

Ecole Polytechnique - Ecole Normale Supérieure - Université Pierre et Marie Curie - Université Paris Sud

Master Physique et Applications - seconde année (M2)

Spécialité :

**Concepts Fondamentaux de la Physique**

**Optique non-linéaire  
en régimes continu et femtoseconde**

# **Recueil de problèmes**

**2001 - 2011**

**Manuel Joffre**

Département de Physique de l'Ecole Polytechnique

et

Laboratoire d'Optique et Biosciences

Ecole Polytechnique, CNRS, INSERM

91128 Palaiseau Cedex

## Table des matières

Cascade d'effets non-linéaires du second ordre (2001)	3
Quasi-accord de phase (2002)	6
Doublage d'une impulsion femtoseconde (2003)	8
Génération de troisième harmonique (2004)	11
Addition de photons jumeaux (2006)	14
Absorption à deux photons (2007)	22
Oscillateur femtoseconde (2008)	25
Façonnage d'impulsion (2009)	30
Décalage Raman d'un soliton dans une fibre optique (2010)	36
Compression spectrale (2011)	39

# Cascade d'effets non-linéaires du second ordre (2001)

*Durée : 1h30*

*Le cours et les notes personnelles sont autorisés.*

On s'intéresse à la propagation non-linéaire d'un faisceau lumineux monochromatique de fréquence  $\omega$  dans un cristal doubleur de fréquence de susceptibilité non-linéaire du second ordre  $\chi^{(2)}$ . On admet que, compte tenu des conditions d'accord de phase dans le cristal, les seuls processus ayant une contribution significative sont le doublage de fréquence ( $\omega + \omega \rightarrow 2\omega$ ) et la différence de fréquences ( $2\omega - \omega \rightarrow \omega$ ). On se place dans l'approximation des ondes planes et on note respectivement  $E_1(z, t)$  et  $E_2(z, t)$  les champs électriques du fondamental et du second harmonique. On pose  $E_l(z, t) = \text{Re}(\mathcal{A}_l(z) \exp(i(k_l z - \omega_l t)))$  où  $\mathcal{A}_1(z)$  et  $\mathcal{A}_2(z)$  sont les enveloppes complexes des champs se propageant dans le cristal. On rappelle qu'avec ces notations, l'intensité du faisceau (encore appelée densité de puissance) s'écrit

$$I_l(z) = \frac{\epsilon_0 n_l c}{2} |\mathcal{A}_l(z)|^2$$

où  $n_l$  est l'indice de réfraction du faisceau  $l$ . Enfin, on supposera que l'amplitude du second harmonique à l'entrée du cristal ( $z = 0$ ) est nulle ( $\mathcal{A}_2(0) = 0$ ) puisque seul le faisceau fondamental sera injecté dans le cristal.

1. Etablir les équations couplées gouvernant la propagation de  $\mathcal{A}_1(z)$  et  $\mathcal{A}_2(z)$ . On posera  $\Delta k = 2k_1 - k_2$ .
2. On pose

$$\alpha_l(z) = \sqrt{\frac{n_l c \epsilon_0}{2 \hbar \omega_l}} \mathcal{A}_l(z)$$

Rappeler et justifier l'interprétation physique de  $|\alpha_l(z)|^2$ .

3. Montrer que les équations de propagation s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dz} &= i\xi \alpha_2 \alpha_1^* e^{-i\Delta k z} \\ \frac{d\alpha_2}{dz} &= \frac{i}{2} \xi \alpha_1^2 e^{i\Delta k z} \end{aligned}$$

où  $\xi$  est une grandeur réelle que l'on déterminera.

4. Etablir une relation de conservation faisant intervenir  $|\alpha_1(z)|^2$  et  $|\alpha_2(z)|^2$ . Exprimer  $|\alpha_2(z)|^2$  à l'aide de  $|\alpha_1(z)|^2$  et de  $\alpha_{10} = \alpha_1(0)$  ( $\alpha_{10}$  sera supposé réel positif).
5. Démontrer que  $\alpha_1(z)$  vérifie l'équation

$$\frac{d^2 \alpha_1}{dz^2} + i\Delta k \frac{d\alpha_1}{dz} - f(|\alpha_1|) \alpha_1 = 0$$

où  $f(|\alpha_1|)$  est une fonction de  $|\alpha_1|$  que l'on explicitera à l'aide de  $\xi$  et  $\alpha_{10}$ .

