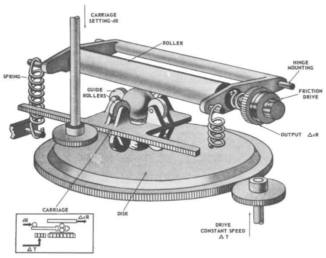
Cours 6: Calculabilité.



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr

Ecole Polytechnique
INF412

Rappel

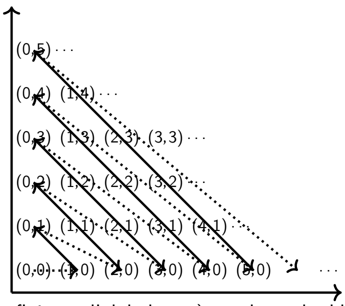
- Demain, Mercredi 27 Septembre. PC Notée
  - 8h07-10h07 : groupes 8h00.
  - 10h08-12h08 : groupes 10h15.
- Salle habituelles
- Tous les documents sont autorisés.
- Programme : logique, calculabilité = INF412 jusqu'à aujourd'hui.

Conséquence

- On a établi : Il existe des problèmes de décision qui ne sont pas décidables.
  - Une preuve plus simple ?

Ensembles dénombrables

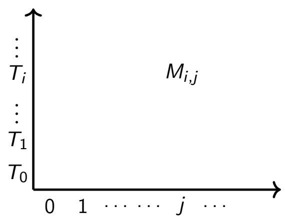
- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable :



- Σ^* (les mots finis sur l'alphabet Σ) est dénombrable, lorsque Σ est dénombrable :
  - par exemple, on peut coder une suite finie $u_0 u_1 u_2 \dots$ par $2^{u_0} 3^{u_1} 5^{u_2} \dots$.
- $\mathbb{N} \times \Sigma^*$ est dénombrable.

Ensembles non-dénombrables : argument de Cantor

- $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.



$M_{i,j} = 1$ si $i \in T_j$, 0 sinon.

- Par l'absurde, si $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{T_0, T_1, T_2, \cdots, \}$, on pourrait considérer $T^* = \{j | M_{j,j} = 0\}$.
- Cette partie de $\mathbb{N}$ n'est pas dans l'énumération, car sinon elle devrait avoir un numéro j_0 :
  - si $j_0 \in T^*$, alors on devrait avoir $M_{j_0,j_0} = 1$ par définition de M, et $M_{j_0,j_0} = 0$ par définition de T^* : impossible.
  - Si $j_0 \not\in T^*$, alors on devrait avoir $M_{j_0,j_0} = 0$ par définition de M, et $M_{j_0,j_0} = 1$ par définition de T^* : impossible.

- L'ensemble des langages sur un alphabet Σ^* n'est pas dénombrable, même si Σ est fini.

Conséquence

Corollaire
Il existe des problèmes de décision qui ne sont pas décidables.

- Preuve : Il y a un nombre non dénombrable de problèmes de décision, et un nombre dénombrable de machines de Turing.
- C'est grave ?

Le langage universel

- On appelle **langage universel**, le problème de décision suivant :
  - Problème $\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}$:

Donnée: • Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M
• et un mot w.
Réponse: Décider si la machine M accepte le mot w.

Théorème
Le problème $\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}$ n'est pas décidable.

- Démonstration :
  - Par l'absurde : si $\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}$ est décidé par une machine de Turing A, on peut alors construire une machine de Turing B qui fonctionne de la façon suivante :
    - B prend en entrée un mot $\langle C \rangle$ codant une machine de Turing C ;
    - B appelle la machine de Turing A sur la paire $(\langle C \rangle, \langle C \rangle)$ (c'est-à-dire sur l'entrée constituée du codage de la machine de Turing C, et du mot w correspondant aussi à ce même codage) ;
    - Si la machine de Turing A accepte ce mot, B refuse.
    - Si la machine de Turing A refuse ce mot, B accepte.
  - Appliquons la machine de Turing B sur le mot $\langle B \rangle$, c'est-à-dire sur le mot codant la machine de Turing B :
    - Si B accepte le mot $\langle B \rangle$, cela signifie, par définition de $\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}$ et de A, que A accepte $(\langle B \rangle, \langle B \rangle)$. Mais si A accepte ce mot, B est construit pour refuser son entrée $\langle B \rangle$. Contradiction.
    - Si B refuse le mot $\langle B \rangle$, cela signifie, par définition de $\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}$ et de A, que A refuse $(\langle B \rangle, \langle B \rangle)$. Mais si A refuse ce mot, B est construit pour accepter son entrée $\langle B \rangle$. Contradiction.

