École Polytechnique

INF411

Les bases de la programmation et de l'algorithmique

Jean-Christophe Filliâtre

algorithmes de tri

quels sont les dix mots les plus fréquents dans
Le tour du monde en quatre-vingts jours ?

une solution en une ligne

on peut le faire avec le *shell*, en une ligne !

```
cat file | tr -cs '[:alpha:]' '[\n*]' | sort | uniq -c | sort -rn
```

```
   2826 de
   1616 le
   1587 la
   1472 et
   1112 il
    952 les
    832 un
    788 en
    766 du
    670 Fogg
    ...
```

explication

on envoie le fichier sur la sortie standard

```
cat ltdme80j.txt
```

on remplace les caractères non-alphabétiques par un retour-charriot

```
| tr -cs '[:alpha:]' '[\n*]'
```

on trie les lignes par ordre alphabétique

```
| sort
```

on regroupe les lignes identiques, en les comptant (`-c`)

```
| uniq -c
```

on trie numériquement (`-n`), en ordre inverse (`-r`)

```
| sort -rn
```

on a utilisé ici deux tris

- un tri par ordre alphabétique (de 72 359 lignes)
- un tri numérique (de 9 269 lignes)

l'objet de l'amphi d'aujourd'hui est justement **le tri**

problème ouvert

on a fêté en 2021 les 60 ans du tri rapide [Hoare, 1961],
et pourtant il reste encore à trouver un tri pour les tableaux qui serait

- en place
- aussi rapide **en pratique** que le tri rapide
- stable

Définition

Un tri est **stable** s'il préserve l'ordre d'apparition des éléments égaux.

non significatif pour des éléments d'un type comme `int`

mais de manière générale on trie des objets d'un type `E` quelconque
(par exemple avec une méthode `compareTo`)

on peut alors avoir des éléments égaux (`compareTo` renvoie 0)
sans pour autant que ce soient identiquement les mêmes objets

exemple

un ensemble de films est donné par ordre chronologique

on trie selon la note moyenne des commentaires, avec un tri stable

résultat : à note égale, les films restent triés par ordre chronologique

(c'est une façon d'obtenir un ordre lexicographique)

mélanger

mélanger

comment mélanger N valeurs correctement ?

par exemple les N éléments d'un tableau

rappel : le mélange de Knuth (*Knuth shuffle*)

chaque élément i est échangé avec un élément $j \in [0, i]$

```
static<E> void shuffle(E[] a) {
  for (int i = 1; i < a.length; i++) {
    int j = (int)(Math.random() * (i + 1)); // j dans 0..i
    swap(a, i, j);
  }
}
```

le mélange de Knuth

- est facile à écrire
- est de complexité $O(N)$
- donne chacune des $N!$ permutations avec la même probabilité

complexité du problème du tri

optimalité

à quelle vitesse peut-on espérer trier ?

dit autrement : quelle est la meilleure complexité dans le pire des cas ?

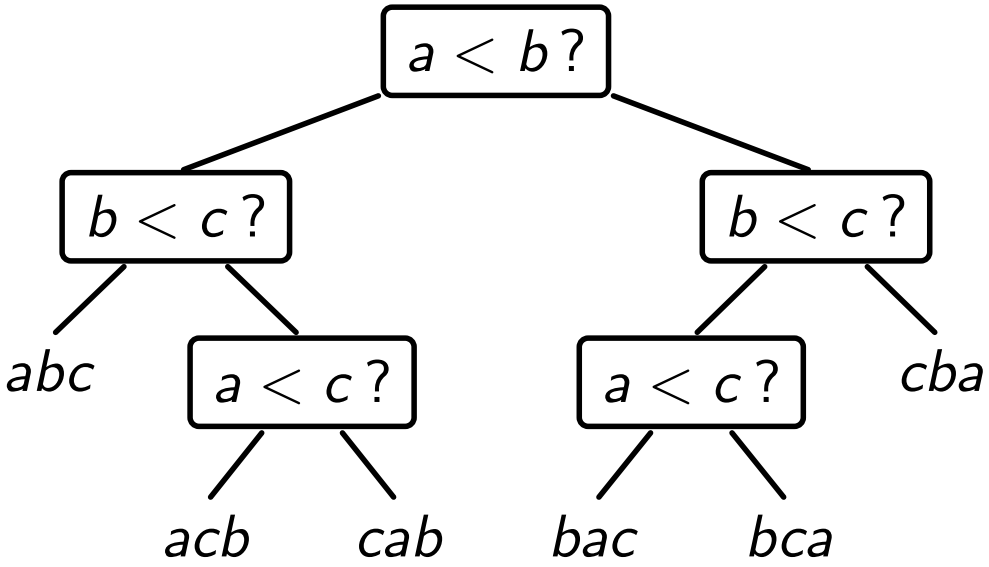
hypothèses

on suppose que l'algorithme

- ne procède que par des **comparaisons** entre deux éléments
- ne possède **aucune information** quant à la distribution

le coût sera justement le nombre de comparaisons effectuées

on peut trier trois valeurs a, b, c ainsi



(un tel arbre, appelé *questionnaire*, représente l'algorithme)

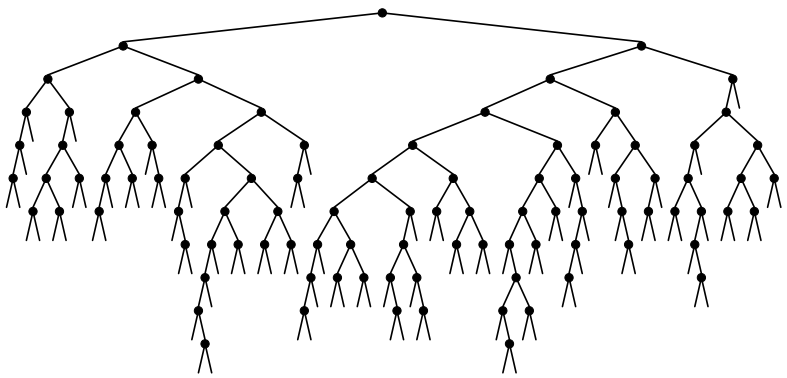
ici, on fait 2 ou 3 comparaisons selon l'entrée

donc **3 comparaisons** dans le pire des cas

on se persuade facilement que c'est optimal pour $N = 3$:
on ne peut trier trois valeurs avec au plus deux comparaisons

de manière générale

un algorithme qui trie N valeurs peut être vu comme un arbre binaire où chaque nœud est un test et chaque feuille une permutation



