

École Polytechnique

CSC_41011

Les bases de la programmation et de l'algorithmique


Jean-Christophe Filliâtre

graphes (1/2)

en suivant les liens sur fr.wikipedia.org,

peut-on aller de la page

Pomme

 Pour les articles homonymes, voir *Pomme (homonymie)*.

La **pomme** est le fruit du **pommier**. Elle est comestible et a un goût sucré ou acidulé selon les variétés. Elle fait partie des fruits les plus consommés dans le monde.

Généralement, on distingue trois types de pommes alimentaires :

- les **pommes à cidre** ;
- les **pommes de table** ou pommes à **couteau** ;
- les **pommes à cuire** qui appartiennent à un des deux premiers types mais supportent bien la cuisson.



à la page

Linguistique

La **linguistique** est la *discipline* s'intéressant à l'étude du langage. Elle se distingue de la *grammaire*, dans la mesure où elle n'est pas *prescriptive* mais *descriptive*.

On trouve des témoignages de réflexions sur le langage dès l'Antiquité avec des philosophes comme *Platon*. Cependant il faut attendre le *xx^e siècle* pour voir se dégager une approche *scientifique* autour des faits de langues. *Ferdinand de Saussure* est réputé avoir grandement contribué à cet effort de rationalisation, notamment avec son influent *Cours de linguistique générale* (1916) qui est devenu un classique dans ce domaine ^{1,2} et "a imposé la *conception structurale* du langage qui domine largement la linguistique contemporaine en dépit des conflits d'écoles."³

on peut répondre à cette question avec un **parcours de graphe** qui s'écrit en cinq lignes de code

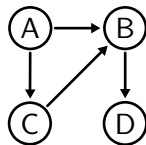
Définition

Un **graphe orienté** est un ensemble de **sommets** V et un ensemble d'**arcs** $E \subseteq V \times V$.

exemple

$$V = \{A, B, C, D\}$$

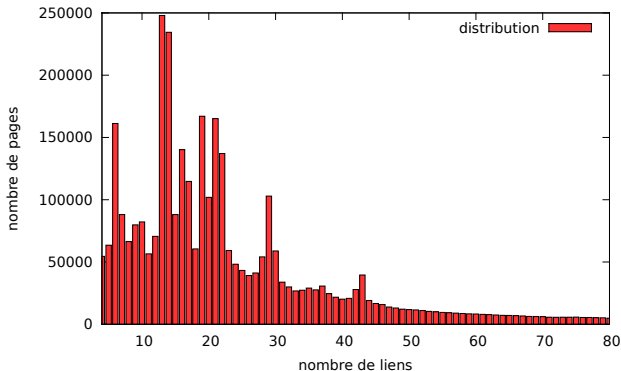
$$E = \{(A, B), (A, C), (C, B), (B, D)\}$$



l'ensemble des pages de fr.wikipedia.org

$$|V| = 6\,042\,266$$

$$|E| = 142\,747\,529$$



réseau routier

villes / routes entre ces villes

réseau informatique

machines / connexions entre ces machines

réseau social

personnes / contacts
mathématiciens / coauteurs

labyrinthe

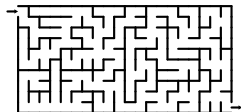
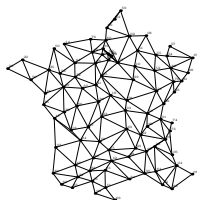
salles / portes

carte

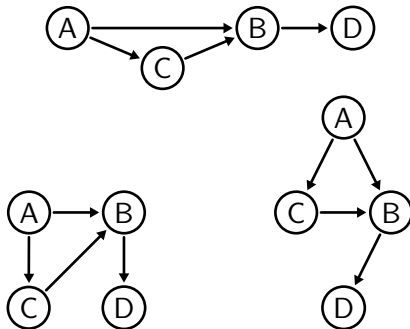
régions, pays, etc. / contiguïté

jeu

configurations / coups valides
(un ou plusieurs joueurs)
(graphe possiblement infini)



peu importe le dessin

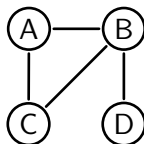


seuls importent V et E

si E est symétrique, on parle de **graphe non orienté**

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{ (A, B), (B, A), \\ (A, C), (C, A), \\ (C, B), (B, C), \\ (B, D), (D, B) \}$$



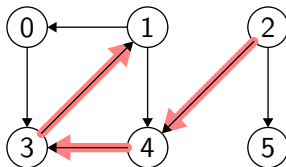
(cours d'aujourd'hui : uniquement des graphes orientés)

on note $u \rightarrow v$ pour $(u, v) \in E$

Définition

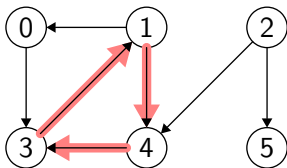
Un **chemin** de longueur n du sommet x_0 au sommet x_n est une séquence $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_n$. On note $x_0 \rightarrow^* x_n$.