Problèmes semi-décidables

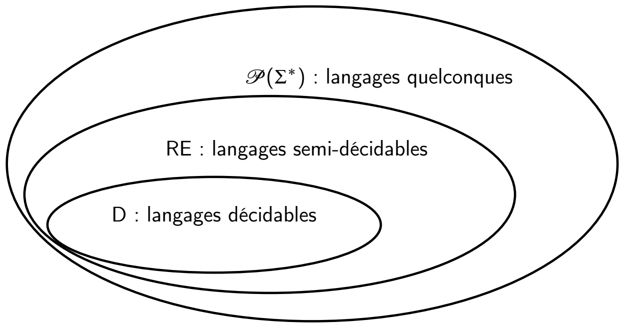
Théorème

Le problème $\mathrm{L_{univ}}$ *est toutefois semi-décidable :*

- Un langage $L \subset \Sigma^*$ est dit **semi-décidable** (ou encore **récursivement énumérable**) s'il correspond à l'ensemble des mots acceptés par une machine de Turing.
- On note RE la classe des langages et des problèmes semi-décidables.

- Preuve :
  - Sur l'entrée $(\langle M \rangle, w)$, il suffit de simuler la machine de Turing M sur l'entrée w.
    - On arrête la simulation et on accepte si l'on détecte dans cette simulation que la machine de Turing M atteint son état d'acceptation.
    - Sinon, on simule M pour toujours.

Le paysage de la calculabilité



$$\mathrm{D} \subsetneq \mathrm{RE} \subsetneq \mathscr{P}(\Sigma^*).$$

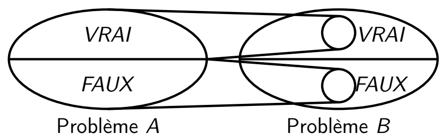
$$\mathrm{L_{univ}} \in \mathrm{RE} \setminus \mathrm{D}.$$

- Nous connaissons un langage indécidable :
  - $\mathrm{L_{univ}}$.
- Notre but est maintenant d'en obtenir d'autres, et de savoir comparer les problèmes.
- Nous introduisons pour cela la notion de **réduction**.

La notion de réduction

- Soient A et B deux problèmes d'alphabets respectifs M_A et M_B. Une **réduction de** A **vers** B est une fonction $f : M_A^* \to M_B^*$ calculable telle que

$$w \in A \text{ ssi } f(w) \in B.$$



- On note $A \leq_m B$ lorsque A se réduit à B.
  - intuitivement : $A \leq_m B$ signifie que A est plus facile que B.

Principales propriétés

Théorème
$\leq_m$ est un préordre (= est reflexive, transitive) :
1. $L \leq_m L$;
2. $L_1 \leq_m L_2$, $L_2 \leq_m L_3$ *impliquent* $L_1 \leq_m L_3$.

- intuitivement : un problème est aussi facile (et difficile) que lui-même, et la relation "être plus facile que" est transitive.

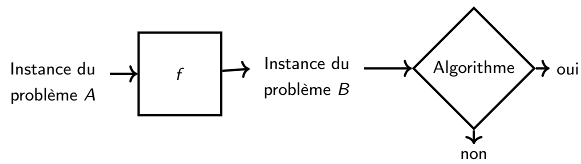
Théorème
Si $A \leq_m B$, et si B est décidable alors A est décidable

- intuitivement : si un problème est plus facile qu'un problème décidable, alors il est décidable.

Théorème
Si $A \leq_m B$, et si A est indécidable, alors B est indécidable.

- intuitivement : si un problème est plus difficile qu'un problème indécidable, alors il est indécidable.

