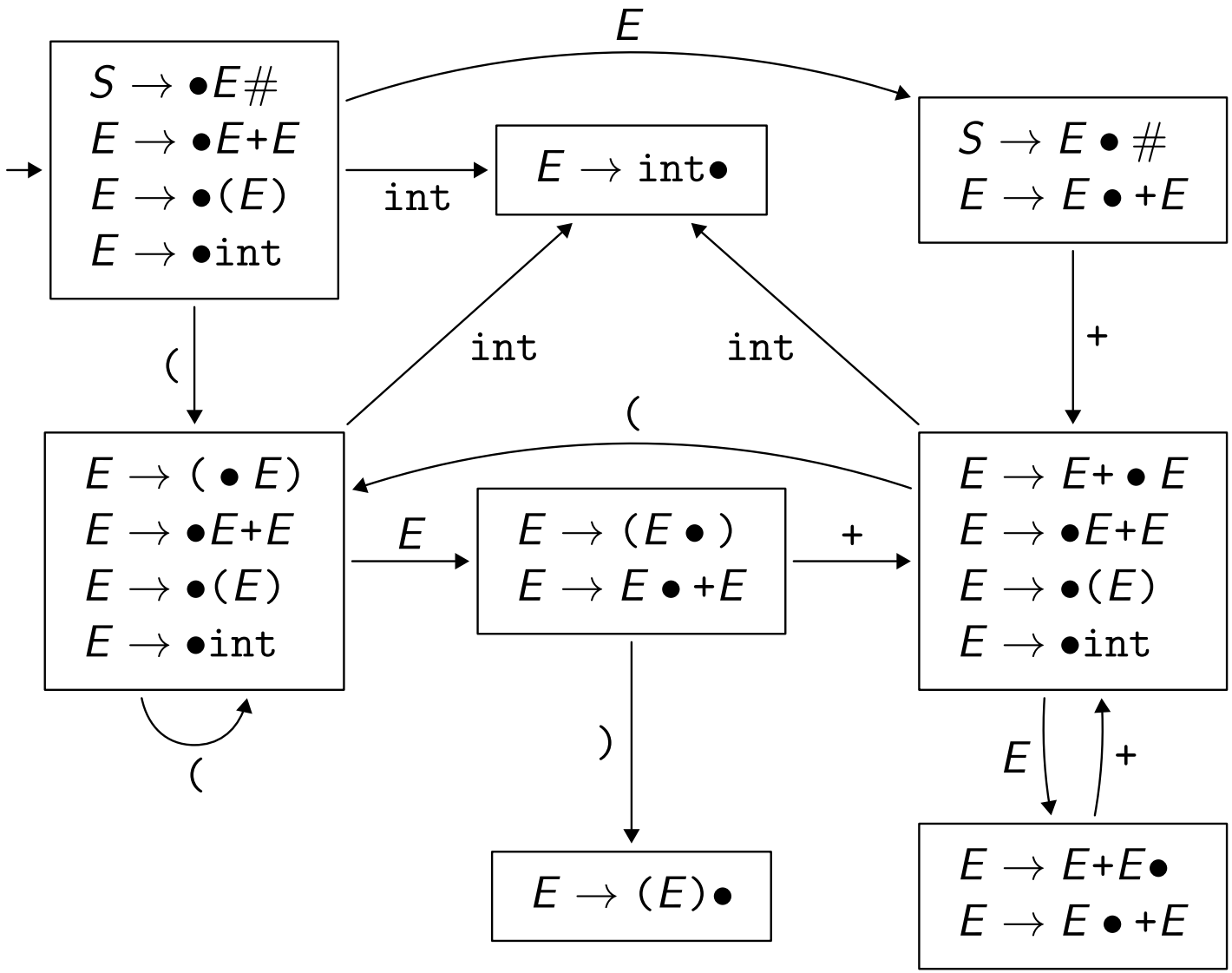
$$
\begin{array}{l}
E \to E\texttt{+} \bullet E \\
E \to \bullet E\texttt{+}E \\
E \to \bullet\texttt{(}E\texttt{)} \\
E \to \bullet\texttt{int}
\end{array}
$$

