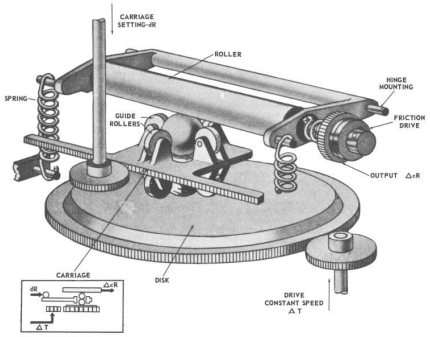
Cours 2: Calcul propositionnel. Calcul des prédicats.



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr

Ecole Polytechnique
INF412

Retour sur l'épisode précédent

- Syntaxe :
  L'ensemble des formules propositionnelles $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{P}$ est le langage sur l'alphabet $\mathscr{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$ défini inductivement par les règles suivantes :
  - (B) il contient $\mathscr{P}$: toute variable propositionnelle est une formule propositionnelle ;
  - (I) si $F \in \mathscr{F}$ alors $\neg F \in \mathscr{F}$;
  - (I) si $F, G \in \mathscr{F}$ alors $(F \wedge G) \in \mathscr{F}$, $(F \vee G) \in \mathscr{F}$, $(F \Rightarrow G) \in \mathscr{F}$, et $(F \Leftrightarrow G) \in \mathscr{F}$.
- Semantique : définie inductivement.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- Lorsque la formule F s'évalue en 1, on dit que F est **satisfaite** en v, et que v est un **modèle** de F.

Tautologies, formules équivalentes

- Une **tautologie** est une formule F qui est satisfaite en toute valuation.
- Deux formules F et G sont dites **équivalentes** si elles s'évaluent en 1 (et donc aussi en 0) pour exactement les mêmes valuations.
  - On écrit dans ce cas $F \equiv G$.
- Exemples :
  - La formule $p \vee \neg p$ est une tautologie ;
  - Les formules p et $\neg\neg p$ sont équivalentes.

Quelques équivalences

- Pour toutes formules F et G, les formules suivantes sont des tautologies :

$$(F \Rightarrow F),$$

$$(F \Rightarrow (G \Rightarrow F)),$$

$$(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))).$$

- Idempotence : pour toute formule F

$$(F \vee F) \equiv F,$$

$$(F \wedge F) \equiv F.$$

- Associativité : pour toutes formules F, G, H

$$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H),$$

$$(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H).$$

Quelques équivalences

- Commutativité : pour toutes formules F et G

$$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F),$$

$$(F \vee G) \equiv (G \vee F).$$

- Distributivité : pour toutes formules F, G, H

$$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)),$$

$$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)).$$

- Lois de De Morgan : pour toutes formules F et G

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G),$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G).$$

- Absorption : pour toutes formules F et G

$$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$$

$$(F \vee (F \wedge G)) \equiv F.$$

- En raison des équivalences précédentes (associativité), on va dorénavant souvent ne pas écrire toutes les parenthèses

Complétude fonctionnelle

Théorème
Toute fonction f des valuations sur $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$ est la valeur de vérité d'une formule propositionnelle.

- Démonstration :
  - Par récurrence sur le nombre n de variables de f.
  - Pour $n=1$, il y a quatre fonctions de $\{0,1\}^1$ dans $\{0,1\}$, qui se représentent par les formules p, $\neg p$, $(p \vee \neg p)$, $(p \wedge \neg p)$.
  - Supposons la propriété vraie pour $n-1$.
  - Chaque valuation v' sur $\{p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}\}$ peut se voir comme la restriction d'une valuation sur $\{p_1, \cdots, p_n\}$.
  - Soit f_0 (respectivement f_1) la restriction de f à la valuation v telle que $v(p_n) = 0$ (resp. $v(p_n) = 1$).
  - Les fonctions f_0 et f_1 se représentent par des formules $G(p_1, \cdots, p_{n-1})$ et $H(p_1, \cdots, p_{n-1})$ respectivement par hypothèse de récurrence.
  - La fonction f peut alors se représenter par la formule

$$(\neg p_n \wedge G(p_1, \cdots, p_{n-1})) \vee (p_n \wedge H(p_1, \cdots, p_{n-1})),$$

    ce qui prouve l'hypothèse de récurrence au rang n.

Formes normales

- Un **littéral** est de la forme p, ou $\neg p$, pour $p \in \mathscr{P}$.
- Une **forme normale disjonctive** (FND) est une disjonction $F_1 \vee F_2 \vee \cdots \vee F_k$ de formules, où chaque formule F_i est une conjonction $G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_{\ell_i}$ de littéraux.
- Une **forme normale conjonctive** (FNC) est une conjonction $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_k$ de formules, où chaque formule F_i est une disjonction $G_1 \vee G_2 \vee \cdots \vee G_{\ell_i}$ de littéraux.
- Remarque. Dans ces écritures, on s'autorise à supprimer des parenthèses (par les règles d'associativité de $\wedge$ et de $\vee$).
- Exemples :
  - $((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p))$ est une FND.
  - $\neg p \vee q$ et $(\neg p \vee q) \wedge \neg r$ sont des FNC.

Formes normales

Théorème

- *Toute formule propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale conjonctive.*
- *Toute formule propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale disjonctive.*

Corollaire

Toute formule propositionnelle s'écrit avec uniquement les connecteurs $\vee$, $\wedge$ et $\neg$.