- il y a **au moins** $N!$ feuilles
- la complexité dans le pire des cas est la **hauteur** de cet arbre

minoration

$$N! \leq \text{nombre de feuilles} \leq 2^{\text{hauteur}}$$

donc

$$\text{hauteur} \geq \log_2(N!) = \sum_{1 \leq i \leq N} \log_2(i) \sim N \log_2(N)$$

complexité du problème du tri

aucun algorithme, procédant par comparaisons uniquement,
ne peut trier N valeurs en effectuant toujours moins que

$$N \log N$$

comparaisons

en particulier

le **tri par tas**, vu la semaine dernière, est optimal

cas particuliers

bien entendu, on peut faire mieux quand on possède une information supplémentaire sur les éléments

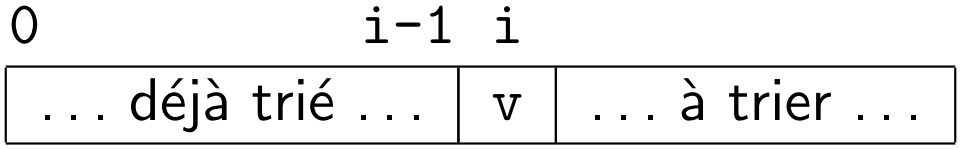
deux exemples :

- si les N éléments ne prennent que **deux valeurs** distinctes, alors on peut trier en $O(N)$
  (cf exercices 90, 91 et 92 du poly)

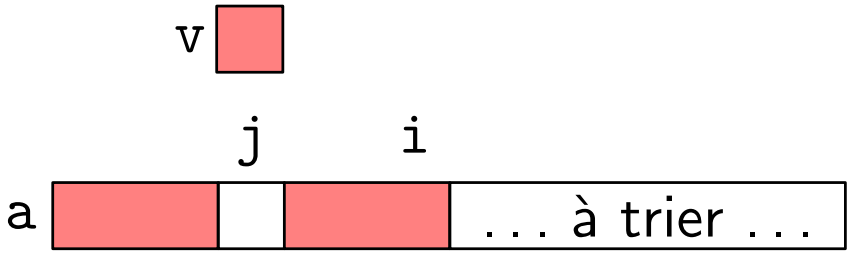
- si les éléments sont des **chaînes de caractères**, alors on peut trier en $O(N)$: on met toutes les chaînes dans un arbre de préfixes (amphi 6) puis on parcourt cet arbre

tri par insertion

le plus naturel : on insère successivement chaque nouvel élément parmi les éléments déjà triés

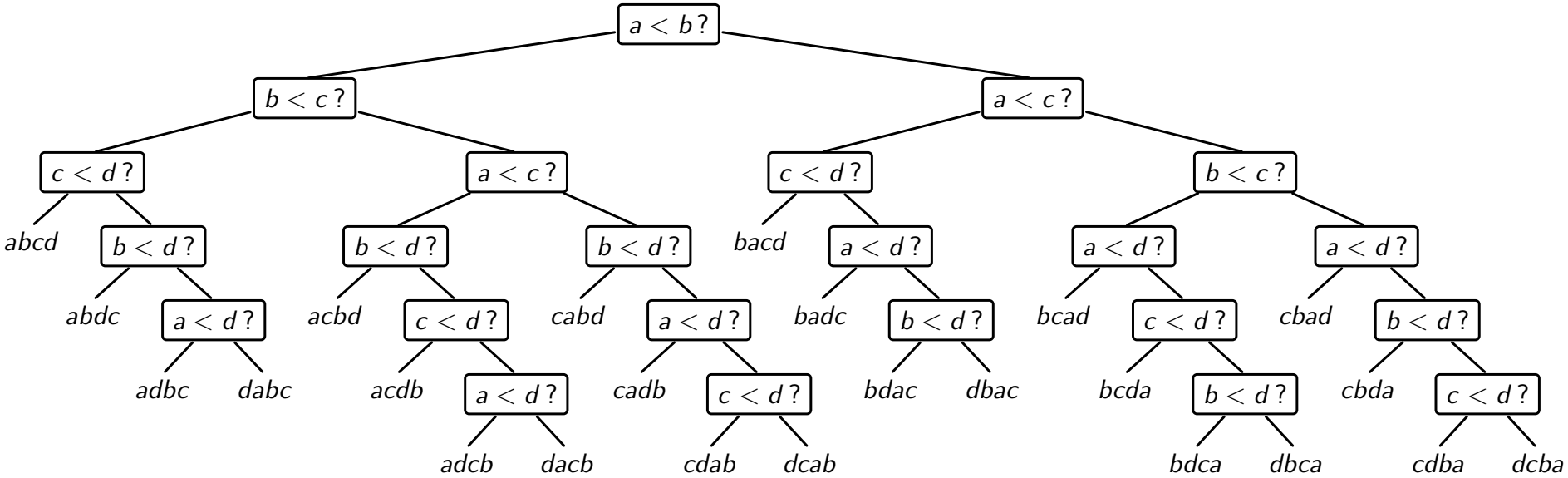


```
static void insertionSort(int[] a) {
  for (int i = 1; i < a.length; i++) {
    int v = a[i], j = i;
    // on décale les éléments vers la droite
    for (; 0 < j && v < a[j-1]; j--) a[j] = a[j-1];
    // jusqu'à avoir trouvé la place j de v
    a[j] = v;
  }
}
```



questionnaire pour $N = 4$

a	b	c	d



(hauteur $6 > \lceil \log_2(24) \rceil$)

dans le **pire** des cas, l'insertion de `a[i]` demande `i` comparaisons (tableau trié en ordre inverse), d'où un total

$$1 + 2 + \cdots + N - 1 \sim \frac{N^2}{2}$$

dans le **meilleur** des cas, l'insertion de `a[i]` demande une seule comparaison (le tableau est déjà trié), d'où un total

$$N$$

	meilleur cas	moyenne	pire cas
comparaisons	N	$N^2/4$	$N^2/2$
affectations	N	$N^2/4$	$N^2/2$