Un **chemin simple** est un chemin sans répétition d'arc.

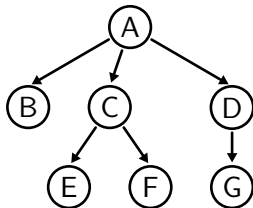
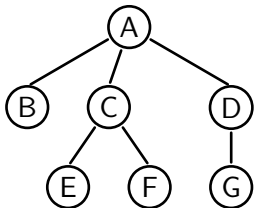


Définition

Un **cycle** est un chemin simple de u à u de longueur ≥ 2 .



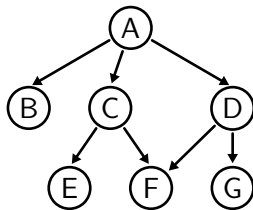
un arbre est un cas particulier de graphe



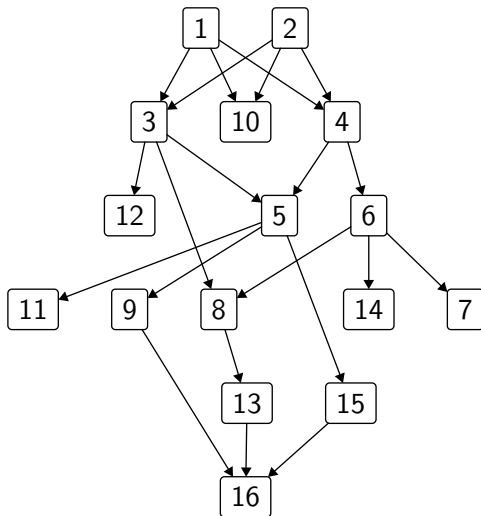
en particulier, c'est un graphe sans cycle

Définition

Un graphe orienté acyclique est appelé un **DAG** (pour *Directed Acyclic Graph*).



dépendances entre les chapitres du poly de CSC_41011



représentation en machine

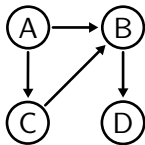
```
class Graph<V> { // V est le type des sommets
    Graph()           // graphe vide
    void addVertex(V u) // ajouter un sommet u
    void addEdge(V u, V v) // ajouter l'arc u->v
    void removeEdge(V u, V v) // supprimer u->v

    boolean hasEdge(V u, V v) // est-ce que u->v existe ?
    Set<V> vertices() // tous les sommets
    Set<V> successors(V u) // tous les voisins de u

    ...
}
```

solution 1 : matrice d'adjacence

si $V = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, on peut représenter un graphe par sa **matrice d'adjacence**



	A	B	C	D
A	false	true	true	false
B	false	false	false	true
C	false	true	false	false
D	false	false	false	false

```
class AdjMatrix {  
    private int N;                // les sommets sont 0,...,N-1  
    private boolean[][] m;  
    ...  
}
```

solution 1 : matrice d'adjacence

un graphe à N sommets, sans arc

```
AdjMatrix(int N) {  
    this.N = N;  
    this.m = new boolean[N][N]; // initialisé à false  
}
```

tester/ajouter/supprimer un arc est immédiat

```
boolean hasEdge(int u, int v) { return this.m[u][v]; }  
void addEdge(int u, int v) { this.m[u][v] = true; }  
void removeEdge(int u, int v) { this.m[u][v] = false; }
```

(bien sûr, il faudrait tester $0 \leq u, v < N$ proprement)

parcourir tous les sommets

```
for (int u = 0; u < N; u++)  
    ...
```

parcourir tous les voisins de u

```
for (int v = 0; v < N; v++)  
    if (this.m[u][v])  
        ...
```