chaque état s est **saturé** par la propriété

$$\begin{array}{rl} \text{si} & Y \to \alpha \bullet X \beta \in s \\ \text{et si} & X \to \gamma \text{ est une production} \\ \text{alors} & X \to \bullet \gamma \in s \end{array}$$

l'état initial est celui contenant $S \to \bullet E$

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & E \\
E & \rightarrow & E{+}E \\
 & | & (E) \\
 & | & \texttt{int}
\end{array}
$$



en pratique, on ne travaille pas directement sur l'automate mais sur deux tables

- une table d'**actions** ayant pour lignes les états et pour colonnes les terminaux ; la case $\texttt{action}(s, a)$ indique
  - `shift` s' pour une lecture et un nouvel état s'
  - `reduce` $X \to \alpha$ pour une réduction
  - un succès
  - un échec

- une table de **déplacements** ayant pour lignes les états et pour colonnes les non terminaux ; la case $\texttt{goto}(s, X)$ indique l'état résultat d'une réduction de X

on construit ainsi la table `action`

- $\texttt{action}(s, \#) =$ succès si $[S \to E \bullet \#] \in s$
- $\texttt{action}(s, a) = \texttt{shift}\ s'$ si on a une transition $s \xrightarrow{a} s'$
- $\texttt{action}(s, a) = \texttt{reduce}\ X \to \beta$ si $[X \to \beta\bullet] \in s$, pour tout a
- échec dans tous les autres cas

on construit ainsi la table `goto`

- $\texttt{goto}(s, X) = s'$ si et seulement si on a une transition $s \xrightarrow{X} s'$

sur notre exemple, la table est la suivante :

	action					*goto*
état	(	)	+	int	#	E
1	shift 4			shift 2		3
2	reduce $E \rightarrow$ int					
3			shift 6		succès	
4	shift 4			shift 2		5
5		shift 7	shift 6			
6	shift 4			shift 2		8
7	reduce $E \rightarrow (E)$					
8			shift 6			
	reduce $E \rightarrow E$+E					

la table LR(0) peut contenir deux sortes de conflits

- un conflit **lecture/réduction** (*shift/reduce*), si dans un état s on peut effectuer une lecture mais aussi une réduction
- un conflit **réduction/réduction** (*reduce/reduce*), si dans un état s deux réductions différentes sont possibles

Définition (classe LR(0))

Une grammaire est dite LR(0) si la table ainsi construite ne contient pas de conflit.

on a un conflit lecture/réduction dans l'état 8

$$\boxed{\begin{array}{l} E \to E{+}E\bullet \\ E \to E\bullet{+}E \end{array}}$$

il illustre précisément l'ambiguïté de la grammaire sur un mot tel que `int+int+int`

on peut résoudre le conflit de deux façons

- si on favorise la **lecture**, on traduira une associativité à droite
- si on favorise la **réduction**, on traduira une associativité à gauche

privilégions la réduction et illustrons sur un exemple

	(	)	+	int	#	E
1	s4			s2		3
2	reduce $E \rightarrow$ int					
3			s6		ok	
4	s4			s2		5
5		s7	s6			
6	s4			s2		8
7	reduce $E \rightarrow (E)$					
8	reduce $E \rightarrow E$+E					

pile	entrée	action
1	int+int+int	s2
1 int 2	+int+int	$E \rightarrow$ int, g3
1 E 3	+int+int	s6
1 E 3 + 6	int+int	s2
1 E 3 + 6 int 2	+int	$E \rightarrow$ int, g8
1 E 3 + 6 E 8	+int	$E \rightarrow E$+E, g3
1 E 3	+int	s6
1 E 3 + 6	int	s2
1 E 3 + 6 int 2	#	$E \rightarrow$ int, g8
1 E 3 + 6 E 8	#	$E \rightarrow E$+E, g3
1 E 3	#	succès

la construction LR(0) engendre très facilement des conflits
on va donc chercher à limiter les réductions

une idée très simple consiste à poser $\texttt{action}(s, a) = \texttt{reduce}\ X \to \beta$ si et seulement si

$$[X \to \beta\bullet] \in s \quad \text{et} \quad a \in \textsc{follow}(X)$$

Définition (classe SLR(1))