- Preuve du premier théorème :
  - Considérer la fonction identité pour f pour le premier point. Pour le second point, supposons $L_1 \leq_m L_2$ via la réduction f, et $L_2 \leq_m L_3$ via la réduction g. On a $x \in L_1$ ssi $g(f(x)) \in L_2$. La composée de deux fonctions calculables est calculable.
- Preuve du second théorème :
  - A est décidé par la machine de Turing qui, sur une entrée w, calcule $f(w)$, puis simule la machine de Turing qui décide B sur l'entrée $f(w)$. Puisqu'on a $w \in A$ si et seulement si $f(w) \in B$, la machine de Turing est correcte.



- Le troisième théorème est la contraposée du second.

- Cette idée permet d'obtenir immédiatement la preuve de l'indécidabilité de plein d'autres problèmes.
- Stratégie :
  - pour prouver que B est indécidable, on prouve que $A \leq_m B$ pour un certain problème A déjà connu comme indécidable.

Exemple 1 : Le problème de l'arrêt des machines de Turing

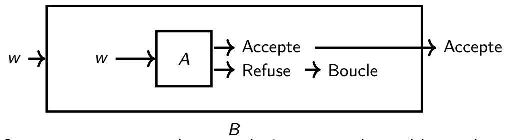
Il n'est pas possible de déterminer algorithmiquement si une machine de Turing s'arrête.

- Problème HALTING-PROBLEM:

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M et une entrée w.
Réponse: Décider si M s'arrête sur l'entrée w.

Proposition Le problème HALTING-PROBLEM est indécidable.

Preuve : $\mathrm{L_{univ}} \leq_m \mathit{HaltingProblem}$



- On construit une réduction de $\mathrm{L_{univ}}$ vers le problème de l'arrêt : Pour chaque couple $(\langle A \rangle, w)$, on considère la machine de Turing B définie de la façon suivante :
  - B prend en entrée un mot w ;
  - B simule A sur w ;
  - Si A accepte w, alors B accepte. S A rejette w, alors B boucle (possiblement B simule A pour toujours, si A ne s'arrête pas).
- La fonction f qui envoie $(\langle A \rangle, w)$ sur $(\langle B \rangle, w)$ est calculable.
- De plus, on a $(\langle A \rangle, w) \in \mathrm{L_{univ}}$ si et seulemnet si B s'arrête sur w, c'est-à-dire $(\langle A \rangle, w) \in \mathit{Halting\ Problem}$.

Exemple 2

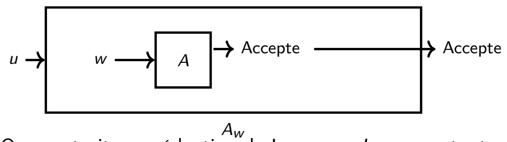
Il n'est pas possible de déterminer algorithmiquement si une machine de Turing accepte au moins une entrée :

- Problème $L_\emptyset$:

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M.
Réponse: Décider si $L(M) \neq \emptyset$.

> **Proposition**
> *Le problème $L_\emptyset$ est indécidable.*

Démonstration



- On construit une réduction de $\mathrm{L_{univ}}$ vers $L_\emptyset$: pour toute paire $(\langle A \rangle, w)$, on considère la machine de Turing A_w définie de la manière suivante :
  - A_w prend en entrée un mot u ;
  - A_w simule A sur w ;
  - Si A accepte w, alors A_w accepte.
- La fonction f qui à $(\langle A \rangle, w)$ associe $\langle A_w \rangle$ est bien calculable.
- De plus on a $(\langle A \rangle, w) \in \mathrm{L_{univ}}$ si et seulement si $L(A_w) \neq \emptyset$, c'est-à-dire $\langle A_w \rangle \in L_\emptyset$:
  - en effet, A_w accepte soit tous les mots (et donc le langage correspondant n'est pas vide) si A accepte w, soit n'accepte aucun mot (et donc le langage correspondant est vide) sinon.

- Beaucoup d'exemples (dont l'exemple 1) peuvent être vus comme les conséquences d'un résultat très général

Théorème de Rice

Théorème (Théorème de Rice)

Toute propriété non triviale des langages semi-décidables est indécidable.