Corollaire

- *Toute formule propositionnelle s'écrit avec uniquement les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.*
- *Toute formule propositionnelle s'écrit avec uniquement les connecteurs $\neg$ et $\vee$.*

- Démonstration : remplacer les $\vee$ ou les $\wedge$ en utilisant les lois de Morgan.

- Démonstration par induction sur la formule :
  - Par récurrence sur n comme dans la preuve précédente.
  - Pour $n=1$, p, $\neg p$, $p \vee \neg p$, $p \wedge \neg p$ sont en FNC et FND.
  - On suppose la propriété vraie pour $n-1$.
  - Comme dans la dernière preuve, on peut construire une formule qui représente la fonction valeur de vérité f associée à la formule $F(p_1, \cdots, p_n)$ par une formule de la forme
    $$(\neg p_n \wedge G(p_1, \cdots, p_{n-1})) \vee (p_n \wedge H(p_1, \cdots, p_{n-1})).$$
  - Par hypothèse de récurrence, G et H sont équivalentes à
    $$G \equiv (G_1 \vee G_2 \vee \cdots \vee G_k) \text{ et } H \equiv (H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_\ell)$$
  - On peut alors écrire
    $$(\neg p_n \wedge G) \equiv (\neg p_n \wedge G_1) \vee (\neg p_n \wedge G_2) \vee \cdots \vee (\neg p_n \wedge G_k)$$
    $$(p_n \wedge H) \equiv (p_n \wedge H_1) \vee (p_n \wedge H_2) \vee \cdots \vee (p_n \wedge H_k)$$
    qui sont les deux en FND.
  - La fonction f est donc représentée par la disjonction de ces deux formules, et donc par une FND.
  - Si l'on veut obtenir F en forme normale conjonctive,on utilise l'équivalence $F \equiv ((\neg p_n \vee H) \wedge (p_n \vee G))$.

Introduction

- On va commencer à aborder la question suivante :

  qu'est-ce qu'une démonstration ?

- Exemple :
  - on se donne une formule propositionnelle F,
  - et on veut décider si F est une tautologie.

Une première méthode

- Première méthode :
  - Une formule propositionnelle F s'écrit à l'aide d'un nombre fini de variables $p_1, \cdots, p_n$.
  - On détermine la valeur de F sur les 2^n valuations possibles de $p_1, \cdots, p_n$, et on vérifie que c'est bien 1 pour toutes les valuations.
  - Soucis :
    1. Complexité exponentielle :

       pour n grand,

       le temps explose, car 2^n est très grand ;
       en outre, le temps explose **TOUJOURS**.
    2. Cela ne correspond pas à ce que l'on aurait pu vouloir appeler une "démonstration".

Des systèmes de preuve

- Preuves à la Hilbert-Fregge.
- Déduction naturelle.
- Preuves par résolution. (cf PC de demain).
- Méthode des tableaux.

Preuves à la Hilbert-Fregge

- Principe :
  - on part d'un ensemble d'axiomes, qui sont des tautologies ;
  - et on utilise une unique règle de déduction, le **modus ponens**, aussi appelé **coupure**, qui vise à capturer un type de raisonnement tout à fait naturel en mathématique.
- La règle du modus ponens dit qu'à partir de la formule F et d'une formule $F \Rightarrow G$, on déduit G.

$$\frac{F \quad (F \Rightarrow G)}{G}$$

- Exemple : à partir de $(A \wedge B)$ et de $(A \wedge B) \Rightarrow C$ on déduit C.

- On dit qu'une formule F est une **instance** d'une formule G si F s'obtient en substituant certaines variables propositionnelles de G par des formules F_i.
- Un **axiome de la logique booléenne** est n'importe quelle **instance** d'une des formules suivantes :
  1. $(X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow X_1))$ (axiome 1 pour l'implication) ;
  2. $((X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow X_3)) \Rightarrow ((X_1 \Rightarrow X_2) \Rightarrow (X_1 \Rightarrow X_3)))$ (axiome 2 pour l'implication) ;
  3. $(X_1 \Rightarrow \neg\neg X_1)$ (axiome 1 pour la négation) ;
  4. $(\neg\neg X_1 \Rightarrow X_1)$ (axiome 2 pour la négation) ;
  5. $((X_1 \Rightarrow X_2) \Rightarrow (\neg X_2 \Rightarrow \neg X_1))$ (axiome 3 pour la négation) ;
  6. $(X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow (X_1 \wedge X_2)))$ (axiome 1 pour la conjonction) ;
  7. $((X_1 \wedge X_2) \Rightarrow X_1)$ (axiome 2 pour la conjonction) ;
  8. $((X_1 \wedge X_2) \Rightarrow X_2)$ (axiome 3 pour la conjonction) ;
  9. $(X_1 \Rightarrow (X_1 \vee X_2))$ (axiome 1 pour la disjonction) ;
  10. $(X_2 \Rightarrow (X_1 \vee X_2))$ (axiome 2 pour la disjonction) ;
  11. $(\neg X_1 \Rightarrow ((X_1 \vee X_2) \Rightarrow X_2))$ (axiome 3 pour la disjonction).

Preuve par modus ponens

- Soit T un ensemble de formules propositionnelles, et F une formule propositionnelle.
- Une **preuve de F à partir de T** est une suite finie $F_1, F_2, \cdots, F_n$ de formules propositionnelles telle que :
  - F_n est égale à F,
  - et pour tout i,
    - ou bien F_i est dans T ;
    - ou bien F_i est un axiome de la logique booléenne ;
    - ou bien F_i s'obtient par modus ponens à partir de deux formules F_j, F_k avec $j < i$ et $k < i$.
- Notation :
  - On dit que F **est prouvable à partir de** T, noté $T \vdash F$ dans ce cas. F est dite **prouvable** si elle est prouvable à partir de $T = \emptyset$.