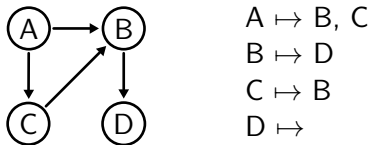
- en **espace** : $\approx N^2$ octets

exemple : $N = 1024 \Rightarrow 1 \text{ Mo}$

- en **temps**

ajouter $u \rightarrow v$	supprimer $u \rightarrow v$	tester $u \rightarrow v$	parcourir tous les sommets	parcourir les voisins de u
$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(N)$	$O(N)$

à chaque sommet, on associe la **liste de ses voisins**



par exemple avec une table de hachage

```
class AdjList<V> {  
    private HashMap<V, LinkedList<V>> adj;
```

```
AdjList() {  
    this.adj = new HashMap<V, LinkedList<V>>();  
}
```

```
void addVertex(V u) {  
    this.adj.put(u, new LinkedList<V>()); // O(1)  
}  
void addEdge(V u, V v) {  
    this.adj.get(u).add(v); // O(1)  
}  
boolean hasEdge(V u, V v) {  
    return this.adj.get(u).contains(v); // plus cher (liste)  
}  
void removeEdge(V u, V v) {  
    this.adj.get(u).remove(v); // plus cher (liste)  
}
```

parcourir tous les sommets

```
for (V u: this.adj.keySet())  
    ...
```

parcourir tous les voisins de u

```
for (V v: this.adj.get(u)) // moins cher  
    ...
```

- en **espace** : $\approx 48V + 40E$ octets

exemple : $V = 1024, E = 2V \Rightarrow 128$ ko

- en **temps**

ajouter $u \rightarrow v$	supprimer $u \rightarrow v$	tester $u \rightarrow v$	parcourir tous les sommets	parcourir les voisins de u
$O(1)$	$O(\delta(u))$	$O(\delta(u))$	$O(V)$	$O(\delta(u))$

où $\delta(u)$ est le nombre de voisins de u

solution 3 : ensembles d'adjacence

le poly propose une alternative utilisant un **ensemble** plutôt qu'une liste

```
class AdjSet<V> {  
    private HashMap<V, HashSet<V>> adj;
```

maintenant optimal

ajouter	supprimer	tester	parcourir tous	parcourir les
$u \rightarrow v$	$u \rightarrow v$	$u \rightarrow v$	les sommets	voisins de u
$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(V)$	$O(\delta(u))$

- matrice d'adjacence
 - adapté aux graphes denses
(plus compact que les listes/ensembles pour $N < 150$)
 - nécessite $V = \{0, 1, \dots, N - 1\}$
- listes/ensembles d'adjacence
 - adapté aux graphes creux
 - V n'a pas besoin d'être fixé

aujourd'hui, on cherche à répondre aux questions suivantes

- quels sont tous les sommets atteignables depuis u ?
- existe-t-il un chemin de u à v ?
- quel est le plus court chemin de u à v ?
- existe-t-il un cycle partant de u ?

on y répond avec des algorithmes de **parcours** de graphe

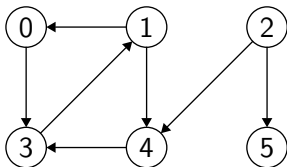
parcours en profondeur

le **parcours en profondeur** (en anglais *depth-first search* ou DFS)

applique le principe du rebroussement (*backtracking*) :

- tant qu'on peut progresser en suivant un arc, on le fait
- sinon, on fait machine arrière

il peut exister des cycles



pour éviter de « tourner en rond », on doit **marquer** les sommets déjà vus

on choisit pour cela une table de hachage

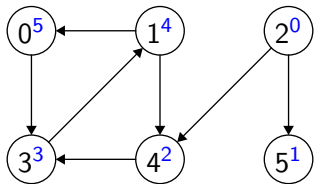
```
class DFS<V> {  
    private Graph<V> g;  
    private HashSet<V> visited;  
  
    DFS(Graph<V> g) {  
        this.g = g;  
        this.visited = new HashSet<V>();  
    }  
}
```

le parcours en profondeur est écrit récursivement

```
void dfs(V v) {  
    // si v a déjà été atteint, on ne fait rien  
    if (this.visited.contains(v)) return;  
    // sinon, on le marque comme atteint  
    this.visited.add(v);  
    // puis on lance un parcours sur ses voisins  
    for (V w : this.g.successors(v))  
        dfs(w);  
}
```