+ linéaire sur un tableau déjà trié
+ stable
− quadratique dans le pire des cas
  $N = 10^5 \Rightarrow$ plusieurs milliards d'opérations

intérêt néanmoins comme ingrédient d'autres algorithmes de tri

tri fusion

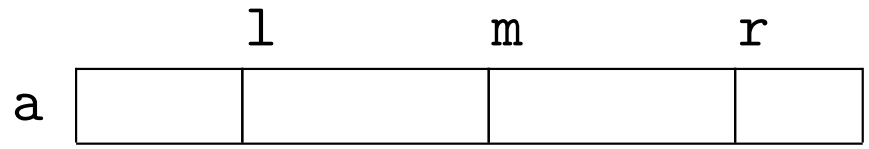
diviser pour régner

1. couper le tableau en deux moitiés égales
2. les trier récursivement
3. fusionner les résultats

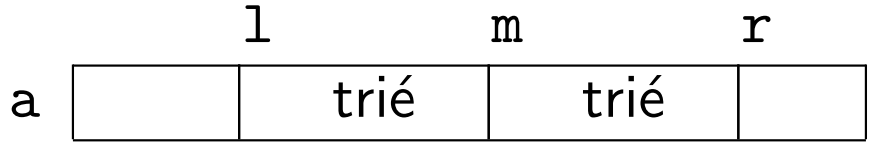
tri fusion (*mergesort*)

il faut généraliser au tri de `a[l..r[`

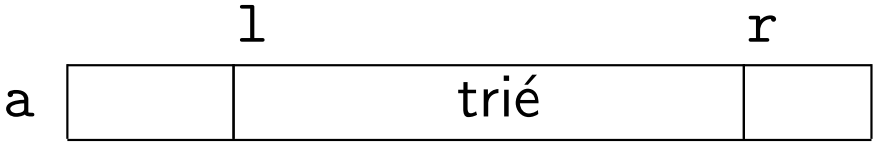
1. couper le tableau en deux moitiés égales $\mathtt{m} = \lfloor \frac{\mathtt{l}+\mathtt{r}}{2} \rfloor$



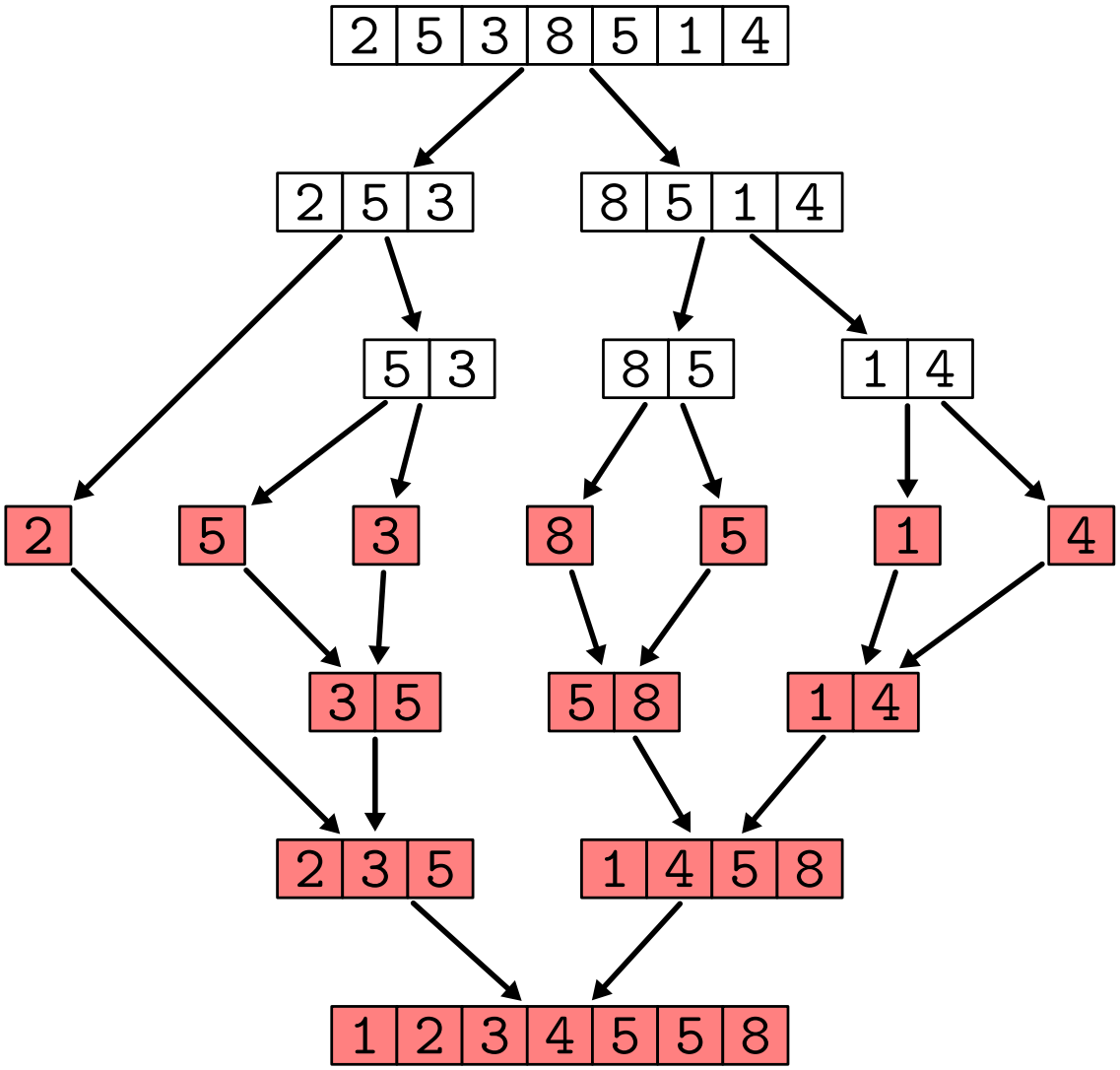
2. trier récursivement `a[l..m[` et `a[m..r[`



3. fusionner les résultats



exemple



difficulté

il est extrêmement difficile de réaliser la fusion **en place**

on va utiliser un second tableau

```
static void mergesort(int[] a) {
  mergesortrec(a, new int[a.length], 0, a.length);
}
```