Exemple

Voici une preuve de $(F \Rightarrow H)$ à partir de $\{(F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H)\}$:

- $F_1 : (G \Rightarrow H)$ (hypothèse) ;
- $F_2 : ((G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow (G \Rightarrow H)))$ (instance de l'axiome 1.) ;
- $F_3 : (F \Rightarrow (G \Rightarrow H))$ (modus ponens à partir de F_1 et F_2) ;
- $F_4 : ((F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H)))$ (instance de l'axiome 2.) ;
- $F_5 : ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$ (modus ponens à partir de F_3 et F_4) ;
- $F_6 : (F \Rightarrow G)$ (hypothèse) ;
- $F_7 : (F \Rightarrow H)$ (modus ponens à partir de F_6 et F_5).

Validité et complétude de cette méthode de preuve

Théorème (Validité)

Toute formule propositionnelle prouvable est une tautologie.

Théorème (Complétude)

Toute tautologie est prouvable.

- Plus généralement :
  - Notons $T \models F$ pour signifier que tout modèle de chacune des formules de T est un modèle de F.
  - On dit que F est une **conséquence** (sémantique) de T.
  - On a :

$$T \vdash F \text{ ssi } T \models F.$$

Déduction naturelle

- La notion de démonstration précédente est pénible à utiliser en pratique.
- Une alternative : la **déduction naturelle.**
- Principe :
  - On manipule des couples (appelés **séquents**) $\Gamma \vdash A$, où Γ est un ensemble fini de formules (propositionnelles) et A est une formule (propositionnelle).
    - Motivation sous-jacente : $\Gamma \vdash A$ exprime le fait que sous les hypothèses Γ, on a A.
  - On utilise les règles de déduction du transparent suivant
    - i.e. : on définit inductivement **l'ensemble des séquents dérivables** par les règles du transparent suivant.
    - Ici, on considère que les formules incluent aussi $\bot$, interprété par faux, et $\top$ interprété par vrai.
- On dit que F **est prouvable à partir de** T, noté $T \vdash F$ si $T \vdash F$ est un séquent dérivable. F est dite **prouvable** si elle est prouvable à partir de $T = \emptyset$.

$\dfrac{}{\Gamma \vdash A}$ axiome pour chaque $A \in \Gamma$

$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}$ $\top$-intro

$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$ $\bot$-élim

$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$ $\wedge$-intro

$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$ $\wedge$-élim

$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$ $\wedge$-élim

$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $\vee$-intro

$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $\vee$-intro

$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$ $\vee$-élim

$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$ $\Rightarrow$-intro

$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$ $\Rightarrow$-élim

$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$ $\neg$-intro

$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}$ $\neg$-élim

$\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$ tiers exclu

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{(F \Rightarrow G),(G \Rightarrow H),F\} \vdash (G \Rightarrow H)}\ ax \quad \dfrac{}{\{(F \Rightarrow G),(G \Rightarrow H),F\} \vdash (F \Rightarrow G)}\ ax \quad \dfrac{}{\{(F \Rightarrow G),(G \Rightarrow H),F\} \vdash F}\ ax}{G}\ \Rightarrow\text{-élim}}{\dfrac{\{(F \Rightarrow G),(G \Rightarrow H),F\} \vdash H}{\{(F \Rightarrow G),(G \Rightarrow H)\} \vdash (F \Rightarrow H)}\ \Rightarrow\text{-intro}}\ \Rightarrow\text{-élim}$$

Validité et complétude de cette méthode de preuve

Théorème (Validité)

Toute formule propositionnelle prouvable est une tautologie.

Théorème (Complétude)

Toute tautologie est prouvable.

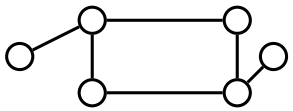
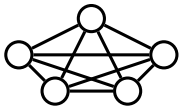
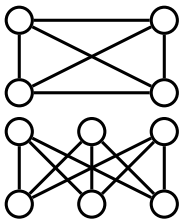
- Plus généralement :
  - Notons $T \models F$ pour signifier que tout modèle de chacune des formules de T est un modèle de F.
  - On dit que F est une **conséquence** (sémantique) de T.
  - On a :

$$T \vdash F \text{ ssi } T \models F.$$

Motivation

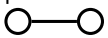
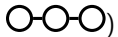
- Le calcul propositionnel reste très limité...
- Si on veut aller plus loin, on peut chercher à parler de choses plus générales que les fonctions booléennes.
  - On va se donner cette fois un ensemble Σ de formules.
    - Σ peut être fini ou infini.
  - On cherche à savoir quand on peut satisfaire toutes les formules de Σ.
- Le reste de cette section : la présentation d'un des grands résultats du calcul propositionnel, le théorème de compacité, via quelques digressions liées à une application.

Digression : Théorie des graphes.

- Un graphe est dit **planaire** s'il peut se représenter sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.
- Planaire : 
- Non-planaire : K_5  $K_{3,3}$ 

Théorème (Kuratowski-Wagner)

Un graphe fini est planaire ssi il ne contient pas de sous-graphe qui soit une expansion de K_5 ou de $K_{3,3}$.

- Une expansion consiste (grossièrement) à ajouter un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes (exemple :  devient )

Digression : Coloriage de graphes.

- Le problème de **coloriage d'un graphe** : colorier les sommets d'un graphe de telle sorte qu'aucune arête n'ait ses extrémités d'une même couleur.