(il est crucial de marquer v **avant** de considérer ses voisins)

en partant du sommet 2

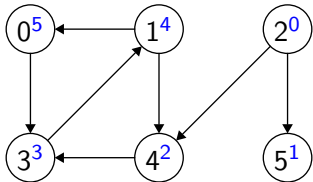


dfs(2)

visited :
2

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2

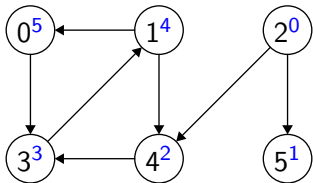


dfs(2)
dfs(5)

visited :
2, 5

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2

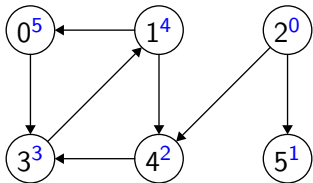


dfs(2)
dfs(4)

visited :
2, 5, 4

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2



```

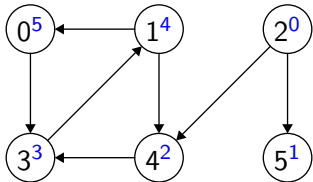
dfs(2)
  dfs(4)
    dfs(3)
  
```

```

visited :
  2, 5, 4, 3
  
```

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2



```

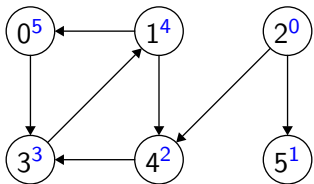
dfs(2)
  dfs(4)
    dfs(3)
      dfs(1)
  
```

```

visited :
  2, 5, 4, 3, 1
  
```

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2



```

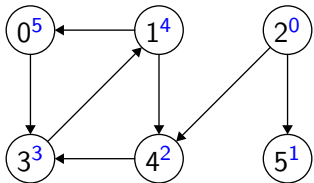
dfs(2)
  dfs(4)
    dfs(3)
      dfs(1)
        dfs(4)
  
```

```

visited :
  2, 5, 4, 3, 1
  
```

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2



```

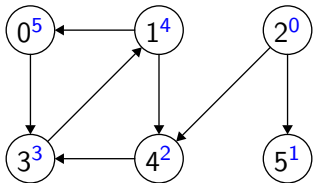
dfs(2)
  dfs(4)
    dfs(3)
      dfs(1)
        dfs(0)
  
```

```

visited :
  2, 5, 4, 3, 1, 0
  
```

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2



```

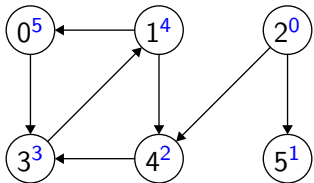
dfs(2)
  dfs(4)
    dfs(3)
      dfs(1)
        dfs(0)
          dfs(3)
  
```

```

visited :
  2, 5, 4, 3, 1, 0
  
```

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2



```

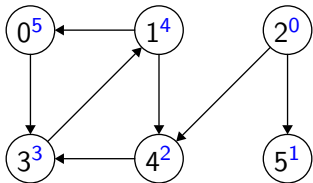
dfs(2)
  dfs(4)
    dfs(3)
      dfs(1)
        dfs(0)
  
```

```

visited :
  2, 5, 4, 3, 1, 0
  
```

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2



```

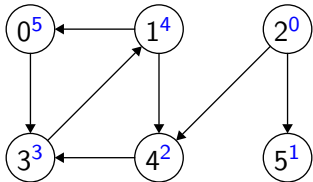
dfs(2)
  dfs(4)
    dfs(3)
      dfs(1)
  
```

```

visited :
  2, 5, 4, 3, 1, 0
  
```

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2



```

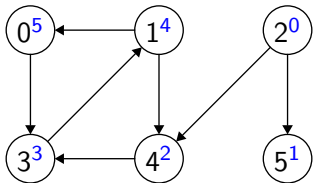
dfs(2)
  dfs(4)
    dfs(3)
  
```

```

visited :
  2, 5, 4, 3, 1, 0
  
```

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2

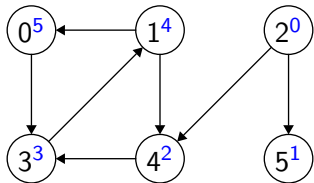


```
dfs(2)
  dfs(4)
```

```
visited :
  2, 5, 4, 3, 1, 0
```