Une grammaire est dite SLR(1) si la table ainsi construite ne contient pas de conflit.

(SLR signifie *Simple LR*)

la grammaire

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & E\# \\
E & \rightarrow & E + T \\
 & | & T \\
T & \rightarrow & T * F \\
 & | & F \\
F & \rightarrow & (E) \\
 & | & \texttt{int}
\end{array}
$$

est SLR(1)

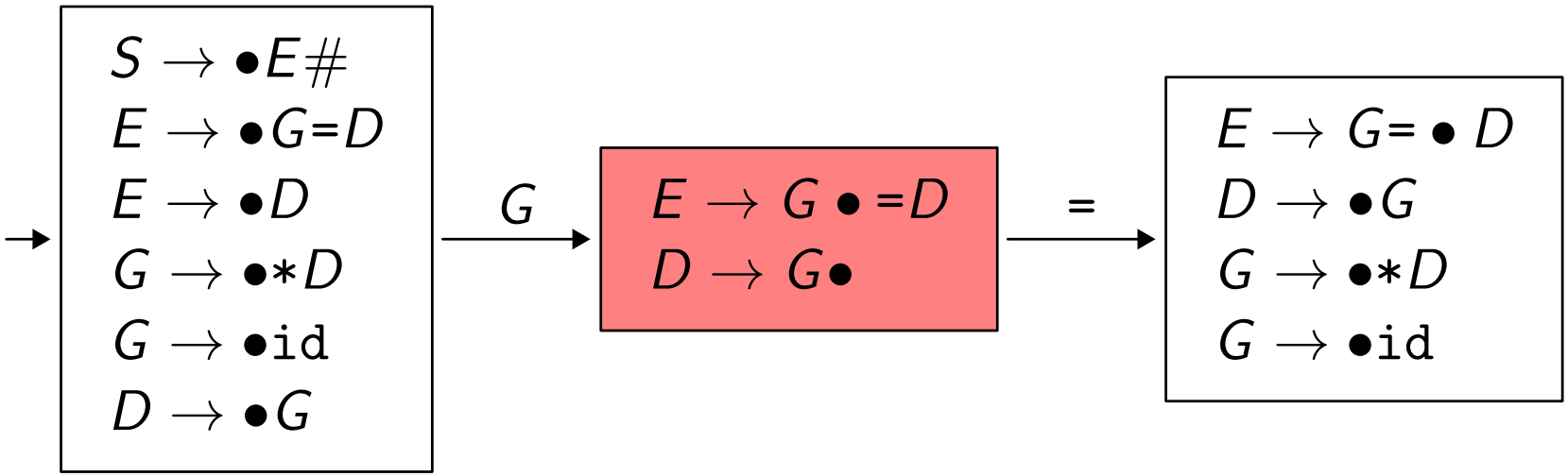
exercice : le vérifier (l'automate contient 12 états)

en pratique, la classe SLR(1) reste trop restrictive

exemple :

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & E\# \\
E & \to & G = D \\
 & | & D \\
G & \to & * D \\
 & | & \texttt{id} \\
D & \to & G
\end{array}
$$