**6.** Dans cette question et la suivante, on supposera que les conditions d'accord de phase sont parfaitement réalisées ( $\Delta k = 0$ ). Exprimer l'équation précédente dans ce cas et vérifier que sa solution s'écrit  $\alpha_1(z) = A/\cosh(\Gamma z)$  où l'on déterminera  $A$  et  $\Gamma$ . En déduire l'expression de  $\alpha_2(z)$  et représenter graphiquement  $|\alpha_1(z)|^2$  et  $|\alpha_2(z)|^2$ .

**7.** Interpréter physiquement les régions  $\Gamma z \ll 1$  et  $\Gamma z \gg 1$  du graphe obtenu à la question précédente. Dans le cas  $\Gamma z \gg 1$ , on expliquera (éventuellement de façon très qualitative) pourquoi le faisceau à  $\omega$  n'est pas amplifié par un mécanisme d'amplification paramétrique pompé à  $2\omega$  ce qui aurait pour effet de reconvertir le second harmonique en fondamental.

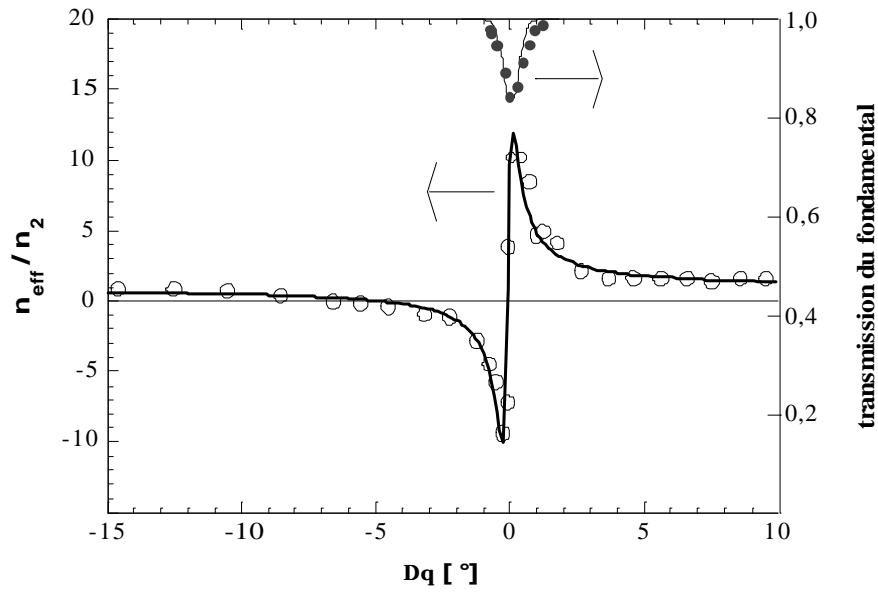
**8.** Dans cette question et les suivantes, on suppose que la condition d'accord de phase n'est plus réalisée ( $\Delta k \neq 0$ ) et que l'on est dans un régime de faible conversion ( $\Gamma \ll |\Delta k|$ ). Montrer que dans ce cas on peut écrire  $f(|\alpha_1|) \approx -\Gamma^2$  et déterminer la solution  $\alpha_1(z)$  de l'équation de propagation obtenue dans le cadre de cette approximation. On montrera que  $\alpha_1(z)$  est la somme de deux termes dont on discutera les amplitudes relatives.

**9.** Montrer que sous l'hypothèse  $\Gamma \ll |\Delta k|$  une valeur approchée de la solution peut s'écrire

$$\alpha_1(z) = \alpha_{10} \exp\left(i\frac{\omega}{c} n_{2,eff} I_1(z) z\right)$$

où l'on déterminera l'expression de  $n_{2,eff}$ . Interpréter physiquement le résultat obtenu en comparant notamment avec un autre effet non-linéaire connu.

