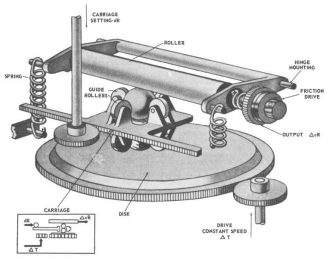
Cours 7: Compléments sur la calculabilité. Preuve du théorème d'incomplétude. Introduction à la complexité.



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr

Ecole Polytechnique
INF412

Quines

Proposition

Il existe une machine de Turing A^* qui écrit son propre programme : elle produit en sortie $\langle A^* \rangle$.

En shell SH par exemple, le programme suivant

```
z=\' a='z=\\$z a=$z$a$z\; eval echo \$a'; eval echo $a
```

produit

```
z=\' a='z=\\$z a=$z$a$z\; eval echo \$a'; eval echo $a
```


- Démonstration :
  - On considère des machines qui terminent sur toute entrée.
    - Pour deux telles machines A et A', on note AA' la machine qui est obtenue en composant de façon séquentielle A et A'.

$$AA' : \boxed{A}\boxed{A'}$$

  - On construit les machines suivantes :
    1. La machine $Print_w$ termine avec le résultat w.
    2. Pour une entrée w de la forme $w = \langle X \rangle$, où X est une machine de Turing, la machine B produit en sortie le codage de la machine $Print_w X$.

$$B : \langle X \rangle \mapsto \langle \boxed{Print_{\langle X \rangle}}\boxed{X} \rangle$$

  - On considère alors la machine A^* donnée par $Print_{\langle B \rangle} B$.

$$A^* : \boxed{Print_{\langle B \rangle}}\boxed{B}$$

  - Déroulons le résultat de cette machine : la machine $Print_{\langle B \rangle}$ produit en sortie $\langle B \rangle$. La composition par B produit alors le codage de $Print_{\langle B \rangle} B$, qui est bien le codage de la machine A^*.

Théorème de récursion

Théorème (Théorème de récursion)

Soit $t : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ une fonction calculable. Alors il existe une machine de Turing R qui calcule une fonction $r : \Sigma^* \to \Sigma^*$ telle que pour tout mot w

$$r(w) = t(\langle R \rangle, w).$$

Démonstration

- Comment l'utiliser ?
  - Pour obtenir une machine de Turing qui utilise sa propre description,
    - il suffit d'avoir une machine, que l'on appelle T, qui calcule la fonction t dans l'énoncé, qui prend comme entrée supplémentaire la description de la machine.
  - Le théorème produit une machine R qui fait exactement comme T, mais avec son propre codage $\langle R \rangle$ rempli automatiquement.

Exemple : Quines revisitées

- Pour obtenir SELF =
  - sur tout entrée w,
    - obtenir par le théorème de récursion sa propre description $\langle SELF \rangle$.
    - afficher $\langle SELF \rangle$.
- On prend T=
  - sur toute entrée $(\langle X \rangle, w)$
    - afficher $\langle X \rangle$.
- En résumé :
  - "obtenir par le théorème de récursion sa propre description" devient une instruction valide dans un algorithme.

- On peut interpréter les preuves des résultats précédents en lien avec les virus informatiques :
  - En effet, un virus est un programme qui vise à se diffuser, c'est-à-dire à s'autoreproduire, sans être détecté.
  - Le principe de la preuve du théorème de récursion est un moyen de s'autoreproduire, en dupliquant son code.

Exercice

Théorème (Du point fixe de Kleene)

Soit une fonction calculable qui à chaque mot $\langle A \rangle$ codant une machine de Turing associe un mot $\langle A' \rangle$ codant une machine de Turing. Notons $A' = f(A)$.
Alors il existe une machine de Turing A^* tel que $L(A^*) = L(f(A^*))$.

Démonstration

Le problème de l'arrêt généralisé

- Problème ∀HALTING-PROBLEM:

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M
Réponse: Décider si la machine M accepte tout mot w.

> Théorème
> *Le problème* ∀HALTING-PROBLEM *n'est pas décidable.*

  - Application du Théorème de Rice.

- En fait, il n'est pas récursivement énumérable, et ni son complémentaire !

- Problème $\overline{\mathrm{L_{univ}}}$:

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M et un mot w.
Réponse: Décider si la machine M n'accepte pas le mot w.

n'est pas récursivement énumérable.