	=	
1	...	...
2	shift 3 reduce $D \to G$	...
3	⋮	⋱



on introduit une classe de grammaires encore plus large, **LR(1)**, au prix de tables encore plus grandes

dans l'analyse LR(1), les *items* ont maintenant la forme

$$[X \to \alpha \bullet \beta, a]$$

dont la signification est : « je cherche à reconnaître X, j'ai déjà lu α et je dois encore lire β puis vérifier que le caractère suivant est a »

les transitions de l'automate LR(1) non déterministe sont

$$
\begin{array}{rcll}
[Y \to \alpha \bullet a\beta, b] & \xrightarrow{a} & [Y \to \alpha a \bullet \beta, b] & \\
[Y \to \alpha \bullet X\beta, b] & \xrightarrow{X} & [Y \to \alpha X \bullet \beta, b] & \\
[Y \to \alpha \bullet X\beta, b] & \xrightarrow{\epsilon} & [X \to \bullet\gamma, c] & \text{pour tout } c \in \textsc{first}(\beta b)
\end{array}
$$

l'état initial est celui qui contient $[S \to \bullet\alpha, \#]$

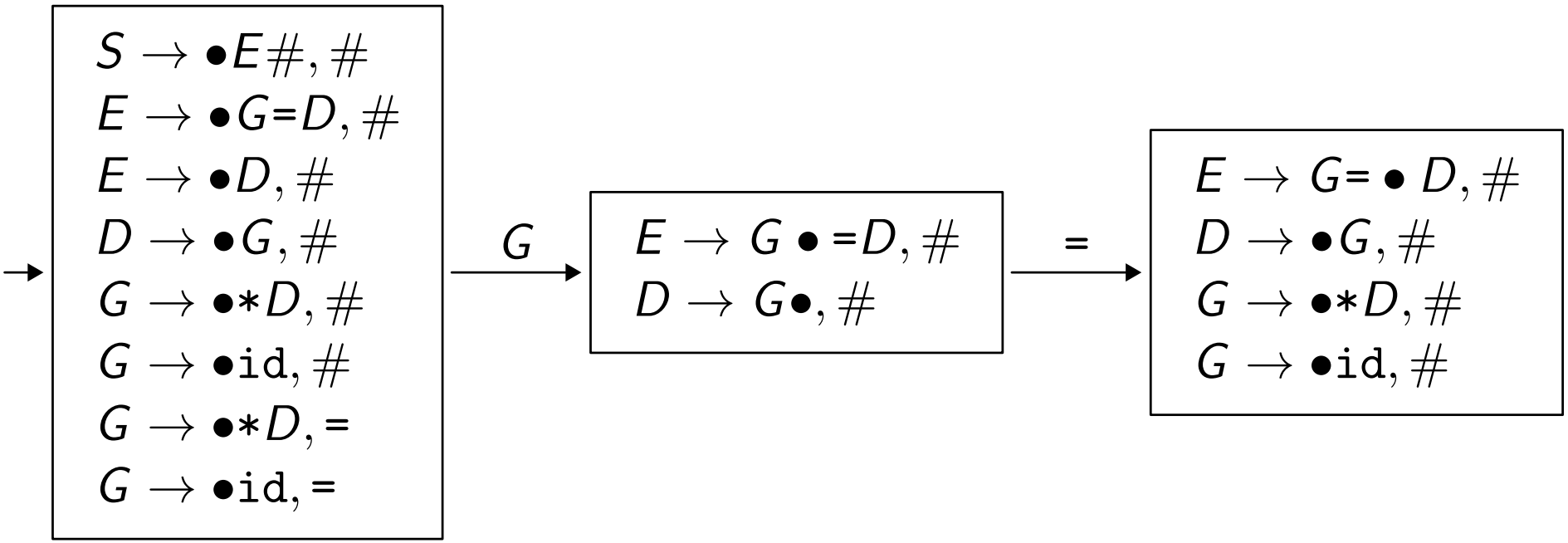
comme précédemment, on peut déterminiser l'automate et construire la table correspondante ; on introduit une action de réduction pour (s, a) seulement lorsque s contient un item de la forme $[X \to \alpha\bullet, a]$

Définition (classe LR(1))