Un coloriage avec 4 couleurs

Théorème (Appel et Haken (76))

Tout graphe planaire est coloriable avec 4 couleurs.

- Preuve avec 1478 cas critiques.
- Robertson, Sanders, Seymour, Thomas, Gonthier, Werner...

- Digression : Le problème du coloriage de graphes est NP-complet (voir fin du cours).

Retour sur la logique propositionnelle

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et k couleurs.
- On considère $\mathscr{P} = \{A_{u,i}, u \in V, 1 \leq i \leq k\}$ un ensemble de variables propositionnelles.
- Idée : $A_{u,i}$ vraie ssi le sommet u est colorié avec la couleur i.
- Contraintes :
  - Chaque sommet possède une couleur :
    $$\Gamma_1 = \{A_{u,1} \vee \cdots \vee A_{u,k} | u \in V\}.$$
  - Chaque sommet n'a pas plus qu'une couleur :
    $$\Gamma_2 = \{\neg(A_{u,i} \wedge A_{u,j}) | u \in V, 1 \leq i,j \leq k, i \neq j\}.$$
  - Chaque arête n'a pas ses extrémités d'une même couleur :
    $$\Gamma_3 = \{\neg(A_{u,i} \wedge A_{v,i}) | u \in V, 1 \leq i \leq k, (u,v) \in E\}.$$
- Un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si on peut satisfaire toutes les formules de $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Définitions

- Soit Σ un ensemble de formules.
- Définitions :
  - Une valuation v **satisfait** Σ si elle satisfait chaque formule de Σ. On note alors $v \models \Sigma$. On dit aussi dans ce cas que cette valuation est **un modèle** de Σ.
  - Σ est dit **satisfiable**, ou **consistant**, s'il existe une valuation qui le satisfait. Σ est dit **inconsistant**, ou **contradictoire**, sinon.
- Exemples :
  - $\{p, \neg q, p \vee r\}$ est satisfiable.
  - $\{p, p \Rightarrow q, \neg q\}$ est inconsistant.
  - une valuation satisfait Γ ssi elle correspond à un k-coloriage.

Théorème de compacité

Supposons $\mathscr{P}$ dénombrable.

Trois formulations équivalentes du théorème.

Théorème (Version 1)

Un ensemble Σ de formules est satisfiable si et seulement si toute partie finie de Σ est satisfiable.

Théorème (Version 2)

Un ensemble Σ de formules est inconsistant si et seulement si Σ possède une partie finie inconsistante.

Théorème (Version 3)

Une formule F est une conséquence d'un ensemble Σ de formules si et seulement si F est une conséquence d'une partie finie de Σ.

Démonstration

Une application du théorème : Coloriage de graphes

- Dans la preuve du théorème de Appel et Haken, il "suffit" de faire la preuve pour les graphes finis :

Théorème

Un graphe (fini ou infini) G est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes est coloriable avec k couleurs.

  - Sens $\Rightarrow$: trivial.
  - Sens $\Leftarrow$: Pourquoi ?
    - Γ est satisfiable si et seulement si toute partie finie Γ_0 de Γ est satisfiable.
    - Soit Γ_0 une partie finie de Γ. Soient $V_0 = \{u_1, \cdots, u_n\}$ les sommets u tels que $A_{u,i}$ figure dans une des formules de Γ_0. Soit $G_0 = (V_0, E_0)$ le sous-graphe déterminé par V_0.
    - Par hypothèse, G_0 est coloriable avec k couleurs, et donc Γ_0 est satisfiable.

Autres applications

- Le théorème de compacité est vrai pour des logiques plus générales.
- Autre application :
  - Lemme de König : tout arbre infini dénombrable de degré fini possède un chemin infini.
- . . .il a surtout des applications dans des logiques plus générales.

- Si l'on veut pouvoir raisonner sur des assertions mathématiques, il nous faut autoriser des constructions plus riches que celles du calcul propositionnel.
- Un énoncé comme

$$\forall x((Premier(x) \wedge x > 1+1) \Rightarrow Impair(x)).$$

n'est pas capturé par la logique propositionnelle :

  - on a des **prédicats** comme $Premier(x)$ dont la valeur de vérité dépend d'une variable x ;
  - on utilise des quantificateurs comme $\exists$, $\forall$.

Logique du premier ordre

- On va présenter seulement le **calcul des prédicats** du **premier ordre**.
  - En logique du **premier ordre**, on n'autorise que les quantifications sur les variables.

$$\forall x((Premier(x) \wedge x > 1+1) \Rightarrow Impair(x)).$$

- Un énoncé **du second ordre** (ou **d'ordre supérieur**) serait un énoncé où l'on autoriserait les quantifications sur les fonctions ou des relations.
  - Exemple :

$$\neg\exists f(\forall x(f(x) > f(x+1))).$$

Premières considérations

- Pour écrire une formule d'un langage du premier ordre, on utilise
  - certains symboles qui sont communs à tous les langages,
  - et certains symboles qui varient d'un langage à l'autre.

$$\forall x((Premier(x) \wedge x > 1+1) \Rightarrow Impair(x)).$$

- Les symboles
  - communs à tous les langages sont :
    - les connecteurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
    - les parenthèses (et) et la virgule , ;
    - le quantificateur universel $\forall$ et le quantificateur existentiel $\exists$;
    - un ensemble infini dénombrable de symboles $\mathcal{V}$ de variables.
  - qui peuvent varier d'un langage à l'autre sont :
    - capturés par la notion de **signature**.