**10.** On souhaite comparer les résultats théoriques obtenus ci-dessus à une expérience où l'on a mesuré l'indice non-linéaire effectif total d'un cristal non-linéaire. Cet indice non-linéaire effectif, divisé par l'indice non-linéaire du matériau  $n_2$  résultant des seuls effets du troisième ordre, est représenté sur la figure ci-dessous.



L'accord de phase est ici obtenu en exploitant la biréfringence du cristal. Les conditions d'accord de phase sont variées en inclinant le cristal par rapport au faisceau incident - l'axe des abscisses de la figure représente précisément l'angle  $\Delta\theta$ , l'accord de phase étant réalisé lorsque  $\Delta\theta = 0$ . On admet que  $\Delta\theta$  est alors proportionnel à  $\Delta k$  (on pourra éventuellement justifier brièvement ce dernier point).

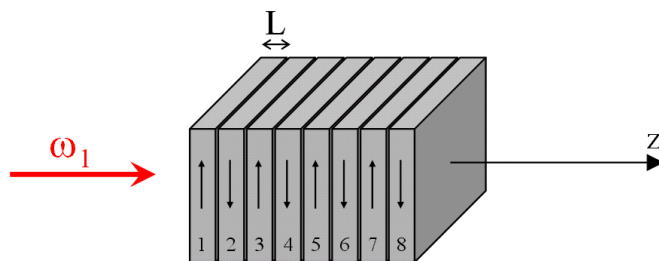
Interpréter les résultats expérimentaux en mentionnant notamment dans quels domaines les résultats sont en accord avec le modèle théorique.

## Quasi-accord de phase (2002)

*Durée : 1h30*

*Le cours et les notes personnelles sont autorisés.*

On s'intéresse dans ce problème au doublage de fréquence d'un faisceau lumineux à l'aide de la technique dite du quasi accord de phase. Celle-ci consiste à utiliser comme élément doubleur un empilement de  $2N$  lames d'épaisseur  $L$  selon le schéma ci-dessous. Les lames de rang impair sont identiques à la première tandis que les lames de rang pair ont subi une rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $z$ .



On rappelle que l'équation de propagation dans les lames de rang impair peut s'écrire

$$\frac{d\mathcal{A}_2}{dz} = \frac{i\omega_2\chi^{(2)}}{4n_2c}\mathcal{A}_1(z)^2 \exp(i\Delta kz)$$

où  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont les enveloppes du fondamental et de la seconde harmonique,  $\omega_2 = 2\omega_1$  est la fréquence de la seconde harmonique et  $\Delta k = 2k_1 - k_2$  avec  $k_1 = n_1\omega_1/c$  et  $k_2 = n_2\omega_2/c$ . On suppose  $\Delta k \neq 0$ .  $\chi^{(2)}$  est la composante pertinente du tenseur susceptibilité non-linéaire du matériau (les champs fondamental et doublé sont supposés polarisés linéairement selon un axe vertical).

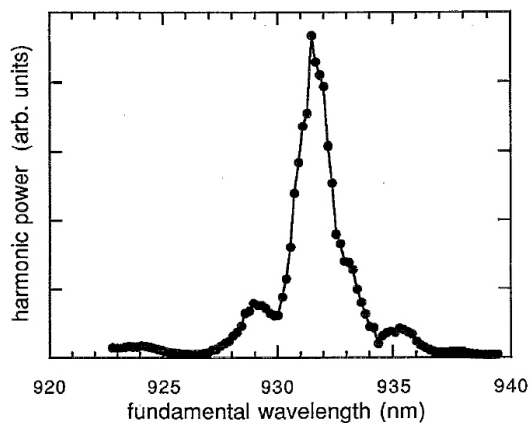
Dans la suite, on se placera dans le cas d'une efficacité de doublage faible, ce qui signifie que l'enveloppe du champ fondamental peut être considérée comme constante ( $\mathcal{A}_1(z) = \mathcal{A}_1$ ).