- Pour montrer que ∀HALTING-PROBLEM n'est pas récursivement énumérable, il suffit de montrer que $\overline{\mathrm{L_{univ}}} \leq_m$ ∀HALTING-PROBLEM.
  - En effet, $\overline{\mathrm{L_{univ}}}$ n'est pas récursivement énumérable ;
  - Et si $A \leq_m B$ et si A n'est pas récursivement énumérable, alors B non plus.

- $\overline{\mathrm{L_{univ}}} \leq_m$ ∀HALTING-PROBLEM :
  - A partir du codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing, et de w, on peut considérer la machine A_M qui sur l'entrée u
    - exécute M sur w pendant $|u|$ étapes.
    - si cette simulation atteint un état final acceptant, boucle ensuite indéfiniment.
    - sinon, soit la simulation a atteint un état final refusant, soit elle n'a pas terminé en $|u|$ étapes, et alors A_M termine en acceptant.
- $(\langle M \rangle, w) \in \overline{\mathrm{L_{univ}}}$ si et seulement si $\langle A_M \rangle \in$ ∀HALTING-PROBLEM
- La fonction qui à $(\langle M \rangle, w)$ associe $\langle A_M \rangle$ est bien calculable.

- Pour montrer que son complementaire $\overline{\text{∀HALTING-PROBLEM}}$ n'est pas récursivement énumérable, il suffit de montrer de façon similaire que $\overline{\mathrm{L_{univ}}} \leq_m \overline{\text{∀HALTING-PROBLEM}}$.
  - A partir du codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing, et de w, on peut considérer la machine A_M qui ignore son entrée et exécute M sur le mot w.
- $(\langle M \rangle, w) \in \overline{\mathrm{L_{univ}}}$ si et seulement si $\langle A_M \rangle \in \overline{\text{∀HALTING-PROBLEM}}$
- La fonction qui à $(\langle M \rangle, w)$ associe $\langle A_M \rangle$ est bien calculable.

- On note $Th(\mathbb{N})$ l'ensemble des formules closes F qui sont vraies sur les entiers.

Théorème (Incomplétude)

Il existe des formules closes de $Th(\mathbb{N})$ qui ne sont pas prouvables, à partir des axiomes de Peano, ou de toute axiomatisation "raisonnable"[1] des entiers.

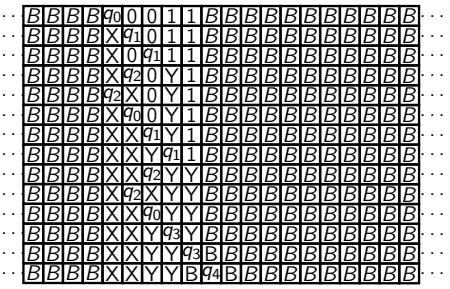
Théorème (Second théorème d'incomplétude)

La cohérence de l'arithmétique (ou sa négation) est un exemple de telle formule.

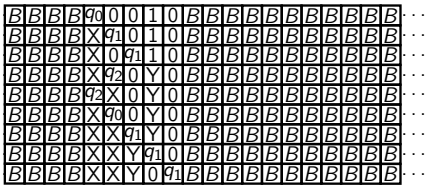
1. Formellement, "récursivement énumérable" : voir suite du cours.

Diagramme Espace-temps

- On représente souvent une suite de configurations d'une machine de Turing ligne par ligne : la ligne numéro i représente la $i$ème configuration du calcul (en utilisant la notation 2 pour les configurations).
- Exemple : Diagramme espace-temps du calcul sur 0011.



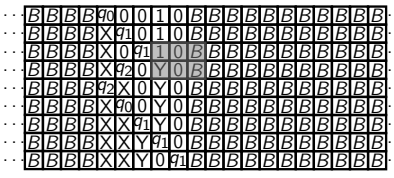
- Exemple : Diagramme espace-temps du calcul sur 0010 :



  - sur la dernière configuration plus aucune évolution n'est possible, et donc il n'y a pas de calcul acceptant partant de 0010.