Signature d'un langage du premier ordre

- La signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ d'un langage du premier ordre est la donnée [1] :
  - d'un premier ensemble $\mathcal{C}$ de **symboles de constantes** ;
  - d'un second ensemble $\mathcal{F}$ de **symboles de fonctions**.
    - A chaque symbole de cet ensemble est associé un entier strictement positif, que l'on appelle **son arité** ;
  - d'un troisième ensemble $\mathcal{R}$ de **symboles de relations**.
    - A chaque symbole de cet ensemble est associé un entier strictement positif, que l'on appelle **son arité**.

1. On supposera que $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$ sont des ensembles disjoints deux à deux.

Exemples

- Exemples de signatures :
  - $\Sigma = (\{0,1\}, \{s,+\}, \{Impair, Premier, =, <\})$ avec les symboles de constante 0 et 1, les symboles de fonctions s d'arité 1 et $+$ d'arité 2, les symboles de relations *Impairs* et *Premier* d'arité 1 et $=$ et $<$ d'arité 2.
  - $\mathcal{L}_2 = (\{c,d\}, \{f,g,h\}, \{R\})$ avec c, d deux symboles de constante, f un symbole de fonction d'arité 1, g et h deux symboles de fonctions d'arité 2, R un symbole de relation d'arité 2.

- Une formule du premier ordre sera alors un mot sur l'alphabet

$$\mathscr{A}(\Sigma) = \mathscr{V} \cup \mathscr{C} \cup \mathscr{F} \cup \mathscr{R} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,), ,, =, \forall, \exists\}.$$

- On va définir par étapes :

1. d'abord les **termes**,
   - qui visent à représenter des objets,
2. puis les **formules atomiques**,
   - qui visent à représenter des relations entre objets,
3. et enfin les **formules**.

- Il est utile[2] de lire **le polycopié**.
  - en particulier, le chapitre 5.
- tout ce qui suit dans cette section précise la terminologie et les définitions mais reste sur le fond sans surprises...

2. voire nécessaire

- Et c'est pour cela que la suite va être subliminale . . .,

. . .car le mieux est de le lire par soit-même à tête reposée

  - puis de faire par exemple le quizz sur le moodle INF412 . . .

PARTIE SUBLIMINALE:

A LIRE ATTENTIVEMENT PAR SOI-MÊME

Termes

- Soit $\Sigma = (\mathscr{C}, \mathscr{F}, \mathscr{R})$ une signature.
- L'ensemble T des **termes** sur la signature Σ est le langage sur l'alphabet $\mathscr{A}(\Sigma)$ défini inductivement par :
  - (B) toute variable est un terme : $\mathscr{V} \subset T$;
  - (B) toute constante est un terme : $\mathscr{C} \subset T$;
  - (I) si f est un symbole de fonction d'arité n et si $t_1, t_2, \cdots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, \cdots, t_n)$ est un terme.
- Un **terme clos** est un terme sans variable.

Exemples

- (Convention : $x, y, z, \ldots$ désignent des variables, c-à-d des éléments de $\mathscr{V}$).
- Exemples :
  - $+(x, s(+(1,1)))$ est un terme sur la signature Σ précédente qui n'est pas clos. $+(+(s(1), +(1,1)), s(s(0)))$ est un terme clos sur cette même signature.
  - $h(c,x)$, $h(y,z)$, $g(d, h(y,z))$ et $f(g(d, h(y,z)))$ sont des termes sur la signature $\mathscr{L}_2$.

Formules atomiques

- Soit $\Sigma = (\mathscr{C}, \mathscr{F}, \mathscr{R})$ une signature.
- Une **formule atomique** sur la signature Σ est un mot sur l'alphabet $\mathscr{A}(\Sigma)$ de la forme $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$, où $R \in \mathscr{R}$ est un symbole de relation d'arité n, et où $t_1, t_2, \cdots, t_n$ sont des termes sur Σ.
- Exemples :
  - $>(x, +(1,0))$ est une formule atomique sur la signature précédente. $=(x, s(y))$ aussi.
  - On convient parfois d'écrire $t_1 R t_2$ pour certains symboles binaires, comme $=$, $<$, $+$:
    - par exemple, on écrira $x > 1+1$ pour $>(x, +(1,1))$, ou $(s(1)+1)+s(s(0))$ pour $+(+(s(1),1), s(s(0)))$.
  - $R(f(x), g(c, f(d)))$ est une formule atomique sur $\mathscr{L}_2$.

Formules

- Soit $\Sigma = (\mathscr{C}, \mathscr{F}, \mathscr{R})$ une signature.
- L'ensemble des formules sur la signature Σ est le langage sur l'alphabet $\mathscr{A}(\Sigma)$ défini inductivement par :
  - (B) toute formule atomique est une formule ;
  - (I) si F est une formule, alors $\neg F$ est une formule ;
  - (I) si F et G sont des formules, alors $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, et $(F \Leftrightarrow G)$ sont des formules ;
  - (I) si F est une formule, et si $x \in \mathscr{V}$ est une variable, alors $\forall x F$ est une formule, et $\exists x F$ aussi.

Exemples

- Exemples :
  - $\forall x((Premier(x) \wedge x > 1+1) \Rightarrow Impair(x))$ est une formule sur la signature Σ précédente.
  - $\exists x(s(x) = 1+0 \vee \forall y\ x+y > s(x))$ aussi.
  - Exemples de formules sur la signature $\mathscr{L}_2$:
    - $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$
    - $\forall x \exists y(g(x,y) = c \wedge g(y,x) = c)$;
    - $\forall x \neg f(x) = c$;
    - $\forall x \exists y \neg f(x) = c$.