Une grammaire est dite LR(1) si la table ainsi construite ne contient pas de conflit.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & E\# \\
E & \rightarrow & G = D \\
 & | & D \\
G & \rightarrow & * D \\
 & | & \texttt{id} \\
D & \rightarrow & G
\end{array}
$$

	#	=	
1	...	...	...
2	reduce $D \rightarrow G$	shift 3	...
3	⋮	⋮	⋱

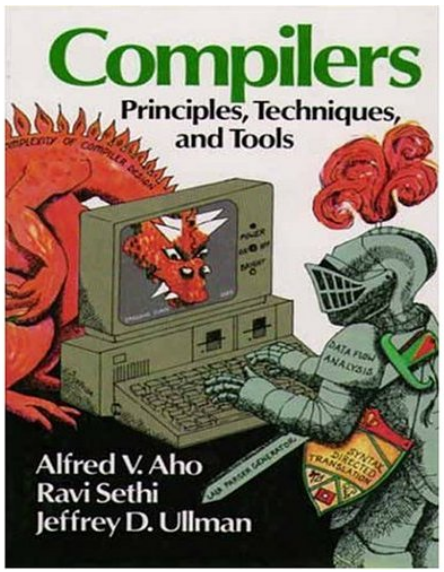


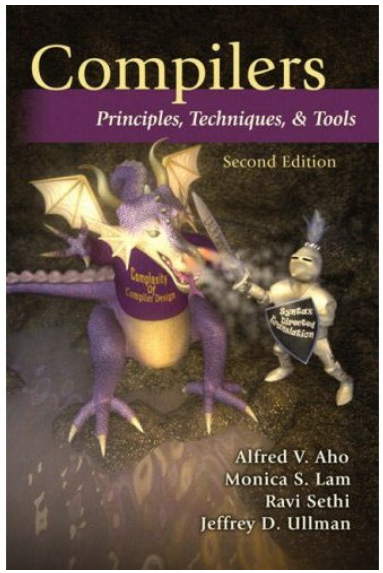
LALR(1)

la construction LR(1) pouvant être coûteuse, il existe des approximations

la classe LALR(1) (*lookahead LR*) est une telle approximation, utilisée notamment dans les outils de la famille `yacc`

plus d'info : voir par exemple *Compilateurs : principes techniques et outils* (dit « le dragon ») de A. Aho, R. Sethi, J. Ullman, section 4.7