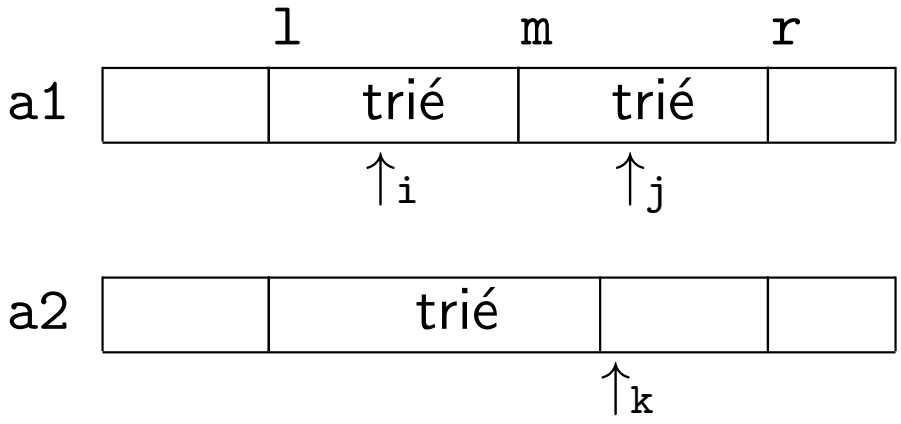
trier `a[l..r[` en utilisant le tableau auxiliaire `tmp`

```
static void mergesortrec(int[] a, int[] tmp, int l, int r){
  if (r-l <= 1) return; // au plus un élément
  int m = l + (r - l) / 2;
  mergesortrec(a, tmp, l, m);
  mergesortrec(a, tmp, m, r);
  for (int i = l; i < r; i++) tmp[i] = a[i];
  merge(tmp, a, l, m, r);
}
```

`(l + r) / 2` pourrait provoquer un débordement arithmétique

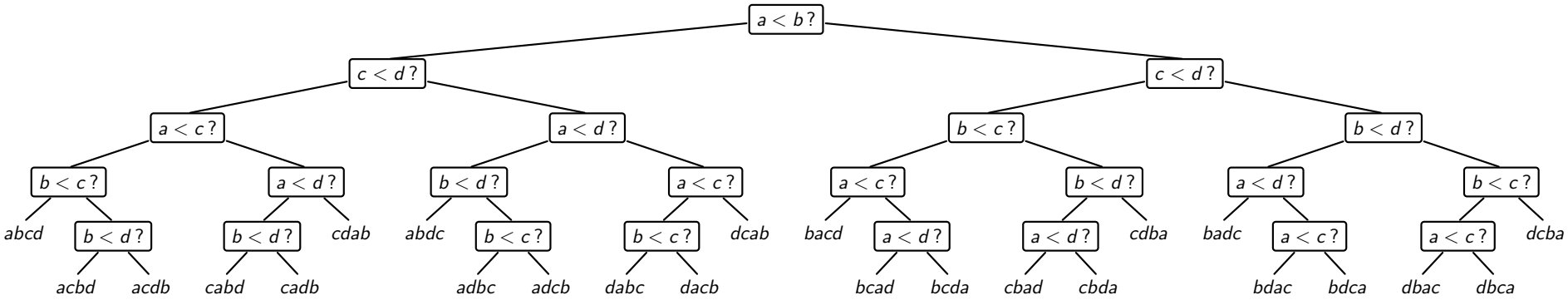
fusionne a1[l..m[et a1[m..r[dans a2[l..r[

```
static void merge(int[] a1, int[] a2, int l, int m, int r){
  int i = l, j = m;
  for (int k = l; k < r; k++)
    if (i < m && (j == r || a1[i] <= a1[j]))
      a2[k] = a1[i++];
    else
      a2[k] = a1[j++];
}
```



questionnaire pour $N = 4$

a	b	c	d



(hauteur $5 = \lceil \log_2(24) \rceil$)

soit C_N le nombre de comparaisons pour trier N éléments

on a

$$\begin{cases} C_0 = C_1 = 0 \\ C_N = C_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} + f_N \end{cases}$$

où f_N est le coût de la fusion

supposons le pire des cas ($f_N = N$) et $N = 2^n$ pour simplifier les calculs

il vient

$$\begin{aligned} C_{2^n} &= C_{2^{n-1}} + C_{2^{n-1}} + 2^n \\ \frac{C_{2^n}}{2^n} &= \frac{C_{2^{n-1}}}{2^{n-1}} + 1 \\ &= \frac{C_{2^{n-2}}}{2^{n-2}} + 1 + 1 \quad \text{etc.} \\ &= n \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$C_N = N \log_2(N)$$

	meilleur cas	moyenne	pire cas
comparaisons	$\frac{1}{2} N \log N$	$N \log N$	$N \log N$
affectations	$2N \log N$	$2N \log N$	$2N \log N$

+ complexité optimale
+ stable
− espace supplémentaire $O(N)$

+ s'applique facilement aux listes, **en place**
(cf TD de cette semaine)

taille de pile

les appels récursifs imbriqués occupent de l'espace sur la pile (cf amphi 1)

mais cet espace est en $O(\log N)$,
car $|\mathtt{r} - \mathtt{l}|$ est divisé par deux à chaque fois

donc on ne provoquera pas `StackOverflowError`

optimisations

- quand `r` − `l` devient très petit, faire un tri par insertion
- pas besoin de fusionner si `a[m-1]` $\leq$ `a[m]`
  (devient alors linéaire sur un tableau déjà trié)
- pour éviter la copie dans `tmp`,
  échanger le rôle des deux tableaux à chaque fois
  (cf exercice 87 du poly)

on a procédé de haut en bas (*top-down mergesort*)

on peut aussi procéder **de bas en haut** (*bottom-up mergesort*)

- soit en partant de segments de taille 1
- soit en partant de segments déjà triés (*natural mergesort*)

tri rapide

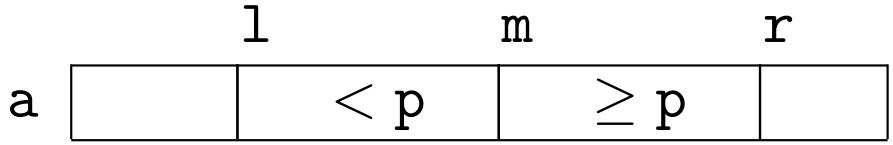
question

comment éviter l'espace auxiliaire

tout en conservant le principe *diviser pour régner* ?