Théorème de décomposition/lecture unique

Ce sont des définitions inductives non-ambigües :

Théorème (de décomposition/lecture unique)

- *Toute formule F est d'une, et exactement d'une, des formes suivantes :*
  1. *une formule atomique ;*
  2. *$\neg G$, où G est une formule ;*
  3. *$(G \wedge H)$ où G et H sont des formules ;*
  4. *$(G \vee H)$ où G et H sont des formules ;*
  5. *$(G \Rightarrow H)$ où G et H sont des formules ;*
  6. *$(G \Leftrightarrow H)$ où G et H sont des formules ;*
  7. *$\forall x G$ où G est une formule et x une variable ;*
  8. *$\exists x G$ où G est une formule et x une variable.*
- *De plus dans le premier cas, il y a une unique façon de "lire" la formule atomique. Dans chacun des autres cas, il y a unicité de la formule G et de la formule H avec cette propriété.*

Intuition

- L'intuition de ce qui va suivre est de distinguer les variables **liées** des variables qui ne le sont pas.
- Tout cela est en fait à propos de "$\forall x$" et "$\exists x$" qui sont des **lieurs** :
  - lorsqu'on écrit $\forall x F$ ou $\exists x F$, x devient une variable liée ;
  - en d'autres termes, x est une variable "muette" de $\forall x F$.
  - on pourrait tout aussi bien écrire $\forall y F(y/x)$ (respectivement : $\exists y F(y/x)$) où $F(y/x)$ désigne intuitivement la formule que l'on obtient en remplaÃ§ant x par y dans F.
- D'autres lieurs en mathématiques :
  - le symbole intégrale : dans l'expression $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable muette (liée). $\int_a^b f(u)du$ est exactement la même intégrale.

Le cas des termes

- Les variables libres d'un terme sont les variables qui apparaissent dans ce terme.
- Si on préfère : l'ensemble $\ell(t)$ des **variables libres d'un terme** t se définit inductivement par :

  (B) $\ell(v) = \{v\}$ pour $v \in \mathscr{V}$;

  (B) $\ell(c) = \emptyset$ pour $c \in \mathscr{C}$;

  (I) $\ell(f(t_1, \cdots, t_n)) = \ell(t_1) \cup \cdots \cup \ell(t_n)$.

Le cas des formules

- L'ensemble $\ell(t)$ des **variables libres d'une formule** F se définit inductivement par :

  (B) $\ell(R(t_1,\cdots,t_n)) = \ell(t_1)\cup\cdots\cup\ell(t_n)$;
  (I) $\ell(\neg G) = \ell(G)$;
  (I) $\ell(G\vee H) = l(G\wedge H) = \ell(G\Rightarrow H) = \ell(G\Leftrightarrow H) = \ell(G)\cup\ell(H)$;
  (I) $\ell(\forall xF) = \ell(\exists xF) = \ell(F)\backslash\{x\}$.

- Une formule F est dite **close** si elle ne possède pas de variables libres.

- Exemple :
  - La formule $\forall x\forall z(R(x,z)\Rightarrow\exists y(R(y,z)\vee y=z))$ est close.

- Nous pouvons maintenant parler du sens que l'on donne aux formules.

- Pour donner un sens aux formules, il faut fixer un sens aux symboles de la signature, et c'est l'objet de la notion de structure.

Structures

- Soit $\Sigma = (\mathscr{C},\mathscr{F},\mathscr{R})$ une signature.

- Une **structure $\mathfrak{M}$ de signature** Σ est la donnée :
  - d'un ensemble non-vide M, appelé **ensemble de base**, ou **domaine** de la structure ;
  - d'un élément de M, noté $c^{\mathfrak{M}}$, pour chaque symbole de constante $c\in\mathscr{C}$;
  - d'une fonction, notée $f^{\mathfrak{M}}$, de $M^n\to M$ pour chaque symbole de fonction $f\in\mathscr{F}$ d'arité n ;
  - d'un sous-ensemble, noté $R^{\mathfrak{M}}$, de M^n pour chaque symbole de relation $R\in\mathscr{F}$ d'arité n.

- On dit que la constante c (respectivement la fonction f, la relation R) est **interprétée par** $c^{\mathfrak{M}}$ (resp. $f^{\mathfrak{M}}$, $R^{\mathfrak{M}}$).

- Une structure est parfois aussi appelée une **réalisation**.

Exemples

- Exemples :
  - On peut obtenir une réalisation de la signature Σ précédente en prenant comme ensemble de base les entiers, 0 interprété par l'entier 0, 1 par l'entier 1, s par la fonction qui à l'entier x associe $x+1$, $+$ par la fonction addition, *Impair* par les entiers impairs, *Premier* par les entiers premiers, $=$ par l'égalité, et $<$ par la relation $\{(x,y)|x<y\}$.
    - On peut la noter $(\mathbb{N},=,<,Impair,Premier,s,+,0,1)$.
  - On peut obtenir une réalisation de la signature $\mathscr{L}_2$ en considérant l'ensemble de base $\mathbb{R}$ des réels, en interprétant R comme la relation d'ordre $\leq$ sur les réels, la fonction f comme la fonction qui à x associe $x+1$, les fonctions g et h comme l'addition et la multiplication, les constantes c et d comme 0 et 1.
    - On peut la noter $(\mathbb{R},\leq,s,+,\times,0,1)$.