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

en partant du sommet 2



dfs(2)

visited :

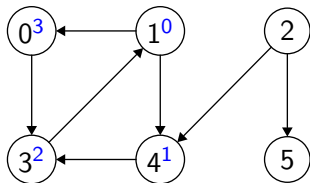
2, 5, 4, 3, 1, 0

(les exposants indiquent l'ordre de découverte)

chaque arc $v \rightarrow w$ est considéré au plus une fois,
la première fois que dfs est appelée sur v

d'où une complexité $O(E)$, optimale

en partant cette fois du sommet 1



`visited = {1, 4, 3, 0}`

il n'y a pas de chemin $1 \rightarrow^* 2$, ni de chemin $1 \rightarrow^* 5$

`dfs(u)` détermine l'ensemble des sommets accessibles depuis la source `u`

ce sont exactement les sommets dans `visited` au final

Propriété

Après $\text{dfs}(u)$, si $u \rightarrow^* v$ alors $v \in \text{visited}$.

par récurrence sur la longueur du chemin

- longueur 0 : alors $v = u$ et c'est immédiat
- longueur $n > 0$: on a $u \rightarrow^{n-1} w \rightarrow v$
par hypothèse de récurrence, $w \in \text{visited}$
 $\Rightarrow \text{dfs}(w)$ a été appelé
 \Rightarrow l'arc $w \rightarrow v$ a été examiné
 $\Rightarrow \text{dfs}(v)$ a été appelé
 $\Rightarrow v \in \text{visited}$

Propriété

L'appel à $\text{dfs}(u)$ n'ajoute à visited que des sommets v tels que $u \rightarrow^* v$.

par récurrence sur le nombre d'appels à dfs

- cas de base
 $\text{dfs}(u)$ ajoute u à visited (éventuellement) et on a bien $u \rightarrow^* u$
- sinon : $\text{dfs}(u)$ appelle $\text{dfs}(w)$ avec $u \rightarrow w$
par hypothèse de récurrence, $\text{dfs}(w)$ n'ajoute que des sommets tels que $w \rightarrow^* v$, donc que des sommets tels que $u \rightarrow^* v$

on peut répondre facilement à la question

existe-t-il un chemin de u à v ?

```
boolean existsPath(V u, V v) {  
    this.visited.clear();  
    dfs(u);  
    return this.visited.contains(v);  
}
```

et si on veut exhiber le chemin de u à v qui a été trouvé?

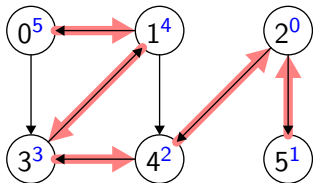
solution : au lieu d'un simple booléen, $\text{visited}(v)$ donne le sommet u tel que l'arc $u \rightarrow v$ a permis d'atteindre v

on remplace

```
private HashSet<V> visited;
```

par

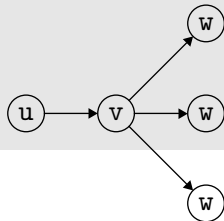
```
private HashMap<V, V> visited;
```



```
visited = {
  2 ↦ null,
  5 ↦ 2,
  4 ↦ 2,
  3 ↦ 4,
  1 ↦ 3,
  0 ↦ 1,
}
```

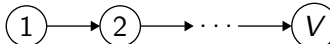
les arcs dans `visited` forme un arbre, appelé **arbre couvrant**
(voir poly page 208)

```
// DFS à partir du sommet v, en arrivant du sommet u
void dfs(V u, V v) {
    if (this.visited.containsKey(v)) return;
    this.visited.put(v, u);
    for (V w : this.g.successors(v))
        dfs(v, w);
}
```



```
// DFS à partir du sommet v
void dfs(V v) {
    dfs(null, v);
}
```

la taille de pile de dfs peut atteindre $O(V)$

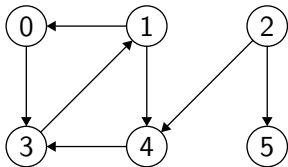
sur un graphe de la forme  $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \dots \rightarrow \textcircled{V}$

d'où `StackOverflowError` pour V de l'ordre de quelques milliers

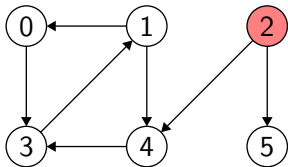
on peut cependant se passer de récursivité, avec une **pile explicite**

```
void dfs(V u) {
    Stack<V> stack = new Stack<V>();
    stack.push(u);
    while (!stack.isEmpty()) {
        V v = stack.pop();
        if (this.visited.contains(v)) continue;
        this.visited.add(v);
        for (V w : this.g.successors(v))
            stack.push(w);
    }
}
```