Diagramme espace-temps

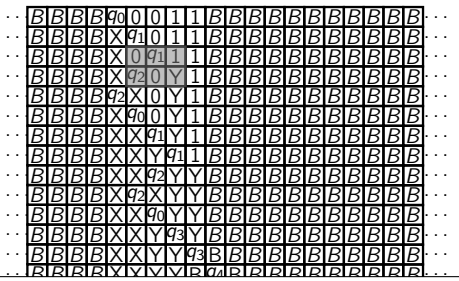
- Considérons
  - un diagramme espace-temps d'une machine de Turing M.
  - et un sous-rectangle 3×2 dans ce diagramme, que l'on appelera **fenêtre**.
- Exemple :
  - Diagramme espace-temps du calcul sur 0010 de la machine reconnaissant 0^n1^n, $n \in \mathbb{N}$:



  - Fenêtre correspondante :

Fixons la machine M

- Propriétés :
  - il y a un nombre fini de contenus possibles, que l'on peut appeler **légaux**.
  - cela fournit même une caractérisation des diagrammes espace-temps de M :
    - un tableau est un diagramme espace-temps de M sur une certaine configuration initiale C_0 ssi d'une part sa première ligne correspond à C_0, et d'autre part le contenu de tous les sous-rectangles 3×2 est parmi les fenêtres légales.



- Quelques fenêtres **légales** pour une machine M :

(a)
a	q_1	b
q_2	a	c

(b)
a	q_1	b
a	a	q_2

(c)
a	a	q_1
a	a	b

(d)
B	b	a
B	b	a

(e)
a	b	a
a	b	q_2

(f)
b	b	b
c	b	b

- Quelques fenêtres non-légales pour une machine M avec $\delta(q_1, b) = (q_1, c, \leftarrow)$:

(a)
a	b	a
a	a	a

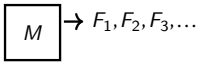
(b)
a	q_1	b
q_1	a	a

(c)
b	q_1	b
q_2	b	q_2

Prouver le premier théorème

- Il suffit de prouver en fait que :
  1. L'ensemble des formules closes prouvables à partir des axiomes de Peano (ou de toute axiomatisation récursivement énumérable des entiers) est récursivement énumérable.
  2. L'ensemble $Th(\mathbb{N})$ des formules closes F vraies sur les entiers n'est pas récursivement énumérable.
- Par conséquent, les deux ensembles ne peuvent pas être les mêmes :
  - il y a donc des formules closes de $Th(\mathbb{N})$ qui ne sont pas prouvables.

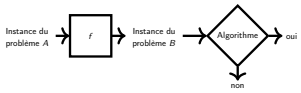
Etape 1 : l'ensemble des formules closes prouvables est récursivement énumérable



- Facile à établir :
  - on peut énumérer les formules closes prouvables :
    - il suffit d'énumérer les axiomes et d'appliquer systématiquement toutes les règles de déduction dans toutes les façons possibles : on produit en sortie chaque formule close que l'on arrive à dériver.
  - Cela reste vrai en fait dès que l'on suppose que l'on peut énumérer les formules de l'axiomatisation dont on part.

Etape 2 : $Th(\mathbb{N})$ n'est pas récursivement énumérable.

- Il suffit de montrer que $\overline{L_{univ}} \leq_m Th(\mathbb{N})$.
  - En effet, $\overline{L_{univ}}$ n'est pas récursivement énumérable ;
  - Et si $A \leq_m B$ et si A n'est pas récursivement énumérable, alors B non plus.



- Autrement dit,
  - Étant donné $(\langle M \rangle, w)$, produire effectivement une formule close $\gamma_{M,w}$ telle que

$$(\langle M \rangle, w) \in \overline{L_{univ}} \Leftrightarrow \gamma_{M,w} \in Th(\mathbb{N}).$$

  - il suffit que cette formule close $\gamma_{M,w}$ exprime le fait que M n'accepte pas le mot w.

Quelques formules de l'arithmétique

- Exprimer quelques faits élémentaires...
  - INTDIV(x,y,q,r) : "q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de x par y" :

$$(x = q * y + r \wedge r < y).$$

  - DIV(y,x) : "y divise x" :

$$\exists q \ \text{INTDIV}(x,y,q,0).$$

  - EVEN(x) : "x est pair" : DIV$(2,x)$.
  - ODD(x) : "x est impair" : $\neg$EVEN(x).
  - PRIME(x) : "x est premier" :

$$(x \geq 2 \wedge \forall y(\text{DIV}(y,x) \Rightarrow (y = 1 \vee y = x))).$$

  - POWER$_p(x)$: "Le nombre x est une puissance de p" (p nombre premier fixé) :

$$\forall y((\text{DIV}(y,x) \wedge \text{PRIME}(y)) \Rightarrow y = p).$$

Quelques formules de l'arithmétique

- Un mot $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ sur l'alphabet $\Sigma = \{0,1,\cdots,p-1\}$ peut toujours être vu comme l'entier

$$v = a_1 + a_2 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-2} + a_n p^{n-1}.$$