- On va ensuite utiliser la notion de structure pour interpréter

  1. les termes,
  2. les formules atomiques,
  3. puis inductivement les formules,

  comme on peut s'y attendre.

- Une **valuation** v est une fonction de l'ensemble des variables $\mathcal{V}$ dans le domaine M de la structure.
- Etant donnée une valuation v, l'interprétation :
  - d'un terme est un élément de l'ensemble de base de la structure :
    - les termes désignent donc des éléments de la structure.
  - d'une formule atomique est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.
    - les formules atomiques désignent donc des relations entre éléments de la structure.
  - d'une formule est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.

Formellement : interprétation des termes

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathscr{C}, \mathscr{F}, \mathscr{R})$ et v une valuation.

Définition
*L'**interprétation** $t^{\mathfrak{M}}$ **du terme** t **en** v, aussi notée $t^{\mathfrak{M}}$ est définie inductivement de la façon suivante :*

- *(B) toute variable est interprétée par sa valeur dans la valuation :*
  - *c-à-d : si t est la variable $x_i \in \mathcal{V}$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $v(x_i)$;*
- *(B) toute constante est interprétée par son interprétation dans la structure :*
  - *c-à-d : si t est la constante $c \in \mathscr{C}$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $c^{\mathfrak{M}}$;*
- *(I) chaque symbole de fonction est interprété par son interprétation dans la structure.*
  - *c-à-d : si t est le terme $f(t_1, \cdots, t_n)$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}})$, où $t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}}$ sont les interprétations respectives des termes $t_1, \cdots, t_n$.*

Exemples

- Exemples :
  - Soit $\mathscr{N}$ la structure $(\mathbb{N}, \leq, s, +, \times, 0, 1)$ de signature $\mathscr{L}_2 = (\{c, d\}, \{f, g, h\}, \{R\})$.
    - l'interprétation du terme $h(d, x)$ pour une valuation telle que $v(x) = 2$ est 2.
    - l'interprétation du terme $f(g(d, h(y, z)))$ pour une valuation telle que $v(y) = 2, v(z) = 3$ est 8.

Interprétation des formules atomiques

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathscr{C}, \mathscr{F}, \mathscr{R})$ et v une valuation.

Définition

La valuation v ***satisfait la formule atomique*** *$R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ de variables libres $x_1, \cdots, x_k$ si*

$$(t_1^{\mathfrak{M}}, t_2^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}}) \in R^{\mathfrak{M}},$$

où $R^{\mathfrak{M}}$ est l'interprétation du symbole R dans la structure.

Exemples

- Exemples :
  - Sur la structure Σ précédente $x < 1+1$ s'interprète par vrai en une valuation telle que $v(x) = 1$, et par faux en une valuation telle que $v(x) = 5$. La formule atomique $0 = s(0)$ s'interprète par faux.
  - Sur la structure $\mathscr{N}$, $R(f(c), h(c, f(d)))$ s'interprète par faux.

Interprétation des formules

- Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathscr{C}, \mathscr{F}, \mathscr{R})$ et v une valuation.

Définition

L'expression "la valuation v satisfait la formule $F = F(x_1, \cdots, x_k)$", notée $v \models F$, se définit inductivement de la façon suivante :

(B) elle a déjà été définie pour une formule atomique ;

(I) $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sont interprétés exactement comme dans le calcul propositionnel.

- *exemple du $\vee$: si F est de la forme $(G \vee H)$, alors $v \models F$ ssi $v \models G$ ou $v \models H$;*

(I) $\exists x$ et $\forall x$ sont interprétés comme des quantifications existentielles et universelles :

- *si F est de la forme $\forall x_0 G(x_0, x_1, \cdots, x_k)$, alors $v \models F$ ssi pour tout $a_0 \in M$, $v' \models G$, où v' est la valuation telle que $v'(x_0) = a_0$, et $v'(x) = v(x)$ pour tout $x \neq x_0$.*
- *si F est de la forme $\exists x_0 G(x_0, x_1, \cdots, x_k)$, alors $s \models F$ ssi pour un certain $a_0 \in M$, $v' \models G$, où v' est la valuation telle que $v'(x_0) = a_0$, et $v'(x) = v(x)$ pour tout $x \neq x_0$.*

- Pour une formule close F, la satisfaction de F dans la structure $\mathfrak{M}$ ne dépend pas de la valuation v.
- On dit alors que $\mathfrak{M}$ est un modèle de F, lorsque F est satisfaite sur $\mathfrak{M}$.

Théories

- Une **théorie** $\mathscr{T}$ est un ensemble de formules closes sur une signature donnée. Les formules d'une théorie sont appelées des **axiomes** de cette théorie.
- Une structure $\mathfrak{M}$ est un **modèle de la théorie** $\mathscr{T}$ si $\mathfrak{M}$ est un modèle de chacune des formules de la théorie.
- Une théorie est dite **consistante** si elle possède un modèle.

Groupe

- Un groupe est un modèle égalitaire[3] de la théorie constituée des deux formules :

$$\forall x \forall y \forall z \; x * (y * z) = (x * y) * z \tag{1}$$
$$\exists e \forall x \; (x * e = e * x = x \wedge \exists y (x * y = y * x = e)) \tag{2}$$

sur la signature $\Sigma = (\emptyset, \{*\}, \{=\})$, où $*$ et $=$ sont d'arité 2.