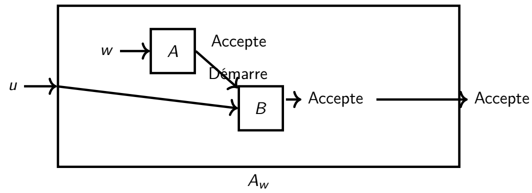
- Autrement dit, soit une propriété P des langages semi-décidables non triviale,
  - c'est-à-dire telle qu'il y a au moins une machine de Turing M telle que $L(M)$ satisfait P et une machine de Turing M telle que $L(M)$ ne satisfait pas P.
- Alors le problème de décision L_P :

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M ;
Réponse: Décider si $L(M)$ vérifie la propriété P ;

est indécidable.

Démonstration graphique

- Il nous faut démontrer que le problème de décision L_P est indécidable.
  - Quitte à remplacer P par sa négation, on peut supposer que le langage vide ne vérifie pas la propriété P.
- Puisque P est non triviale, il existe un moins une machine de Turing B avec $L(B)$ qui vérifie P.



- Démonstration :
  - Il nous faut démontrer que le problème de décision L_P est indécidable.
    - Quitte à remplacer P par sa négation, on peut supposer que le langage vide ne vérifie pas la propriété P (prouver l'indécidabilité de L_p est équivalent à prouver l'indécidabilité de son complémentaire).
  - Puisque P est non triviale, il existe un moins une machine de Turing B avec $L(B)$ qui vérifie P.
  - On construit une réduction de L_{univ} vers le langage L_P. Étant donnée une paire $(\langle A \rangle, w)$, on considère la machine de Turing A_w définie de la façon suivante :
    - A_w prend en entrée un mot u ;
    - Sur le mot u, A_w simule A sur le mot w ;
    - Si A accepte w, alors A_w simule B sur le mot u : A_w accepte si seulement si B accepte u.
  - Autrement dit, A_w accepte, si et seulement si A accepte w et si B accepte u. Si w est accepté par A, alors $L(A_w)$ vaut $L(B)$, et donc vérifie la propriété P. Si w n'est pas accepté par A, alors $L(A_w) = \emptyset$, et donc ne vérifie pas la propriété P.
  - La fonction f qui à $(\langle A \rangle, w)$ associe $\langle A_w \rangle$ est bien calculable.

Exemple 2 (déjà vu)

Il n'est pas possible de déterminer algorithmiquement si une machine de Turing accepte au moins une entrée :

- Problème $L_\emptyset$:

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M.
Réponse: Décider si $L(M) \neq \emptyset$.

Proposition

Le problème $L_\emptyset$ est indécidable.

Démonstration

C'est une application directe du théorème de Rice.

Exemple 2

Il n'est pas possible de déterminer algorithmiquement si une machine de Turing accepte le mot "informatique"

- Problème L_2:

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M.
Réponse: Décider si $informatique \in L(M)$.

Proposition
Le problème L_2 est indécidable.

Démonstration

C'est une application directe du théorème de Rice.

Exemple 3

- Problème $L_{\neq}$:

Donnée: Le codage $\langle A \rangle$ d'une machine de Turing A et le codage $\langle A' \rangle$ d'une machine de Turing A'.
Réponse: Déterminer si $L(A) \neq L(A')$.

Proposition
Le problème $L_{\neq}$ est indécidable.

Démonstration : $L_\emptyset \leq_m L_\neq$

- On construit une réduction de $L_\emptyset$ vers $L_\neq$.
  - On considère une machine de Turing fixe B qui accepte le langage vide :
    - prendre par exemple une machine de Turing B qui rentre immédiatement dans une boucle sans fin.
  - La fonction f qui à $\langle A \rangle$ associe la paire $(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$ est bien calculable.
  - De plus on a $\langle A \rangle \in L_\emptyset$ si et seulement si $L(A) \neq \emptyset$ si et seulement si $(\langle A \rangle, \langle B \rangle) \in L_\neq$.