- Exprimer quelques faits sur un mot :
  - LENGTH$_p(v,d)$: "Le nombre d est une puissance de p qui donne la longueur de v vu comme un mot sur l'alphabet Σ à p lettres" :

$$(\text{POWER}_p(d) \wedge v < d \wedge p * v \geq d).$$

  - DIGIT$_p(v,K,b)$: "Le '$k$ème' chiffre de v écrit en base p est b (où $K = p^k$)" :

$$\exists u \exists a (v = a + b * K + u * p * K \wedge a < K \wedge b < p).$$

  - 3DIGIT$_p(v,K,b,c,d)$: "Les 3 chiffres consécutifs de v à la position k sont b, c et d (où $K = p^k$)" :

$$\exists u \exists a (v = a + b * K + c * p * K + d * p * p * K + u * p * p * p * K$$
$$\wedge a < K \wedge b < p \wedge c < p \wedge d < p).$$

Quelques formules de l'arithmétique

- Exprimer le diagramme espace temps d'une machine :
  - MATCH$_p(v,L,M)$: "Les 3 chiffres de v à la position ℓ sont a, b et c et correspondent aux 3 chiffres de v à la position m selon la fonction de transition δ de la machine de Turing (où $L = p^\ell$ et $M = p^m$)" :

$$\bigwedge_{(a,b,c,d,e,f) \in \text{LEGAL}} 3\text{DIGIT}_p(v,L,a,b,c) \wedge 3\text{DIGIT}_p(v,M,d,e,f).$$

    - $(a,b,c,d,e,f) \in$ LEGAL désigne le fait que

a	b	c
d	e	f

    est une fenêtre légale.
    - On note évidemment ici, $\bigwedge_{(a,b,c,d,e,f) \in \text{LEGAL}}$ pour la conjonction pour chacun des 6-uplets de LEGAL.

- Exprimer le diagramme espace temps d'une machine (suite) :
  - $\mathrm{MOVE}_p(v, C, D)$: "la suite v décrit[2] une suite de configurations successives de M de longueur c jusqu'à d (où $C = p^c$ et $D = p^d$) : toutes les paires de suites de 3-chiffres exactement écartées de c positions dans v se correspondent selon δ" :

$$\forall y((\mathrm{POWER}_p(y) \wedge y * p * p * C < D) \Rightarrow \mathrm{MATCH}_p(v, y, y * C)).$$

2. On voit un tableau à deux dimensions comme un unique mot en mettant les lignes bout à bout.

- Exprimer le diagramme espace temps d'une machine (suite) :
  - $\mathrm{START}_p(v, C)$: "la suite v débute avec la configuration initiale de M sur l'entrée $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ auxquelles on a ajouté des blancs B jusqu'à la longueur c ($C = p^c$; $n, p^i, 0 \leq i \leq n$ sont des constantes fixées qui ne dépendent que de w)" :

$$\bigwedge_{i=0}^{n} \mathrm{DIGIT}_p(v, p^i, a_i) \wedge p^n < C$$

$$\wedge \forall y(\mathrm{POWER}_p(y) \wedge p^n < y < C \Rightarrow \mathrm{DIGIT}_p(v, y, B)).$$

  - $\mathrm{HALT}_p(v, D)$: "La suite v possède un état d'acceptation quelque part" :

$$\exists y(\mathrm{POWER}_p(y) \wedge y < D \wedge \mathrm{DIGIT}_p(v, y, q_a)).$$

  - $\mathrm{VALCOMP}_{M,w}(v)$: "La suite v est un calcul de M valide sur w" :

$$\exists c \exists d \quad (\mathrm{POWER}_p(c) \wedge c < d \wedge \mathrm{LENGTH}_p(v, d)$$
$$\wedge \mathrm{START}_p(v, c) \wedge \mathrm{MOVE}_p(v, c, d) \wedge \mathrm{HALT}_p(v, d)).$$

- $\gamma_{M,w}$: "La machine M n'accepte pas w" :

$$\neg \exists v \ \mathrm{VALCOMP}_{M,w}(v).$$

- La fonction $f : (\langle M \rangle, w) \mapsto \gamma_{M,w}$ est bien calculable, car on peut bien produire $\gamma_{M,w}$ à partir de M et w par un algorithme.
- Ce qui termine la preuve.

Remarque importante

- On vient de prouver : $Th(\mathbb{N})$ n'est pas récursivement énumérable.

Théorème
$Th(\mathbb{N})$ n'est donc pas décidable !

- Retour aux épisodes précédents : "Entscheidungsproblem" :

Peut-on décider mécaniquement
si un énoncé est démontrable ou non ?