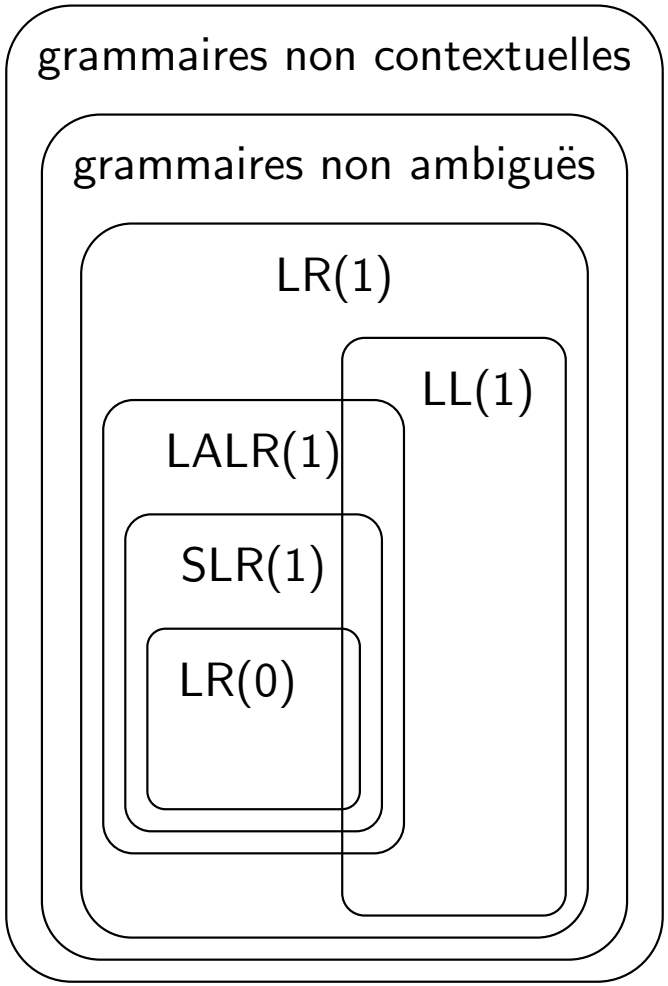


on peut également procéder par **analyse descendante** = expansions successives du non terminal le plus à gauche en partant de S, en se servant d'une table d'expansions

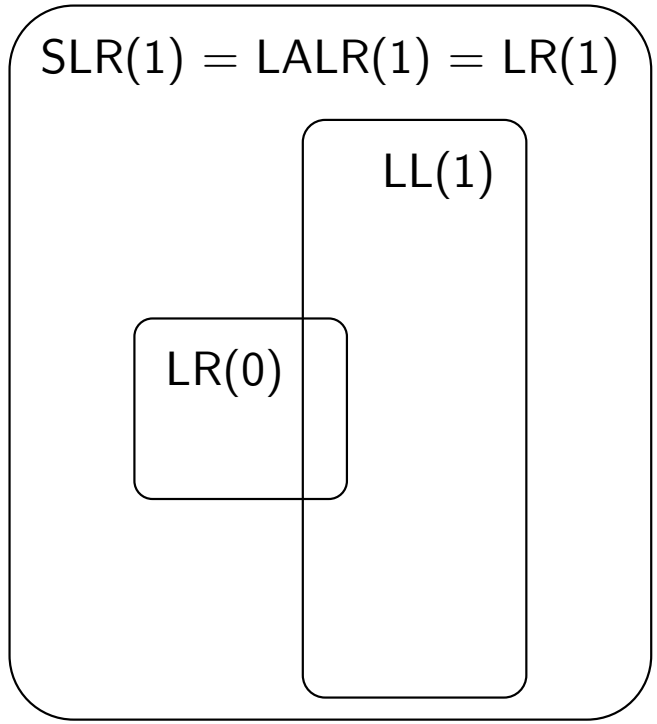
ce sont les classes de grammaires LL(k) ; cf poly chapitre 4

les analyseurs LL(1) sont relativement simples à écrire
mais ils nécessitent d'écrire des grammaires peu naturelles

grammaires



langages



l'analyse ascendante est puissante mais le calcul des tables est complexe

le travail est automatisé par de nombreux outils

c'est la grande famille de `yacc`, `bison`, `ocamlyacc`, `cup`, `menhir`, ...
(YACC signifie *Yet Another Compiler Compiler*)

on présente ici `cup` (pour Java) et `menhir` (pour OCaml)

on poursuit l'exemple du langage d'expressions arithmétiques avec

- des constantes entières
- des parenthèses
- une soustraction

on suppose la syntaxe abstraite et l'analyseur lexical déjà réalisés

l'outil CUP (Java)

dans un fichier `Parser.cup`, on commence par un entête où sont déclarés les symboles terminaux et non terminaux

```
terminal Integer INT;
terminal LPAR, RPAR, MINUS;

non terminal Expr file;
non terminal Expr expr;
```

...

on écrit ensuite les règles de grammaires et les actions

```
start with file;

file ::=
  expr:e
    {: RESULT = e; :}
;

expr ::=
  INT:n
    {: RESULT = new Ecst(n); :}
| expr:e1 MINUS expr:e2
    {: RESULT = new Esub(e1, e2); :}
| LPAR expr:e RPAR
    {: RESULT = e; :}
;
```

on compile le fichier `Parser.cup` avec

```
java -jar java-cup-11a.jar -parser Parser Parser.cup
```

ce qui provoque ici une erreur :

```
Warning : *** Shift/Reduce conflict found in state #6
  between expr ::= expr MINUS expr (*)
  and     expr ::= expr (*) MINUS expr
  under symbol MINUS
  Resolved in favor of shifting.

Error : *** More conflicts encountered than expected
         -- parser generation aborted
```

on y remédie en déclarant `MINUS` comme étant associatif à gauche

```
precedence left MINUS;
```