1. Démontrer que l'équation de propagation dans les lames de rang pair est obtenue en remplaçant  $\chi^{(2)}$  par  $-\chi^{(2)}$  dans l'équation de propagation ci-dessus.
2. Exprimer l'enveloppe du champ en sortie de la lame de rang  $2n + 1$ ,  $\mathcal{A}_2((2n + 1)L)$ , en fonction de l'enveloppe à l'entrée de la lame,  $\mathcal{A}_2(2nL)$  ( $n$  est un nombre entier variant entre 0 et  $N - 1$ ).
3. Exprimer l'enveloppe du champ en sortie de la lame de rang  $2n + 2$ ,  $\mathcal{A}_2((2n + 2)L)$ , en fonction de l'enveloppe à l'entrée de la lame,  $\mathcal{A}_2((2n + 1)L)$ .
4. Exprimer l'enveloppe de la seconde harmonique à la sortie de l'ensemble du dispositif de  $2N$  lames, sachant que seul le fondamental est injecté en entrée.
5. Exprimer l'intensité en sortie du dispositif et montrer que celle-ci est maximale pour certaines valeurs de  $L$  que l'on déterminera. Quel choix de  $L$  vous semble le plus approprié ? (on pourra

comparer l'intensité obtenue avec celle que l'on obtiendrait dans une lame unique de même épaisseur totale mais où l'accord de phase serait réalisé).

6. On cherche à réaliser le doublage de fréquence d'un faisceau laser de longueur d'onde 932 nm dans du  $\text{LiNbO}_3$ . Les valeurs de l'indice de réfraction à 932 et 466 nm pour ce matériau sont respectivement 2.24 et 2.36. Quelle est la valeur optimale de  $L$  pour réaliser le quasi accord de phase ?

7. La figure ci-dessous (Appl. Phys. Lett. **59**, 2657 (1991)) représente la puissance produite par un tel dispositif à quasi accord de phase en fonction de la longueur d'onde du fondamental.



Interpréter la courbe obtenue et déterminer un *ordre de grandeur* de la largeur à mi-hauteur (que l'on comparera à la valeur expérimentale) sachant que l'épaisseur totale de l'échantillon est d'environ  $500 \mu\text{m}$  et que les indices de groupe à 932 et 466 nm sont respectivement égaux à 2.32 et 2.74.

8. Par quelle méthode pourrait-on déplacer la longueur d'onde centrale du pic observé ? Dans quel sens aurait lieu ce déplacement ?

# Doublage d'une impulsion femtoseconde (2003)

Durée : 1h30

Le cours et les notes personnelles sont autorisés.

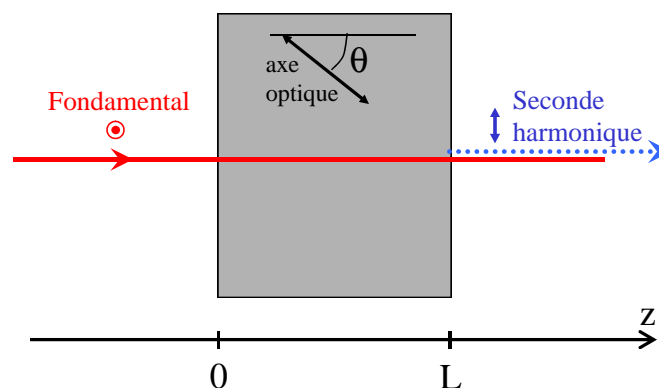
Les questions 2 à 5(c) sont indépendantes de la question 1.

On s'intéresse dans ce problème au doublage de fréquence d'une impulsion ultracourte dans un cristal non-linéaire de KDP. Ce dernier est un cristal uniaxe dont les indices de réfraction ordinaire et extraordinaire sont reportés ci-dessous pour quelques valeurs de la longueur d'onde.

$\lambda$ [nm]	$n_o$	$n_e$
390	1.5254	1.4810
400	1.5240	1.4798
410	1.5228	1.4788
750	1.5031	1.4642
800	1.5015	1.4633
850	1.5000	1.4625

La fréquence centrale de l'impulsion sera notée  $\omega_0$ , correspondant à une longueur d'onde  $\lambda_0 = 800\text{nm}$ .