Exemple 4

- Problème *INF*412:

Donnée: Le codage $\langle A \rangle$ d'une machine de Turing A.
Réponse: Déterminer si A accepte le mot "INF412" en moins de 412 étapes.

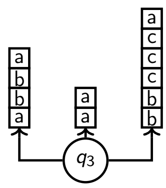
Proposition
Le problème INF412 est ?

Indécidable ?

Le problème est décidable : il suffit de simuler la machine pendant 412 étapes.

Machines à k piles

- Une **machine à k piles**, possède un nombre fini k de piles $r_1, r_2, \cdots, r_k$, qui correspondent à des piles d'éléments de Σ.
- Les instructions d'une machine à piles permettent seulement
  - d'empiler un symbole sur l'une des piles,
  - tester la valeur du sommet d'une pile,
  - ou dépiler le symbole au sommet d'une pile.

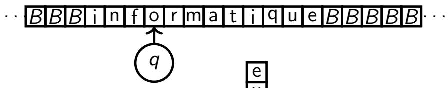


Théorème

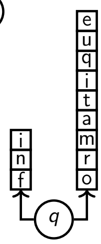
Toute machine de Turing peut être simulée par une machine à 2 piles.

(et réciproquement).

- Idée de la démonstration : voir une machine de Turing comme une machine à 2-piles.



correspond à :



Machines à compteurs

- Machines à compteurs :
  - une **machine à compteurs** possède un nombre fini k de compteurs $r_1, r_2, \cdots, r_k$, qui contiennent des entiers naturels.
  - Les instructions d'une machine à compteurs permettent seulement
    - de tester l'égalité d'un des compteurs à 0 ;
    - d'incrémenter un compteur ;
    - ou de décrémenter un compteur.

(tous les compteurs sont initialement nuls, sauf celui codant l'entrée).

Machines à compteurs

Instructions :

- Inc(c,j) : incrémente compteur c puis va à l'instruction j.
- Decr(c,j) : décrémente compteur c puis va à l'instruction j.
- IsZero(c,j,k) teste si le compteur c est nul et va à l'instruction j si c'est le cas, et à l'instruction k sinon.
- Halt arrête le calcul.

Exemple de programme avec 3 compteurs :

1. ✓ IsZero(1,5,2)
2. ✓ Decr(1,3)
3. ✓ Inc(3,4)
4. ✓ Inc(3,1)
5. ✓ Halt

- Exemple d'exécution : compteurs (3,2,0) (3,2,0) (2,2,0) (2,2,1) (2,2,2) (1,2,2) (1,2,3) (1,2,4) (0,2,4) (0,2,5) (0,2,6) (0,2,6)

Théorème
Toute machine à k-piles peut être simulée par une machine à $k+1$ compteurs.

- Principe :
  - voir une pile (donc un mot) $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, \cdots, r-1\}$ comme l'entier $i = a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + \cdots a_2 r + a_1$.
  - Dépiler correspond à remplacer i par i div r. Empiler le symbole a correspond à remplacer i par $i * r + a$. Lire le sommet d'une pile i correspond à calculer i mod r.
  - Par exemple, pour i div r : en partant avec le compteur supplémentaire (celui d'indice $k+1$) à 0, on décrémente le compteur i de r et on incrémente le compteur supplémentaire de 1. On répète cette opération jusqu'à ce que le compteur i atteigne 0. On décrémente alors le compteur supplémentaire de 1 en incrémentant le compteur i de 1 jusqu'à ce que le premier soit 0.

Théorème
Toute machine à $k \geq 3$ compteurs se simule par une machine à 2 compteurs.

Corollaire
Toute machine de Turing se simule par une machine à 2 compteurs.

(et réciproquement).

- Principe :
  - Supposons $k = 3$. L'idée est coder trois compteurs i, j et k par l'entier $m = 2^i 3^j 5^k$. L'un des compteurs stocke cet entier. L'autre compteur est utilisé pour faire des multiplications, divisions, calculs modulo m, pour m valant 2, 3, ou 5, comme dans la preuve précédente.
  - Pour $k > 3$, on utilise le même principe, mais avec les k premiers nombres premiers.