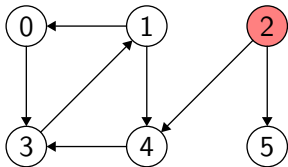
(les voisins w ne sont pas examinés dans le même ordre, mais ce n'est pas grave)



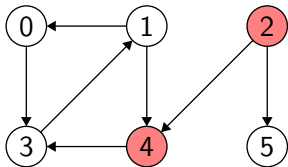
visited	stack↓
	2



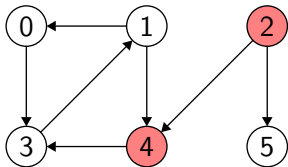
visited	stack↓
2	



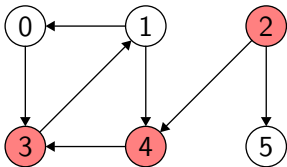
visited	stack↓
2	5
	4



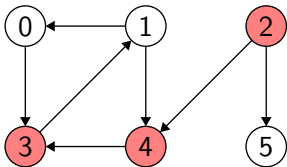
visited	stack↓
2	5
4	



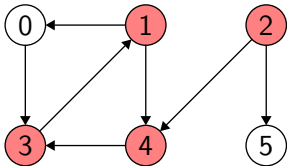
visited	stack↓
2	5
4	3



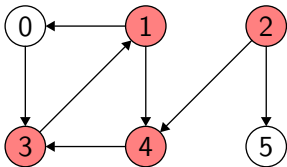
visited	stack↓
2	5
4	
3	



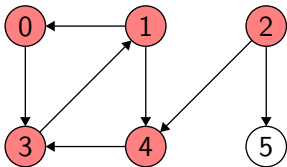
visited	stack↓
2	5
4	1
3	



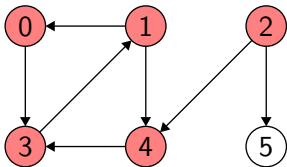
visited	stack↓
2	5
4	
3	
1	



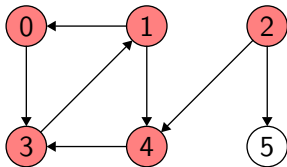
visited	stack↓
2	5
4	4
3	0
1	



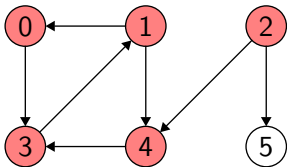
visited	stack↓
2	5
4	4
3	
1	
0	



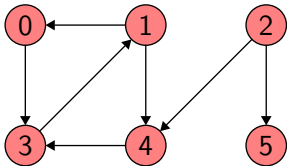
visited	stack↓
2	5
4	4
3	3
1	
0	



visited	stack↓
2	5
4	4
3	
1	
0	



visited	stack↓
2	5
4	
3	
1	
0	



visited	stack↓
2	
4	
3	
1	
0	
5	

on sait donc répondre à la question

existe-t-il un chemin de u à v ?

et même le construire, le cas échéant

pour répondre à la question

existe-t-il un **cycle** partant de u ?

il faut modifier le parcours en profondeur

deux états (non atteint / atteint) ne suffisent plus

il faut **trois états** (non atteint / en cours de visite / terminé)

cf exercice 115 du poly

quel est le **plus court** chemin de u à v ?
(en nombre d'arcs)

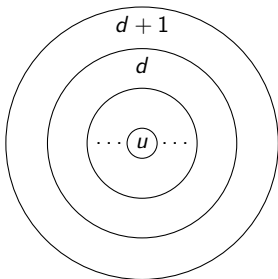
parcours en largeur

parcourir le graphe « en cercles concentriques » à partir de u

- d'abord les sommets à distance 1
- puis les sommets à distance 2
- etc.