1. Les faces du cristal sont taillées de sorte que l'axe optique fasse un angle  $\theta$  par rapport à la normale à la face d'entrée du cristal (et donc par rapport au faisceau incident supposé en incidence normale). Les conditions d'accord de phase sont assurées par biréfringence, le fondamental étant polarisé selon un axe ordinaire et la seconde harmonique étant dans le plan principal, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Exprimer l'indice de réfraction vu par la seconde harmonique,  $n_e(\theta, 2\omega_0)$ , d'une part en fonction de  $n_o(2\omega_0)$  et  $n_e(2\omega_0)$ , et d'autre part en fonction de l'indice vu par le fondamental,  $n_o(\omega_0)$  (l'accord de phase étant supposé vérifié pour la longueur d'onde centrale de l'impulsion). En déduire la valeur de l'angle  $\theta$ . Application numérique.



Dans toute la suite, on supposera que le cristal est taillé selon l'angle calculé ci-dessus et que la condition d'accord de phase est donc vérifiée pour la longueur d'onde centrale de l'impulsion.

**2.** On suppose que le processus de doublage est peu efficace, ce qui nous permet de négliger toute déplétion du fondamental dont la propagation est ainsi uniquement gouvernée par la dispersion dans le cristal. En déduire l'expression du champ complexe associé au fondamental  $\mathcal{E}_1(z, \omega)$  en fonction du champ à l'entrée du cristal  $\mathcal{E}_1(\omega) = \mathcal{E}_1(0, \omega)$  et du vecteur d'onde  $k_1(\omega)$ .

**3.1** Le champ associé à la seconde harmonique est noté  $\mathcal{E}_2(z, \omega) = \mathcal{A}_2(z, \omega) \exp(ik_2(\omega)z)$  et on rappelle que l'équation de propagation s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial z} = \frac{i\omega}{2n_2(\omega)\epsilon_0 c} \mathcal{P}^{(2)}(z, \omega) \exp(-ik_2(\omega)z)$$

où

$$\mathcal{P}^{(2)}(z, t) = \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)}}{4} \mathcal{E}_1(z, t)^2$$

Montrer que

$$\mathcal{P}^{(2)}(z, \omega) = \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)}}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_1(\omega_1) \mathcal{E}_1(\omega - \omega_1) \exp(i(k_1(\omega_1) + k_1(\omega - \omega_1))z) \frac{d\omega_1}{2\pi}$$

**3.2** En déduire l'expression de  $\mathcal{A}_2(z, \omega)$ .

**4.1** On s'intéresse (dans les questions 4.1 et 4.2 uniquement) au cas où le milieu serait non dispersif. Calculer la fonction  $\mathcal{A}_2(z, \omega)$ . Interpréter physiquement le résultat obtenu.

**4.2** Dans le cas d'une impulsion gaussienne limitée par transformée de Fourier, que peut-on dire de la largeur spectrale de l'impulsion doublée par rapport à celle de l'impulsion incidente ? (on supposera que la largeur spectrale reste faible devant  $\omega_0$ ). Que dire de la durée de l'impulsion doublée ?

Dans la suite on notera  $\mathcal{A}_{2,ND}(z, \omega)$  la valeur de  $\mathcal{A}_2(z, \omega)$  obtenue ci-dessus.

**5.1** On revient au cas général d'un cristal dispersif, mais on supposera que la largeur spectrale des impulsions fondamentale et doublée est suffisamment faible pour que l'on puisse effectuer un développement limité, respectivement de  $k_1(\omega)$  pour  $\omega$  proche de  $\omega_0$  et de  $k_2(\omega)$  pour  $\omega$  proche de  $2\omega_0$ . Effectuer un développement limité de  $k_1(\omega)$  (resp.  $k_2(\omega)$ ) au premier ordre en  $(\omega - \omega_0)$  (resp.  $(\omega - 2\omega_0)$ ) puis exprimer  $\mathcal{A}_2(z, \omega)$  à l'aide de  $\mathcal{A}_{2,ND}(z, \omega)$ . On notera  $\Delta k' = k'_1(\omega_0) - k'_2(2\omega_0)$ .

**5.2** Calculer et représenter graphiquement le spectre obtenu en sortie de l'échantillon,  $|\mathcal{A}_2(L, \omega)|^2$ .