Résultats obtenus

- Résumé :
  - Les modèles suivants se simulent deux à deux :
    - Les machines de Turing
    - Les machines à $k \geq 2$ piles
    - Les machines RAM
    - Les machines à $k \geq 2$ compteurs

Thèse de Church

- Thèse de Church:

Calculable dans un sens intuitif correspond à calculable par machine de Turing

Fonctions récursives

- Une fonction partielle $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ est *récursive* si elle est soit la constante 0, soit l'une des fonctions :
  - Zero : $x \mapsto 0$ la fonction 0 ;
  - Succ : $x \mapsto x+1$ la fonction successeur ;
  - $\mathrm{Proj}_n^i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ les fonctions de projection, pour $1 \leq i \leq n$;
  - $\mathrm{Comp}_m(g, h_1, \ldots, h_m) : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$ la composition des fonctions récursives primitives $g, h_1, \ldots, h_m$;
  - $\mathrm{Rec}(g, h)$ la fonction définie par récurrence comme

$$\begin{cases} f(0, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n), \\ f(x_1+1, x_2, \ldots, x_n) = h(f(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

    où g et h sont récursives primitives.
  - $\mathrm{Min}(g)$ la fonction qui à $(x_2, \ldots, x_n)$ associe le plus petit $y \in \mathbb{N}$ tel que $g(y, x_2, \ldots, x_n) = 1$ s'il en existe (et qui n'est pas définie sinon).

Théorème
Une fonction $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ est récursive si et seulement si elle est calculable par une machine de Turing.

- Thèse de Church :

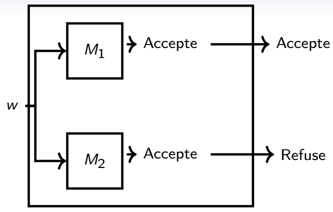
Calculable dans un sens intuitif correspond à calculable par machine de Turing

Décidable = semi-décidable + co-semi-décidable

Théorème
Un langage est décidable si et seulement s'il est semi-décidable et son complémentaire aussi.

- Ce résultat justifie la terminologie de **semi-décidable**.

- Démonstration : Direction $\Leftarrow$.



  - Supposons que L soit semi-décidable et son complémentaire aussi.
    - Il existe une machine de Turing M_1 qui termine en acceptant sur L,
    - et une machine de Turing M_2 qui termine en acceptant sur son complémentaire.
  - On construit une machine de Turing M qui, sur une entrée w, simule t étapes de M_1 et t étapes M_2 sur w, pour $t = 1, 2, \ldots$ jusqu'à ce que l'une des deux termine :
    - si M_1 termine, la machine de Turing M accepte ;
    - si c'est M_2, la machine M refuse.

- Démonstration : Direction $\Rightarrow$.
  - Par définition, un langage décidable est semi-décidable.
  - En inversant dans la machine de Turing l'état d'acceptation et de refus, son complémentaire est aussi décidable, et donc aussi semi-décidable.

Un problème non récursivement énumérable

- On considère alors le complémentaire du problème $\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}$, que l'on va noter $\overline{\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}}$:

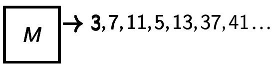
Problème $\overline{\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}}$:
Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M et un mot w.
Réponse: Décider si la machine M n'accepte pas le mot w.

Corollaire
Le problème $\overline{\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}}$ n'est pas semi-décidable.

- Preuve :
  - Sinon, par le théorème précédent, le problème de décision $\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}$ serait décidable.

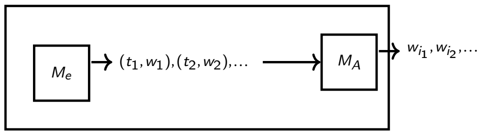
Enumération d'un langage RE

Théorème
Un langage $L \subset M^*$ est récursivement énumérable (= semi-décidable) si et seulement si l'on peut produire une machine de Turing qui affiche un à un (énumère) tous les mots du langage L.



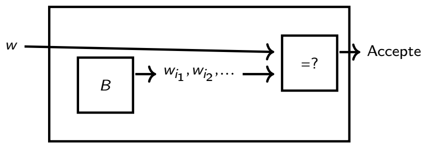
- Ce résultat justifie la terminologie de **récursivement énumérable** comme synonyme de semi-décidable.