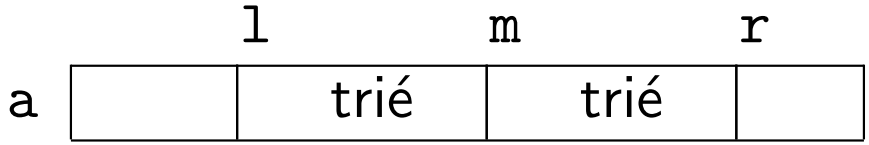
on conserve l'idée de trier `a[l..r[`

1. **réarranger** les éléments pour avoir

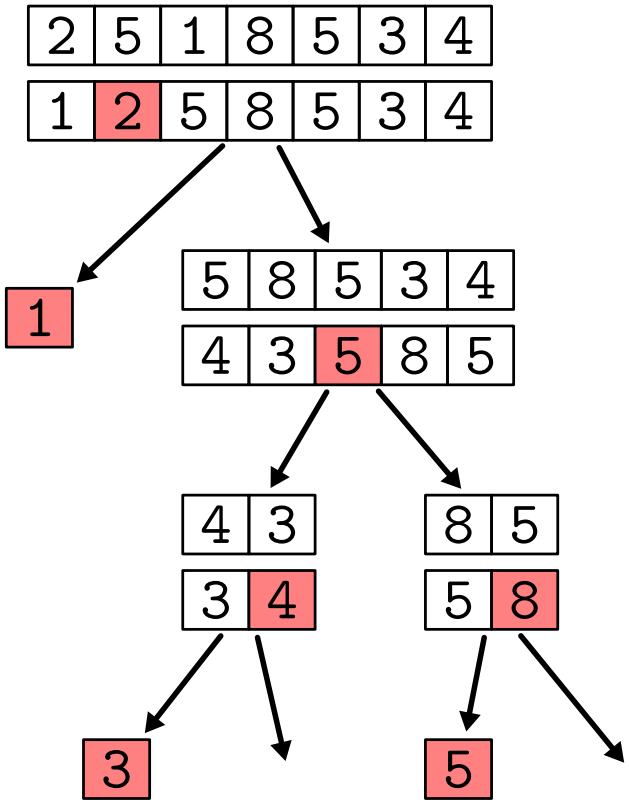


   pour une certaine valeur `p` appelée **pivot**

2. **trier récursivement** `a[l..m[` et `a[m..r[`

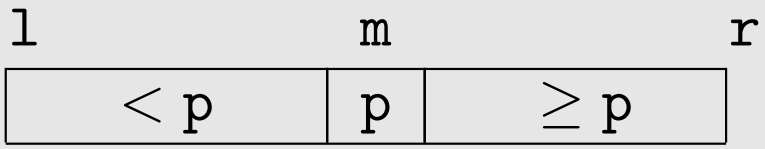


exemple



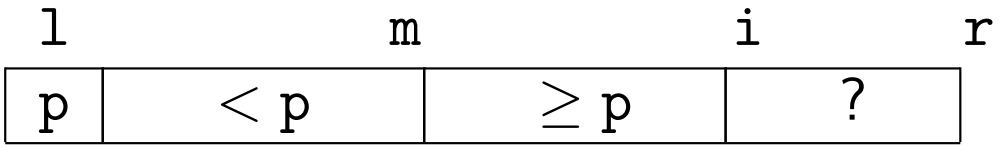
```
static void quicksort(int[] a) {
  quickrec(a, 0, a.length);
}
```

```
static void quickrec(int[] a, int l, int r) {
  if (r-l <= 1) return; // au plus un élément
  int m = partition(a, l, r);
  quickrec(a, l,     m);
  quickrec(a, m + 1, r);
}
```

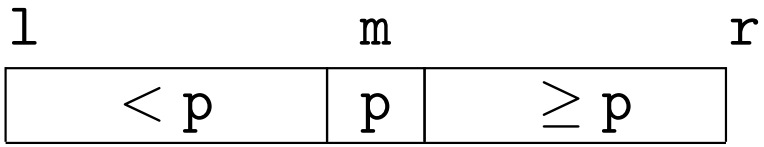


il ne reste plus qu'à écrire `partition`

on choisit arbitrairement a[l] comme pivot




```
static int partition(int[] a, int l, int r) {
  int p = a[l], m = l;
  for (int i = l + 1; i < r; i++)
    if (a[i] < p)
      swap(a, i, ++m);
  swap(a, l, m);
  return m;
}
```



soit C_N le nombre de comparaisons pour trier N éléments

$$\begin{cases} C_0 = C_1 = 0 \\ C_N = \underbrace{N-1}_{\texttt{partition}} + \underbrace{C_K}_{\text{à gauche}} + \underbrace{C_{N-1-K}}_{\text{à droite}} \end{cases}$$

pour un tableau déjà trié, $K = 0$

$$C_N = N - 1 + C_{N-1} \sim \frac{N^2}{2}$$

en moyenne, cependant, c'est optimal (preuve dans le poly)

	meilleur cas		moyenne	pire cas
comparaisons	$N \log N$		$2N \log N$	$N^2/2$
affectations		0	$2N \log N$	N^2

meilleur cas comparaisons = pivot au milieu
meilleur cas affectations = pivot à gauche = pire cas comparaisons

+ en place
− pas stable
− pire cas $O(N^2)$

éviter le pire cas

le pire cas correspond à un pivot au bord

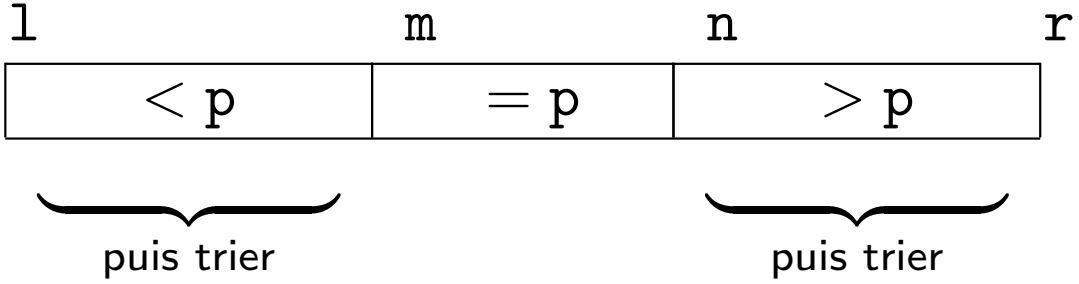
idée : prendre comme pivot un élément de `a[l..r[` au hasard

encore plus simple : **mélanger avant de trier** !

```
static void quicksort(int[] a) {
  KnuthShuffle.shuffle(a);
  quickrec(a, 0, a.length);
}
```

ne suffit cependant pas si beaucoup d'éléments égaux
(tous les éléments égaux ⇒ pivot forcément au bord)

solution : **partitionner en trois** (*3-way partition*)