**5.3** Déterminer une épaisseur caractéristique  $L_0$  du cristal au delà de laquelle on obtient un rétrécissement spectral significatif, sachant que la largeur spectrale de l'impulsion incidente est  $\Delta\omega$ . Quelle est la conséquence sur la durée de l'impulsion doublée si  $L > L_0$  ? Discuter.

**5.4** Exprimer l'indice de groupe (défini par  $n_g = c/v_g$ ) en fonction de l'indice de phase  $n$  et de sa dérivée par rapport à la longueur d'onde  $dn/d\lambda$ . Calculer numériquement les valeurs de l'indice de groupe pour le fondamental et la seconde harmonique à l'aide des données numériques disponibles. En déduire un ordre de grandeur de  $L_0$  pour une impulsion de 100 fs.

# Génération de troisième harmonique (2004)

*Durée : 1h30*

*Le cours et les notes personnelles sont autorisés.*

On s'intéresse dans ce problème à la génération de troisième harmonique (ou triplement de fréquence) dans un milieu non-linéaire liquide pour un faisceau gaussien monochromatique de fréquence  $\omega_1$  associé au vecteur d'onde  $k_1 = n_1\omega_1/c$ . La fréquence et le vecteur d'onde du faisceau triplé seront notés respectivement  $\omega_3 = 3\omega_1$  et  $k_3 = n_3\omega_3/c$ . Dans toute la suite le taux de conversion du fondamental vers la troisième harmonique sera supposé très inférieur à 1. Le champ électrique est noté selon l'usage  $E_n = (\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_n^*)/2$  avec  $\mathcal{E}_n(x, y, z) = \mathcal{A}_n(x, y, z) \exp(ik_n z)$ , où  $n = 1$  pour le fondamental et  $n = 3$  pour la troisième harmonique.  $\mathcal{A}_n(x, y, z)$  est l'enveloppe complexe du champ électrique. On supposera que le faisceau se propage selon l'axe  $z$  et on effectuera l'approximation paraxiale.

1. Expliquer pour quelle raison on a pu ignorer ci-dessus le processus de doublage de fréquence.
2. Etablir les équations de propagation du fondamental et de la troisième harmonique dans le cadre de l'approximation paraxiale.

**3.1** On s'intéresse aux questions 3.1 et 3.2 au cas où le faisceau fondamental et le faisceau triplé sont des ondes planes, soit  $\mathcal{A}_1(x, y, z) = A_0$  et  $\mathcal{A}_3(x, y, z) = \mathcal{A}_3(z)$ . Exprimer dans ce cas l'équation de propagation pour l'enveloppe  $\mathcal{A}_3(z)$ . On résoudra cette équation dans le cas d'un milieu d'épaisseur  $L$  compris entre  $z = 0$  et  $z = L$ .

**3.2** Représenter graphiquement l'intensité produite  $I_3(L) = |\mathcal{A}_3(L)|^2$ , en distinguant les cas  $\Delta k = 0$  et  $\Delta k \neq 0$ .

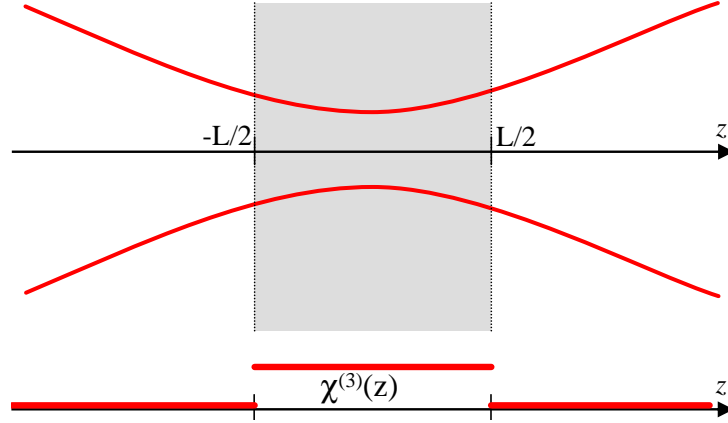
4. On rappelle que le faisceau gaussien décrit par l'enveloppe complexe

$$\mathcal{A}_1(x, y, z) = A_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_1 w_0}{2i\tilde{q}(z)} \exp\left(ik_1 \frac{x^2 + y^2}{2\tilde{q}(z)}\right) \quad (1)$$

est solution de l'équation de propagation du fondamental, avec  $\tilde{q}(z) = z - iz_R$ . On prendra  $A_0$  réel.