  - La réponse est : NON !

Exercice : Donner explicitement une formule ψ qui n'est pas prouvable.

- Soit S la machine de Turing qui fait les choses suivantes :
  - sur toute entrée w
    - obtenir par le théorème de récursion sa propre description $\langle S \rangle$.
    - construire la formule $\psi = \gamma_{S,\epsilon}$.
    - énumérer les formules prouvables tant que l'on a pas produit $\gamma_{S,\epsilon}$.
    - si l'étape d'avant finit par terminer, alors accepter.
- La formule $\psi = \gamma_{S,\epsilon}$ de la deuxième étape n'est pas prouvable :
  - ψ est vraie ssi S n'accepte pas le mot vide.
  - Si S trouve une preuve de ψ, alors S accepte le mot vide, et donc la formule ψ est fausse.
    - (si l'arithmétique est cohérente) on ne peut pas prouver de formule fausse.
    - ce cas ne peut donc pas se produire.
  - Si S ne trouve pas une preuve de ψ, alors S n'accepte pas le mot vide :
    - et donc ψ est vraie sans être prouvable ! !
- Bref : ψ est vraie mais non-prouvable.

- Le problème *MAX*.
  - On se donne une liste d'entiers naturels $e_1, e_2, \cdots, e_n$.
  - On veut calculer $\max\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.
- Le problème *TRI*.
  - On se donne une liste d'entiers naturels $e_1, e_2, \cdots, e_n$.
  - On veut les trier.

Une solution pour *MAX*

```
int [] T= new int[100];
int r = max(T);
```

```
int max(int [] T) {
 int max = T[1];
 for (int j=2; j≤ T.length; j++) {
      if (T[j] > max)
        max = T[j];}
 return max;
}
```

- Nombre de comparaisons (hors variable de boucle) $C(n) = n - 1$.
- Nombre d'affectations (hors variable de boucle) $1 \leq B(n) \leq n$.

n = longueur de la liste.

Complexité d'un problème, d'un algorithme

- On fixe une mesure élémentaire :
  - nombre de comparaisons,
  - nombre d'affectations,
  - mémoire utilisée,
  - temps utilisé,
  - ...
- Cette mesure associe à un algorithme $\mathscr{A}$ et une entrée d une valeur

$$Complexite(\mathscr{A}, d).$$

- On cherche souvent à évaluer cette complexité en fonction d'un paramètre naturel $n = taille(d)$, représentatif des entrées.
- Exemple :
  - $\mathscr{A}$: l'algorithme itératif pour *MAX* précédent.
  - d : une liste donnée en entrée.
  - $n = taille(d)$, le nombre d'éléments dans la liste.
  - $Complexite(\mathscr{A}, d)$, le nombre de comparaisons de $\mathscr{A}$ sur d.

- On peut alors parler de la complexité (au pire cas)
  - d'un algorithme (on fait varier seulement les entrées)

$$Complexite_{\mathscr{A}}(n) = \max_{d/taille(d)=n} Complexite(\mathscr{A}, d).$$

  - d'un problème (on fait varier l'algorithme, et les entrées)

$$\inf_{\mathscr{A} \text{ correct}} Complexite_{\mathscr{A}}.$$

- On arrive parfois à parler de la complexité exacte.
- Il est souvent pertinent de se limiter à une étude asymptotique, ou à des bornes asymptotiques.
- Les bornes asymptotiques permettent de capturer l'essentiel de la complexité dans bon nombre de cas et de comparer simplement les algorithmes.

Exemple d'étude exacte

- Etude du problème *MAX* en nombre de comparaisons :
  - Le problème *MAX* admet une solution avec $n-1$ comparaisons.

```
int max(int [] T) {
 int max = T[1];
 for (int j=2; j≤ T.length; j++) {
      if (T[j] > max)
        max = T[j];}
 return max;
}
```

  - Cet algorithme est optimal en nombre de comparaisons (parmi ceux qui fonctionnent avec affectations et comparaisons).

Preuve

Proposition

Dans tout algorithme, tout élément autre que le maximum doit être comparé au moins une fois avec un élément qui lui est plus grand.