(cf exercices 84 et 91 dans le poly)

taille de pile

comme pour le tri fusion,
les appels récursifs imbriqués occupent de l'espace sur la pile

mais ici cet espace peut être en $O(N)$
(on ne découpe plus systématiquement en deux moitiés égales)

provoque alors `StackOverflowError` !

solution

on peut

- faire un appel récursif sur la plus petite des deux moitiés
- remplacer l'autre appel récursif par une boucle `while`

on retrouve alors une taille de pile en $O(\log N)$

(cf exercice 85 du poly)

autre optimisation

- quand `r` − `l` devient très petit, faire un tri par insertion

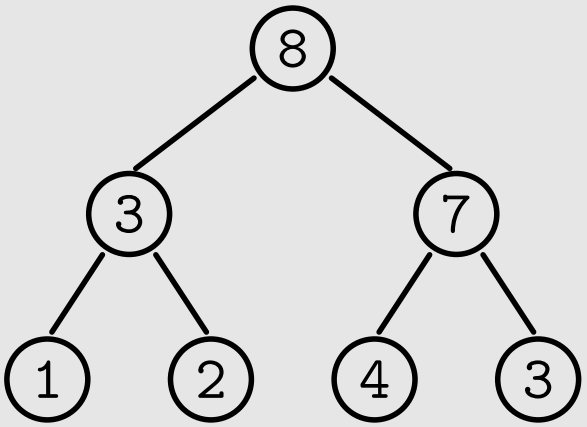
tri par tas

tri par tas (cf amphi 7)

```
static void moveDown(int[] a, int i, int x, int n) {
  while (true) {
    int j = 2 * i + 1;
    if (j >= n) break;
    if (j + 1 < n && a[j] < a[j + 1]) j++;
    if (a[j] <= x) break;
    a[i] = a[j]; i = j;
  }
  a[i] = x;
}
static void heapsort(int[] a) {
  int n = a.length;
  for (int k = n / 2 - 1; k >= 0; k--)
    moveDown(a, k, a[k], n);
  for (int k = n - 1; k >= 1; k--) {
    int v = a[k]; a[k] = a[0];
    moveDown(a, 0, v, k);
  }
}
```

a

8	3	7	1	2	4	3



tri par tas

+ optimal (cf amphi 7)
+ en place
− pas stable

pourquoi tous ces tris ?

pourquoi tous ces tris ?

ils ont chacun des avantages et des inconvénients

- en place ?
- efficace sur un tableau (presque) déjà trié ?
- optimal dans le pire des cas ?
- stable ?

	moyenne	pire cas	déjà trié	en place	stable
insertion	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N)$	oui	oui
fusion	$O(N \log N)$	$O(N \log N)$	$O(N)$	non	oui
rapide	$O(N \log N)$	$O(N^2)$	$O(N \log N)$	oui	non
par tas	$O(N \log N)$	$O(N \log N)$	$O(N \log N)$	oui	non

et les constantes cachées dans les O peuvent faire une différence

à ce jour, aucun tri de tableau en place, stable et aussi efficace en pratique que le tri rapide

la bibliothèque Java

fournit un grand nombre de méthodes `Arrays.sort(...)`

- tri **rapide** pour les types primitifs

```
void sort(  char[] a);
void sort(   int[] a);
void sort(double[] a);
                ...
```

- tri **fusion** pour les objets (Timsort)

```
void sort(T[] a); // si T implémente Comparable<T>
void sort(T[] a, Comparator<T> c);
```