3. On impose à l'interprétation de $=$ de correspondre à l'égalité.

Corps

- Un **corps commutatif** est un modèle égalitaire de la théorie constituée des formules

$$\forall x \forall y \forall z \; (x + (y + z) = (x + y) + z) \tag{3}$$
$$\forall x \forall y (x + y = y + x) \tag{4}$$
$$\forall x (x + 0 = x) \tag{5}$$
$$\forall x \exists y (x + y = 0) \tag{6}$$
$$\forall x \forall y \forall z \; x * (y + z) = x * y + x * z \tag{7}$$
$$\forall x \forall y \forall z \; ((x * y) * z) = (x * (y * z)) \tag{8}$$
$$\forall x \forall y \; (x * y = y * x) \tag{9}$$
$$\forall x \; (x * 1 = x) \tag{10}$$
$$\forall x \exists y (x = 0 \vee x * y = 1) \tag{11}$$
$$\neg 1 = 0 \tag{12}$$

sur une signature avec deux symboles de constantes 0 et 1, deux symboles de fonctions $+$ et $*$ d'arité 2, et le symbole de relation $=$ d'arité 2.

Le prochain épisode : le monde est beau

- On peut construire un (des) système(s) de preuve valide(s) et complet(s) :
  - Notons : $\mathscr{T} \vdash F$ pour "F se prouve à partir de $\mathscr{T}$" dans ce système.
  - Notons : $\mathscr{T} \models F$ pour "tout modèle de $\mathscr{T}$ est un modèle de F."
- C'est-à-dire :

Théorème (Validité)
Soit $\mathscr{T}$ une théorie. Soit F une formule close.
Si $\mathscr{T} \vdash F$ alors $\mathscr{T} \models F$.

Théorème (Complétude)
Soit $\mathscr{T}$ une théorie. Soit F une formule close.
Si $\mathscr{T} \models F$ alors $\mathscr{T} \vdash F$.

Exprimez vous.

Page du cours.

Commentaires, avis sur les cours et les PCs.

- Page du cours: https://moodle.polytechnique.fr/course/view.php?id=14459.
- Commentaires, avis sur les cours et les PCs. www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

ANNEXES

- Démonstration par la topologie (du sens non-trivial de la version 1 du théorème de compacité).
  - L'espace topologique $\{0,1\}^{\mathscr{P}}$ (muni de la topologie produit) est un espace compact, car il s'obtient comme un produit de compacts (Théorème de Tychonoff).
  - Pour chaque formule propositionnelle $F \in \Sigma$, l'ensemble $\overline{F}$ des valuations qui la satisfont est un ouvert dans $\{0,1\}^{\mathscr{P}}$, car la valeur de vérité d'une formule ne dépend que d'un nombre fini de variables, celles qui apparaissent dans la formule.
  - Il est également fermé puisque celles qui ne satisfont pas F sont celles qui satisfont $\neg F$.
  - Dire que $\{0,1\}^{\mathscr{P}}$ est compact est équivalent à dire que de toute famille de fermés dont l'intersection est vide on peut extraire une famille finie dont l'intersection est aussi vide ((complémentaire de la) propriété de Borel-Lebesgue).
  - L'hypothèse du théorème entraîne que toute intersection d'un nombre fini de $\overline{F}$ pour $F \in \Sigma$ est non-vide.
  - L'intersection de tous les $\overline{F}$ pour $F \in \Sigma$ est donc non vide, ce qui prouve le résultat.

Retour

- Démonstration sans topologie du théorème de compacité :
  - Considérons $\mathscr{P} = \{p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots\}$ une énumération de $\mathscr{P}$.
  - Lemme : supposons qu'il existe une application v de $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ dans $\{0,1\}$ telle que tout sous-ensemble fini de Σ ait un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n$ prennent les valeurs $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$. Alors on peut étendre v à $\{p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}\}$ avec la même propriété.
    - En effet, si $v(p_{n+1}) = 0$ ne convient pas, alors il existe un ensemble fini U_0 de Σ qui ne peut pas être satisfait quand $p_1, \cdots, p_n, p_{n+1}$ prennent les valeurs respectives $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$ et 0.
    - Si U est un sous-ensemble fini quelconque de Σ, alors d'après l'hypothèse faite sur v, $U_0 \cup U$ a un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n$ prennent les valeurs $v(p_1), \cdots, v(p_n)$.
    - Dans ce modèle, la proposition p_{n+1} prend donc la valeur 1. Autrement dit, tout sous-ensemble fini U de Σ a un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n, p_{n+1}$ prennent les valeurs respectives $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$ et 1.
    - Dit encore autrement, soit $v(p_{n+1}) = 0$ convient auquel cas on peut fixer $v(p_{n+1}) = 0$, soit $v(p_{n+1}) = 0$ ne convient pas auquel cas on peut fixer $v(p_{n+1}) = 1$ qui convient.

- En utilisant ce lemme, on définit ainsi une valuation v telle que, par récurrence sur n, pour chaque n, tout sous-ensemble fini de Σ a un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n$ prennent les valeurs $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$.

- Il en résulte que v satisfait Σ :

  - En effet, soit F une formule de Σ.
  - F ne dépend que d'un ensemble fini $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_k}$ de variables propositionnelles (celles qui apparaissent dans F).
  - En considérant $n = \max(i_1, i_2, \cdots, i_k)$, chacune de ces variables p_{i_j} est parmi $\{p_1, \cdots, p_n\}$.
  - Nous savons alors que le sous ensemble fini $\{F\}$ réduit à la formule F admet un modèle dans lequel $p_1, \cdots, p_n$ prennent les valeurs $v(p_1)$, ..., $v(p_n)$, i.e. F est satisfaite par v.

Retour