- Preuve :
  - soit i_0 le rang du maximum M retourné par l'algorithme sur une liste $L = e_1.e_2.\cdots.e_n$.
  - Par l'absurde : soit $j_0 \neq i_0$ tel que e_{j_0} n'est pas comparé avec un élément plus grand que lui.
  - e_{j_0} n'a donc pas été comparé avec e_{i_0} le maximum
  - Considérer la liste $L' = e_1.e_2.\cdots.e_{j_0-1}.M+1.e_{j_0+1}.\cdots.e_n$ obtenue à partir de L en remplaçant l'élément d'indice j_0 par $M+1$.
  - L'algorithme effectue exactement les mêmes comparaisons sur L et L', sans comparer $L'[j_0]$ avec $L'[i_0]$ et donc retournera $L'[i_0]$, ce qui est incorrect.
- Conséquence : il faut au moins $n-1$ comparaisons pour résoudre *MAX*.

Notation de Landau (Pire Cas)

- Notation de Landau :
  - $f(n) = O(g(n))$ si et seulement si il existe deux constantes positives n_0 et B telles que

$$\forall n \geq n_0, |f(n)| \leq Bg(n)$$

    Ce qui signifie que f ne croît pas plus vite que g.

- Exemple :
  - Le problème *MAX* admet une solution itérative en $O(n)$ affectations.
  - L'algorithme itératif précédent fonctionne en $O(n)$ affectations.
- Un algorithme
  - en temps $O(1)$ effectue un nombre constant d'opérations.
  - en temps $O(n)$ est un algorithme (au pire) linéaire.
  - en temps $O(n^k)$ est un algorithme (au pire) polynomial.

Notation de Landau

- Notation de Landau (suite)
  - $f(n) = \Omega(g(n))$ si et seulement si il existe deux constantes positives n_0 et $B \neq 0$ telles que
    $$\forall n \geq n_0, |f(n)| \geq Bg(n)$$
  - $f(n) = \Theta(g(n))$ si et seulement si il existe trois constantes positives n_0, $B \neq 0$ et C telles que
    $$\forall n \geq n_0, Bg(n) \leq |f(n)| \leq Cg(n)$$
- Exemple :
  - Le problème *MAX* nécessite $\Theta(n)$ comparaisons.
  - (à venir) Trier nécessite $\Omega(n \log n)$ comparaisons.

Complexité d'un algorithme en moyenne

- Si on fixe une distribution π sur les entrées d, il est parfois possible d'évaluer la complexité en moyenne d'un algorithme :
  $$Complexite-Moyenne_{\mathscr{A}}(n) = \sum_{d/taille(d)=n} \pi(d) Complexite(\mathscr{A}, d)$$
- Exemple : pour l'algorithme $\mathscr{A}$ suivant.

```
static boolean Dans(int[] T,x) {
for (int j=1; j≤ T.length; j++) {
      if (T[j] == x) return true}
return false; }
```

Nombre de comparaisons (entre entiers) : k, où k est le rang de l'élément lorsqu'il est dans la liste, n sinon.

- Si on suppose que les entrées sont les listes permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$, et qu'elles sont équiprobables,
  $$\begin{aligned} Complexite-Moyenne_{\mathscr{A}}(n) &= Esperance_{d/taille(d)=n}[k] \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \times Proba(k=i) \end{aligned}$$
  Puisque les permutations sont équiprobables, $Proba(k=i) = 1/n$.
  $$\begin{aligned} Complexite-Moyenne_{\mathscr{A}}(n) &= \sum_{i=1}^{n} i \frac{1}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2n} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$
- (poly inf421) D'autres exemples plus compliqués.
- (joli exercice) Pour $\mathscr{A}$ algorithme itératif précédent pour *MAX*, $Complexite-Moyenne_{\mathscr{A}}(n)$ en affectations entre variables entières est en $\Theta(\log n)$ (de l'ordre de $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$).

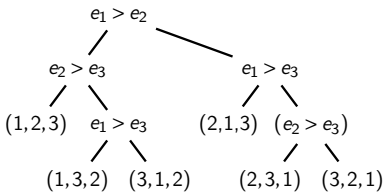
Complexité du problème du tri

- Tout algorithme de tri
  - qui fonctionne par comparaisons,
  - qui n'a pas d'autres informations sur les données,

  effectue $\Omega(n \log n)$ comparaisons dans le pire des cas.
- Autrement dit, la complexité du problème du tri (avec ces hypothèses) est en $\Theta(n \log n)$.
- Le tri par fusion est parmi les tris optimaux en $O(n \log n)$.