à chaque instant, on a

- des sommets à distance d en cours d'exploration
- des sommets à distance $d + 1$ à explorer ensuite



d'où l'idée d'utiliser une **file**

←

sommets à distance d	sommets à distance $d + 1$
------------------------	----------------------------

 ←

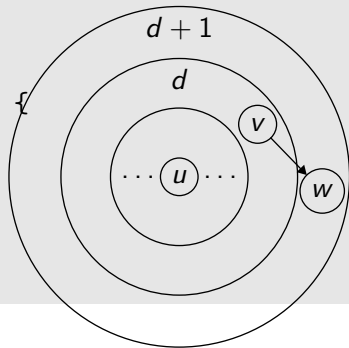
```
class BFS<V> {           // en anglais, Breadth-First Search
    private Graph<V> g;
    private HashSet<V> visited;

    BFS(Graph<V> g) {
        this.g = g;
        this.visited = new HashSet<V>();
    }
}
```

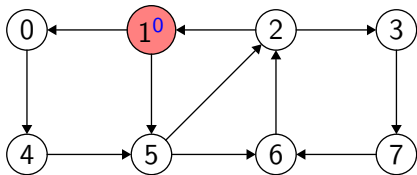
```

void bfs(V u) {
    Queue<V> q = new LinkedList<V>(); // une file
    q.add(u);
    visited.add(u);
    while (!q.isEmpty()) {
        V v = q.poll();
        for (V w : this.g.successors(v))
            if (!this.visited.contains(w)) {
                q.add(w);
                this.visited.add(w);
            }
    }
}

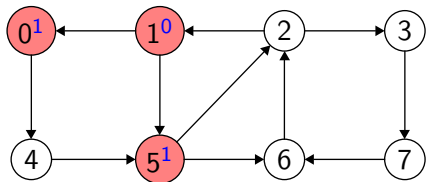
```



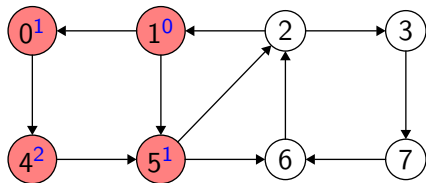
(invariant : dans la file \Rightarrow dans visited)



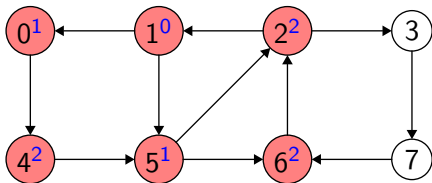
visited	queue ↑
1	1



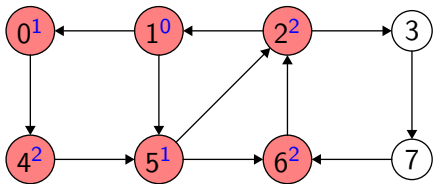
visited	queue ↑
1	0
0	5
5	



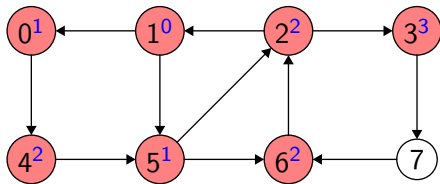
visited	queue ↑
1	5
0	4
5	
4	



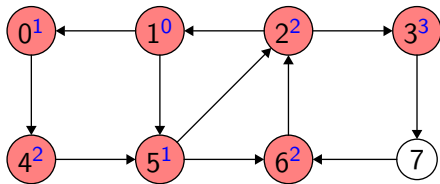
visited	queue ↑
1	4
0	2
5	6
4	
2	
6	



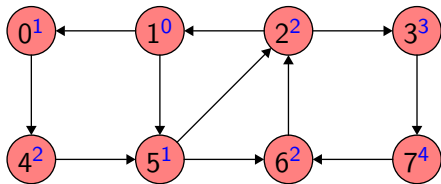
visited	queue ↑
1	2
0	6
5	
4	
2	
6	



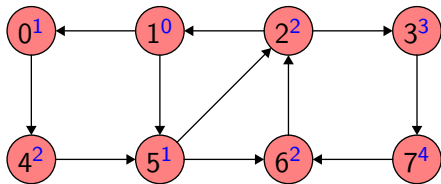
visited	queue ↑
1	6
0	3
5	
4	
2	
6	
3	



visited	queue ↑
1	3
0	
5	
4	
2	
6	
3	



visited	queue ↑
1	7
0	
5	
4	
2	
6	
3	
7	



visited	queue ↑
1	
0	
5	
4	
2	
6	
3	
7	

- chaque sommet est mis dans la file au plus une fois
- chaque arc est considéré au plus une fois