la documentation garantit un tri stable

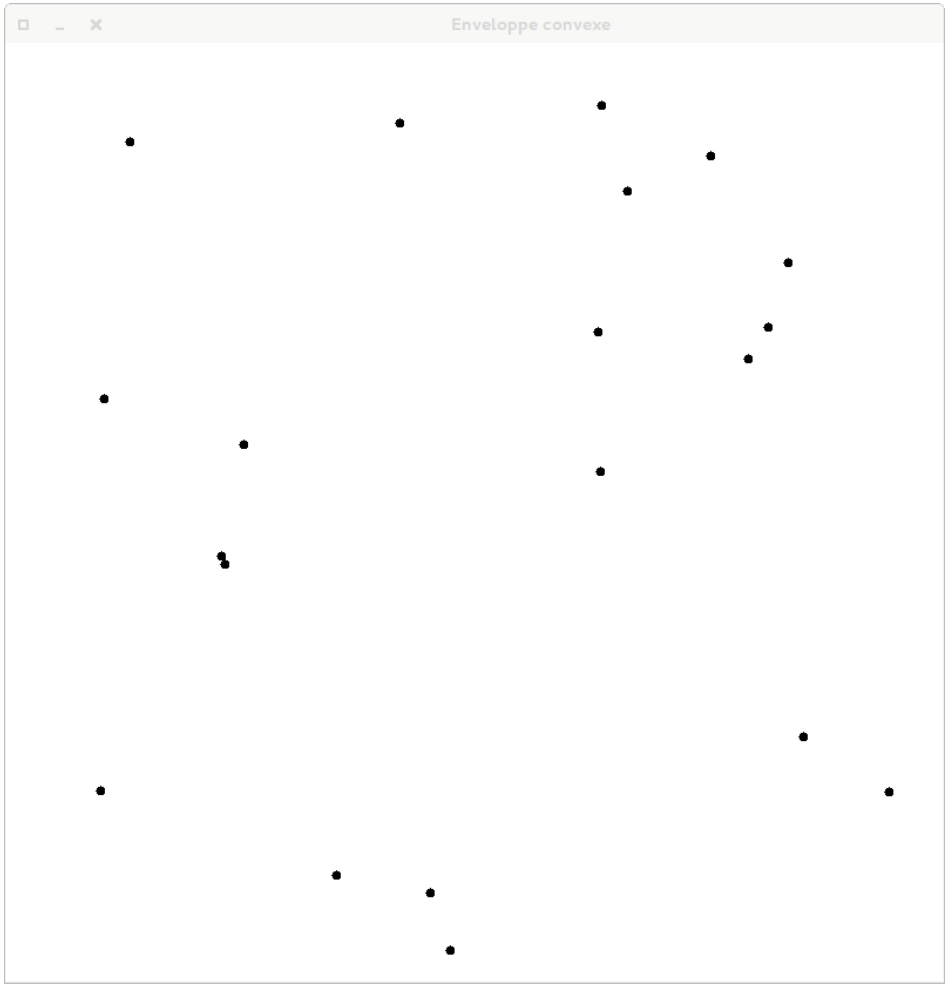
applications

le tri ne sert pas qu'à organiser des données

c'est aussi un ingrédient de base de nombreux algorithmes

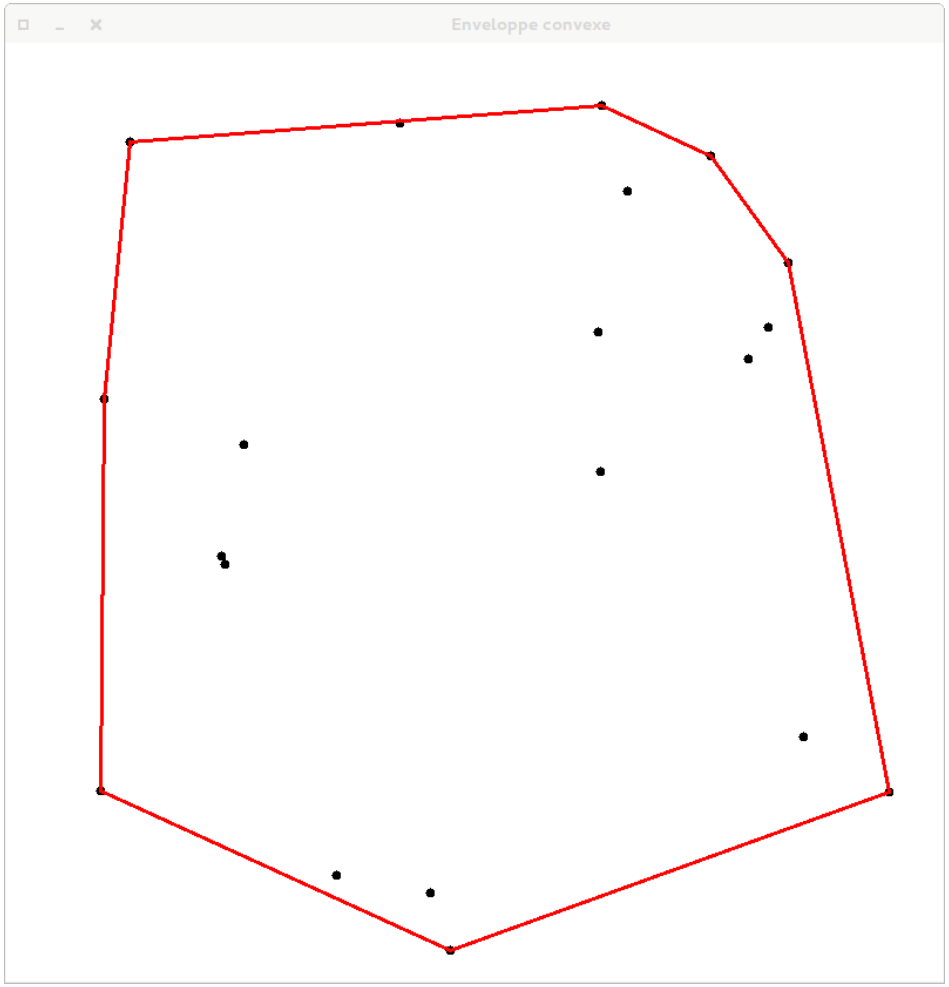
exemple : calcul de l'enveloppe convexe

entrée = N points dans le plan
sortie = points formant l'enveloppe convexe



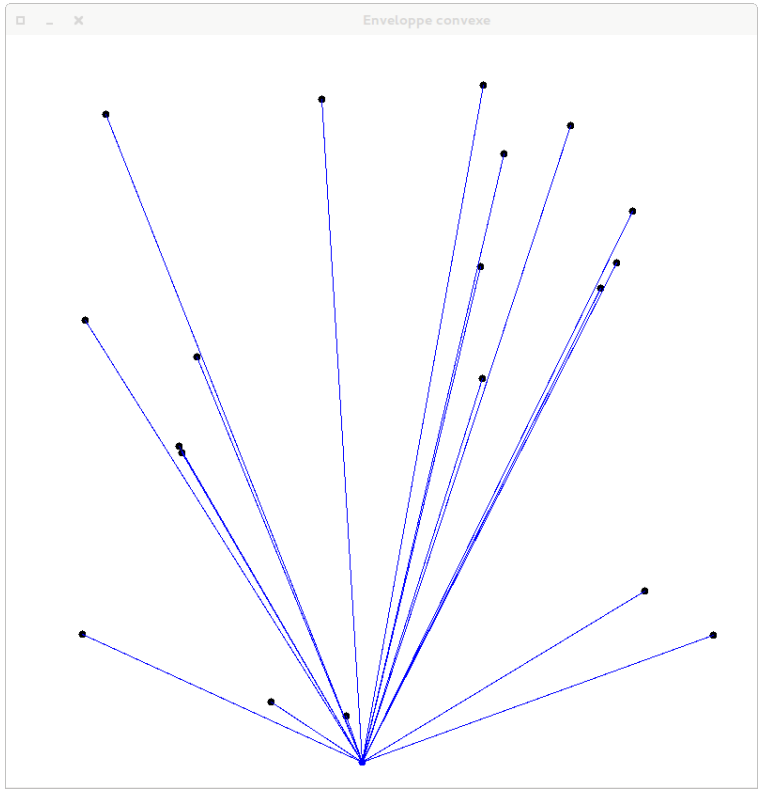
exemple : calcul de l'enveloppe convexe

entrée = N points dans le plan
sortie = points formant l'enveloppe convexe



1 déterminer le point p le plus bas

2 **trier** tous les points selon l'angle fait avec p



3 considérer les points dans cet ordre,
en les ajoutant/retirant de l'enveloppe convexe