Preuve de la borne inférieure $\Omega(n \log n)$: 1/2

- A un algorithme on peut associer un arbre de décision :



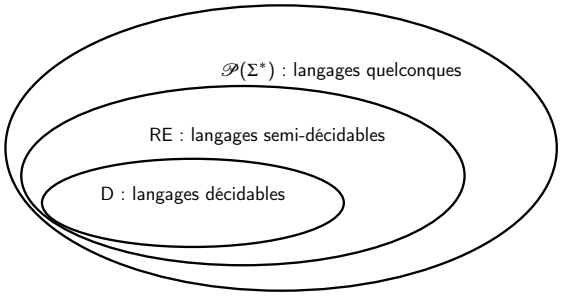
  - En chaque noeud qui n'est pas une feuille : une comparaison effectuée par l'algorithme.
    - La racine est la première comparaison.
    - Fils gauche : récursivement ce qui se passe alors pour un résultat positif.
    - Fils droit : récursivement ce qui se passe alors pour un résultat négatif.
  - En chaque feuille, le résultat produit.

Preuve de la borne inférieure $\Omega(n \log n)$: 2/2

- Un arbre binaire de hauteur h a au plus 2^h feuilles.
  - par récurrence.
- Les feuilles doivent contenir au moins les $n!$ permutations, et donc $h \geq \log(n!) = \Omega(n \log n)$ par la formule de Stirling.

La suite de ce cours

- On souhaite parler d'une ressource particulière : le **temps de calcul**.
- Objectif :
  - distinguer ce qui est raisonnable de ce qui n'est pas raisonnable en termes de temps de calcul.



ANNEXES

Preuve du théorème de récursion

- Soit T une machine de Turing calculant la fonction t : T prend en entrée une paire (u, w) et produit en sortie un mot $t(u, w)$.
- On considère les machines suivantes :
  1. Étant donné un mot w, la machine $Print_w$ prend en entrée un mot u et termine avec le résultat (w, u).
  2. Pour une entrée w' de la forme $(\langle X \rangle, w)$, la machine B
     - 2.1 calcule $(\langle Print_{\langle X \rangle} X \rangle, w)$, où $Print_{\langle X \rangle} X$ désigne la machine qui compose $Print_{\langle X \rangle}$ avec X,
     - 2.2 puis passe le contrôle à la machine T.
- On considère alors la machine R donnée par $Print_{\langle B \rangle} B$.
- Déroulons le résultat $r(w)$ de cette machine R sur une entrée w :
  - la machine $Print_{\langle B \rangle}$ produit en sortie $(\langle B \rangle, w)$.
  - La composition par B produit alors le codage de $(\langle Print_{\langle B \rangle} B \rangle, w)$, et passe le contrôle à T.
  - Ce dernier produit alors $t(\langle Print_{\langle B \rangle} B \rangle, w) = t(\langle R \rangle, w) = r(w)$.

Retour

Preuve du théorème du point fixe de Kleene

- Considérons une fonction $t : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ telle que $t(\langle A \rangle, x)$ soit le résultat de la simulation de la machine $f(A)$ sur l'entrée x.
- Par le théorème précédent, il existe une machine R qui calcule une fonction r telle que $r(w) = t(\langle R \rangle, w)$.
- Par construction $A^* = R$ et $f(A^*) = f(R)$ ont donc même valeur sur w pour tout w.

Retour

Pourquoi trier ?

- Trier est une opération naturelle.
- Travailler sur des données triées est parfois plus efficace.
  - Exemple :
    - Rechercher un élément dans un tableau à n éléments : $O(n)$ (utiliser le principe de la fonction *Dans* précédente sur les listes).
    - Rechercher un élément dans un tableau trié à n éléments : $O(\log n)$ (par dichotomie).
    - Trier devient intéressant dès que le nombre de recherches est en $\Omega(Complexite(tri)/n)$.

Recherche par dichotomie

```
static boolean trouve(int[] T, int v, int min, int max){
    if(min ≥ max) // vide
        return false;
    int mid = (min + max) / 2;
    if (T[mid] == v) return true;
    else if (T[mid] > v) return trouve(T, v, min, mid);
    else return trouve(T, v, mid + 1, max);
}
```

Nombre de comparaisons

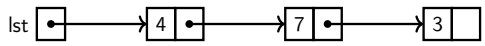
- $C(1) = 2$,
- $C(n) \leq 2 + C(n/2)$, pour n pair,
- $C(n) \leq 2 \log n + 2$, pour n puissance de 2.

$$C(n) = O(\log n),$$

dans le cas général.

```
class Liste {
  int contenu;
  Liste suivant;
  Liste (int x, Liste a) {
    contenu = x;
    suivant = a;
  }}
```

```
Liste lst = new Liste(4, new Liste (7, new Liste (3, null)));
```