d'où une complexité $O(E)$

si on souhaite calculer la **distance** de u à v

on remplace

```
private HashSet<V> visited;
```

par une table donnant la distance des sommets déjà atteints

```
private HashMap<V, Integer> distance;
```

si on souhaite construire le plus court chemin trouvé

on procède comme pour DFS

(une table donnant le prédécesseur dans le chemin)

cf exercice 110 du poly

avec *Simple English Wikipedia* ($V = 151\,625$, $E = 4\,497\,295$)

cherchons les chemins de la page '*Alan Turing*' à la page '*Albert Einstein*'

avec DFS, on trouve un chemin de longueur 4077 :

```
Alan_Turing -> Enigma_(machine) -> Cypher -> ...  
... ->  
Poincaré_conjecture -> Henri_Poincaré -> Albert_Einstein
```

avec BFS, on trouve un chemin de longueur 3 :

```
Alan_Turing -> Cyanide -> Atom -> Albert_Einstein
```

c'est le plus court

(mais il peut y avoir d'autres chemins de longueur 3)

autres applications

problème : étant donné un DAG, énumérer ses sommets dans un ordre compatible avec l'adjacence

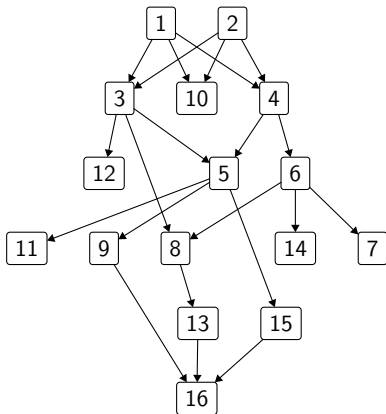
c'est-à-dire, si $u \rightarrow v$, alors u doit apparaître avant v dans l'énumération

1. créer une liste pour le résultat
2. pour chaque sommet v non encore visité
 - 2.1 faire un parcours en profondeur à partir de v
 - 2.2 ajouter chaque sommet au **début** de la liste
après avoir parcouru ses voisins

sur les chapitres du poly, on obtient
par exemple

```
2 1 10 4 6 14 7 3
12 8 13 5 15 11 9 16
```

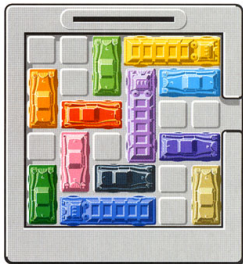
note : ce n'est pas la seule solution



application 2 : résoudre un casse-tête

trouver la **plus courte** solution d'un casse-tête tel que

RUSH HOUR[®]

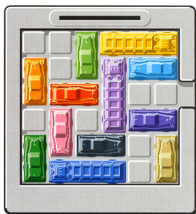


22

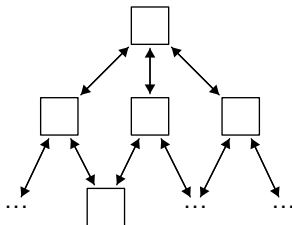
où on effectue des déplacements

on se déplace dans le graphe des états possibles du jeu

RUSH HOUR



22



inutile de construire ce graphe ; seule importe l'adjacence (successors)

le graphe pourrait même être infini (pour d'autres jeux)

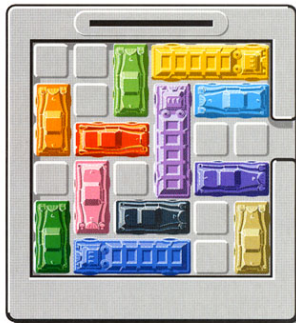
le parcours en profondeur trouvera une solution, s'il y en a une
elle sera sûrement inutilement compliquée

le parcours en **largeur**, en revanche,
trouvera une solution optimale en nombre de déplacements

les parcours de graphes

- répondent à des questions comme
 - existe-t-il un chemin ?
 - quel est le plus court chemin ?
- sont simples à programmer
- sont efficaces (linéaires en la taille du graphe)
- ont de multiples applications, en particulier comme ingrédient d'autres algorithmes

RUSH HOUR[®]



22

trouver la solution la plus courte

- **lire le poly**, chapitres
 - 15. définition et représentation
 - 16.1 parcours de graphes

il y a des **exercices** dans le poly
suggestions : ex 110 p 192, ex 115 p 196

- **bloc 10** : graphes (2/2)



dans deux semaines