démo

l'étape 1 est clairement en $O(N)$

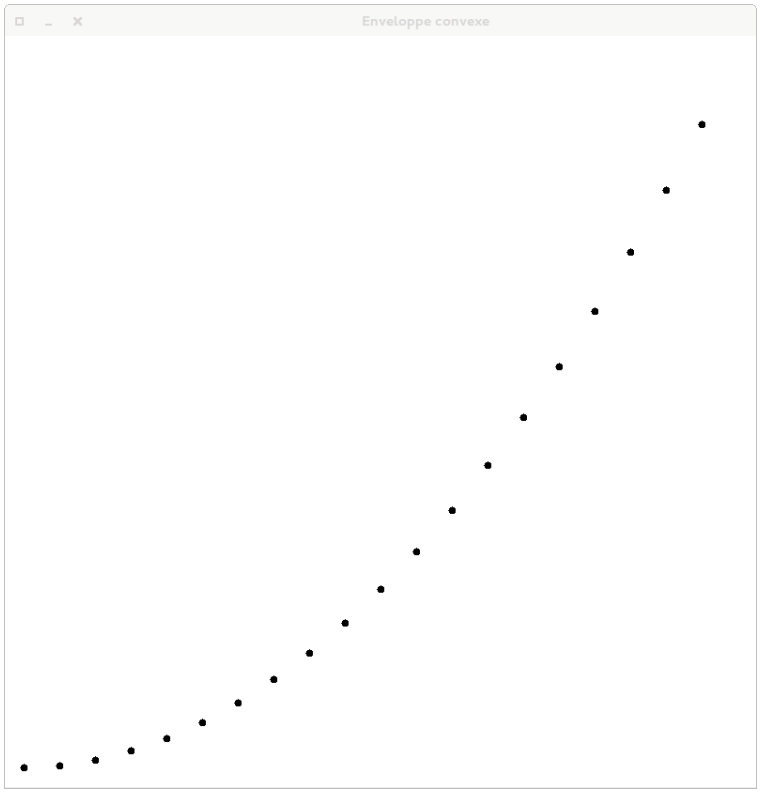
l'étape 2 est en $O(N \log N)$ (tri de N valeurs)

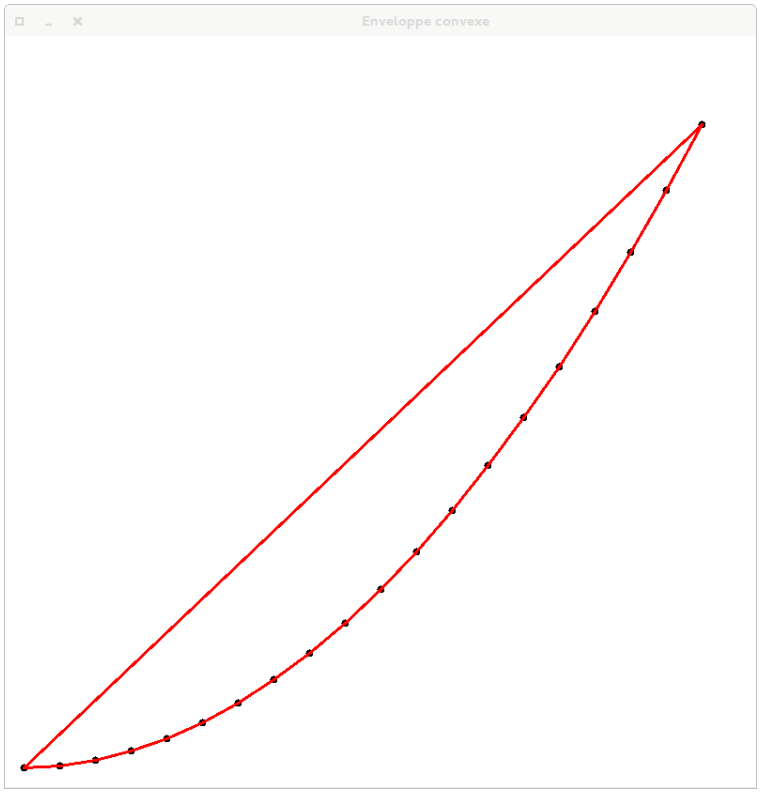
l'étape 3 est $O(N)$, car chaque point est ajouté une fois dans l'enveloppe, retiré au plus une fois de l'enveloppe

c'est donc une solution en $O(N \log N)$

on ne peut pas faire mieux

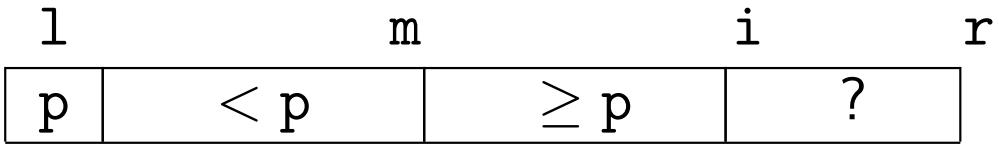
en effet, soient N entiers $x_1, \ldots, x_N$
trouver l'enveloppe convexe des N points (x_i, x_i^2) revient à les trier





et on a vu que le tri ne peut être fait en moins de $N \log N$

quand on programme, il faut faire des petits dessins !



le TD de cette semaine

le tri fusion de listes, en place

application : une autre façon de trouver les mots les plus fréquents

$$\text{Le} \rightarrow \text{tour} \rightarrow \text{du} \rightarrow \text{monde} \rightarrow \cdots$$

$$\text{à} \rightarrow \text{à} \rightarrow \text{à} \rightarrow \text{à} \rightarrow \cdots$$

$$\text{à}(1678) \rightarrow \text{ah}(4) \rightarrow \text{bien}(13) \rightarrow \cdots$$

$$\text{de}(2826) \rightarrow \text{à}(1678) \rightarrow \text{le}(1616) \rightarrow \text{la}(1499) \rightarrow \cdots$$

la semaine prochaine

- **lire le poly**, chapitre 13. Tri

  il y a des **exercices** dans le poly
  suggestions : ex 87 p 157, ex 91 p 162

- **bloc 9** : graphes (1/2)