- Démonstration : Direction $\Rightarrow$.



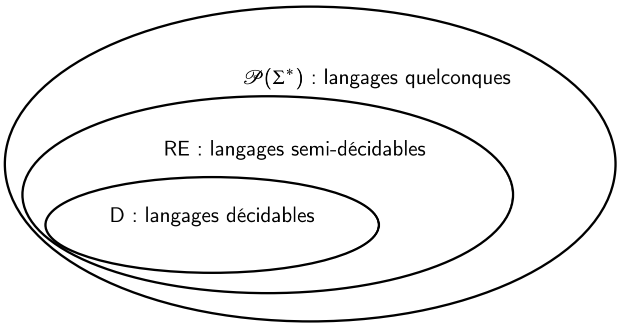
- Supposons L récursivement énumérable : soit A la machine qui accepte les mots de L.
- $\mathbb{N} \times \Sigma^*$ est effectivement dénombrable : on peut construire une machine de Turing M_e qui produit le codage (t, w) de tous les couples (t, w) où t est un entier, w est un mot.
- Considérons une machine de Turing qui en plus, pour chaque couple produit (t, w), simule t étapes de la machine A. Si la machine A termine et accepte en exactement t étapes, la machine affiche alors le mot w. Sinon elle n'affiche rien pour ce couple.

- Démonstration : Direction $\Leftarrow$.



- si l'on a une machine de Turing B qui énumère tous les mots du langage L, alors on peut construire une machine de Turing qui étant donné un mot w, simule B, et à chaque fois que B produit un mot compare ce mot au mot w.
  - S'ils sont égaux, alors la machine s'arrête et accepte.
  - Sinon, la machine continue à jamais.

Le paysage de la calculabilité



$$D \subsetneq RE \subsetneq \mathscr{P}(\Sigma^*).$$

$$L_{univ} \in RE \setminus D.$$

Constat dramatique

- L'objet de la vérification :
  - on se donne la description d'un système $\mathscr{S}$
  - on se donne la description d'une propriété ϕ
  - on souhaite déterminer si $\mathscr{S} \models \phi$, c'est-à-dire si le système vérifie sa spécification.
- Le problème est indécidable
  - dès que $\mathscr{S}$ permet de modéliser des systèmes aussi simples que des systèmes à ≥ 2 compteurs ;
  - et que ϕ n'est pas une propriété toujours vraie ou toujours fausse.

Retour sur le transparent 12 du premier cours

Quelques histoires récentes :

- 370 millions de dollars :

- $\geq$ 475 millions de dollars :

$\frac{4195835}{3145727} =$ 1.333739068902037589

- Garantir informatiquement qu'un système donné vérifie sa spécification n'est pas possible dans le cas général.
- On doit concevoir des méthodes qui évitent les difficultés.
- Ou qui peuvent être incomplètes. . .

D'autres problèmes indécidables

- Indécidables :
  - Dixième problème de Hilbert :

    Donnée: Un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ à coefficients entiers.
    Réponse: Décider s'il possède une racine entière.
  - Simplification en calcul formel :

    Donnée: Une expression mathématique d'une variable x construite par composition à partir de la constante 1, l'addition, la soustraction, la multiplication, le sinus et la valeur absolue
    Réponse: Décider si cette expression est la fonction constante nulle.
  - En logique :

    Donnée: Une formule arithmétique F du premier ordre.
    Réponse: Décider si F est vraie sur les entiers (c-à-d $F \in Th(\mathbb{N})$).
- Remarque :
  - Théorème de Presburger : La théorie du premier ordre des entiers munis de l'addition seulement (mais pas de la multiplication) est décidable.
  - Autre remarque : Si on remplace sin par exp, dans l'énoncé, alors cela reste décidable.

Les cours à venir

- On souhaite parler d'une ressource/mesure élémentaire particulière : le **temps de calcul**.
- Objectif :
  - distinguer ce qui est raisonnable de ce qui n'est pas raisonnable en termes de temps de calcul.