(ce qui favorisera la réduction)

s'il y a plusieurs opérateurs, on les énumère par ordre de priorité croissante

```
precedence left PLUS, MINUS;
precedence left TIMES, DIV, MOD;
```

maintenant la commande `CUP` termine avec succès et produit deux fichiers Java :

- `sym.java` contient la déclaration de constantes pour les lexèmes (`INT`, `LPAR`, `RPAR`, etc.)
- `Parser.java` contient l'analyseur syntaxique et fournit notamment un constructeur

```
Parser(Scanner scanner)
```

et une méthode

```
Symbol parse()
```

on combine les classes produites par `jflex` et `CUP` de la façon suivante

```
Reader reader = new FileReader(file);
Lexer lexer = new Lexer(reader);
Parser parser = new Parser(lexer);
Expr e = (Expr)parser.parse().value;
try {
  System.out.println(e.eval());
} catch (Error err) {
  System.out.println("error: " + err.toString());
  System.exit(1);
}
```

le programme doit utiliser la bibliothèque `java-cup-11a-runtime.jar`

l'outil Menhir (OCaml)

dans un fichier `parser.mly`, on commence par un entête où sont déclarés les symboles terminaux et non terminaux

```
%{
  (* code OCaml arbitraire *)
%}

%token MINUS LPAR RPAR EOF
%token <int> INT

%start <expr> file
```

...

(à la différence de `CUP`, il faut déclarer `EOF`)

on écrit ensuite les règles de grammaires et les actions

```
%%

file:
  e = expr; EOF  { e }
;

expr:
| e1 = expr; MINUS; e2 = expr { Sub (e1, e2) }
| LPAR; e = expr; RPAR        { e }
| i = INT                     { Cte i }
;

%%
```

(à la différence de `CUP`, il faut ajouter `EOF`)

on compile le fichier `arith.mly` de la manière suivante

```
menhir -v arith.mly
```

ce qui provoque ici un avertissement

```
Warning: one state has shift/reduce conflicts.
Warning: one shift/reduce conflict was arbitrarily resolved.
```

lorsque la grammaire n'est pas LR(1), Menhir présente les **conflits** à l'utilisateur

- le fichier `.automaton` contient une description de l'automate LR(1) ; les conflits y sont mentionnés
- le fichier `.conflicts` contient, le cas échéant, une explication de chaque conflit, sous la forme d'une séquence de lexèmes conduisant à deux arbres de dérivation

on y remédie en déclarant `MINUS` comme étant associatif à gauche

```
%left MINUS
```

(ce qui favorisera la réduction)

s'il y a plusieurs opérateurs, on les énumère par ordre de priorité croissante

```
%left PLUS MINUS
%left TIMES DIV MOD
```

maintenant la commande `menhir` termine avec succès et produit deux fichiers OCaml `arith.ml(i)` qui contiennent notamment

- la déclaration d'un type `token`

```
type token = RPAR | MINUS | LPAR | INT of int | EOF
```

- une fonction

```
val file: (Lexing.lexbuf -> token) -> Lexing.lexbuf -> int
```

on combine `ocamllex` et `menhir` de la façon suivante

```
let c  = open_in file in
let lb = Lexing.from_file c in
let e  = Parser.file Lexer.next_token lb in
...
```

la suite

- TD 3
  - analyse syntaxique de mini-Turtle
- lire les chapitres 3 et 4 du poly
- prochain cours
  - typage
  - TD : début du projet