Trier par insertion

- Méthode souvent utilisée pour trier un jeu de cartes.
- Etape préliminaire : savoir insérer un élément x dans une liste triée $e_1.e_2.\cdots.e_n$, avec $e_i \leq e_{i+1}$.
  - Equations récursives :

$$\begin{array}{lcll} \mathit{Insere}(x,\emptyset) & = & (x,\emptyset) & \\ \mathit{Insere}(x,(a,L)) & = & (x,(a,L)) & \text{si } x \leq a \\ \mathit{Insere}(x,(a,L)) & = & (a,\mathit{Insere}(x,L)) & \text{sinon} \end{array}$$

  - Correction : par induction, si on suppose (a,L) triée, le résultat est bien trié.

```
static Liste Insere(int x, Liste a) {
  if (a==null) return new Liste(x,null);
  if (x ≤ a.contenu) return new Liste(x,a);
  return new Liste(a.contenu,Insere(x,a.suivant));
}
```

Tri par insertion

```
static Liste Trie(Liste p) {
  Liste r = null;
  for (; p ! = null; p = p.suivant)
    r = Insere(p.contenu,r);
  return r;}
```

- Complexité $I(n)$ de `Insere` en comparaisons : $I(n) = O(n)$.
- Complexité $C(n)$ de `Trie` en comparaisons : $C(n) \leq nI(n) = O(n^2)$.
- Le pire cas est atteint lorsqu'on trie une liste déjà triée, et mène à $\Omega(n^2)$ comparaisons. La complexité du tri par insertion est donc bien en $\Theta(n^2)$.

Tri par fusion

- Fusion :
  - Construire une liste triée qui contienne l'union des éléments de deux listes triées.
- Exemple : $\mathit{Fusion}(1.4.5.7, 2.4.9) = 1.2.4.4.5.7.9$
- Equations récursives de $\mathit{Fusion}(X,Y)$:

$$\begin{array}{lcll} \mathit{Fusion}(X,\emptyset) & = & X & \\ \mathit{Fusion}(\emptyset,Y) & = & Y & \\ \mathit{Fusion}((a,L),(b,M)) & = & (a,\mathit{Fusion}(L,(b,M))) & \text{si } a \leq b \\ \mathit{Fusion}((a,L),(b,M)) & = & (b,\mathit{Fusion}((a,L),M)) & \text{sinon} \end{array}$$

- Correction : par induction, si on suppose (a,L) et (b,M) triées, le résultat est correct.

Fusion

```
static Liste Fusion(Liste a, Liste b) {
  if (a == null)
    return b;
  if (b == null)
    return a;
  if (a.contenu < b.contenu)
    return new Liste(a.contenu, Fusion(a.suivant, b));
  else
    return new Liste(b.contenu, Fusion(a, b.suivant));
}
```

- Complexité en nombre de comparaisons : $O(longueur(a) + longueur(b))$.

Tri fusion

- Une liste de 0 ou 1 élément est triée.
- Toute autre liste L
  - peut se découper en deux sous-listes L_1 et L_2 de même taille (à 1 près).
  - Les sous-listes L_1 et L_2 sont triées récursivement,
  - puis fusionnées.

$$TriFusion(L) = Fusion(TriFusion(L_1), TriFusion(L_2)).$$

Paradigme "Diviser pour régner"

- Supposons n puissance de 2.
- Complexité $C(n)$ en nombre de comparaisons en $O(Fusion) + 2C(n/2)$, soit

$$C(n) \leq Kn + 2C(n/2)$$

pour une constante K, ce qui mène à

$$C(n) \leq O(n \log n).$$

- Note :
  - comment résoudre une telle récurrence : poser $n = 2^p$ et faire le changement de variable $C'(p) = C(2^p)$.
  - $C'(p) \leq K2^p + 2C'(p-1)$,
  - donc $C'(p) \leq O(2^p p)$.

Tri fusion

```
static Liste MergeSort(Liste l) {
  Liste l1 = null,l2 = null;
  boolean even = true ;
  for ( ; l ≠ null ; l = l.suivant ) {
    if (even) {
      l1 = new Liste (l.contenu, l1) ;
    } else {
      l2 = new Liste (l.contenu, l2) ;
    }
    even = !even ;
  }
  if (l2==null) return l1;
  return Fusion(MergeSort(l1),MergeSort(l2));
  }
```

- Note : `L1` et `L2` sont en fait ici dans l'ordre inverse des éléments pairs et impairs, par commodité.
- Note : le tri fusion fait *toujours* de l'ordre de $n \log n$ comparaisons, et pas seulement au pire cas.