Déterminer la phase de Gouy, notée  $-\psi_1(z)$ , définie comme la phase de l'enveloppe au centre du faisceau ( $x = y = 0$ ).

5. Dans cette question, on suppose que la condition d'accord de phase est réalisée, soit  $\Delta k = 0$ . On considère en outre le cas où les faisceaux fondamental et triplé se propagent dans un milieu stratifié de sorte que la susceptibilité non-linéaire n'est pas homogène mais dépend de la coordonnée  $z$ . Il pourra s'agir par exemple d'un milieu liquide compris entre deux hublots en verre supposés semi-infinis comme représenté sur la figure ci-dessous.



On supposera que les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_3$  sont identiques dans le verre et le liquide, de sorte que les équations de propagation restent valables à condition de remplacer  $\chi^{(3)}$  par une fonction supposée connue  $\chi^{(3)}(z)$ . Ainsi la fonction  $\mathcal{A}_1(x, y, z)$  discutée à la question précédente reste solution de l'équation de propagation et sera utilisée dans toute la suite.

**5.1** Vérifier que l'expression

$$\mathcal{A}_3(x, y, z) = f(z) \frac{z_R}{i\tilde{q}(z)} \exp\left(ik_3 \frac{x^2 + y^2}{2\tilde{q}(z)}\right) \quad (2)$$

est solution de l'équation de propagation et établir l'équation différentielle dont doit être solution la fonction  $f(z)$ . Dans la suite, on pourra appeler  $\xi$  le préfacteur indépendant de  $z$  apparaissant dans le second membre de cette équation.

**5.2** Déterminer  $f(z)$  dans le cas où  $\chi^{(3)}(z)$  prend la valeur constante notée  $\chi^{(3)}$  à l'intérieur de l'intervalle  $[-L/2, L/2]$  et est nul en dehors de cet intervalle ( $L$  étant l'épaisseur de la cuve utilisée). On prendra comme condition initiale  $f(-\infty) = 0$ .

**5.3** On considère ici le cas limite où  $L \ll z_R$ . Comment varie la puissance produite  $|f(L/2)|^2$  avec l'épaisseur  $L$ ? Interpréter ce résultat par une comparaison que l'on justifiera physiquement avec le calcul effectué à la question 3.

**5.4** On considère le cas limite inverse où  $L \rightarrow +\infty$  (milieu homogène). Représenter la puissance produite  $|f(z)|^2$  en fonction de  $z$ . Que dire de la puissance en sortie de l'échantillon? Donner une interprétation physique de ce résultat *a priori* surprenant.

**5.5** Dans le cas général, représenter la puissance produite en fonction de  $L$  et commenter la courbe obtenue. Pour quelle valeur de  $L$  a-t-on la puissance maximale?

**6.** On considère maintenant le cas d'un milieu homogène dans lequel l'accord de phase n'est pas réalisé ( $\Delta k \neq 0$ ). On admet que, dans le cadre de l'approximation paraxiale, on peut continuer

à supposer  $k_3 = 3k_1$  à condition de simplement remplacer la fonction  $\chi^{(3)}(z)$  introduite ci-dessus par  $\chi^{(3)} \exp(i\Delta kz)$ . Calculer et représenter graphiquement en fonction de  $\Delta k$  la puissance produite  $|f(+\infty)|^2$ . Déterminer la valeur de  $\Delta k$  correspondant à la puissance maximale produite. Interpréter physiquement le résultat obtenu. *NB : On utilisera l'identité suivante, que l'on pourra démontrer à l'aide du théorème des résidus :*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\Delta kz)}{(z - iz_R)^2} dz &= -2\pi \Delta k \exp(-\Delta k z_R) \text{ si } \Delta k \geq 0 \\ &= 0 \text{ si } \Delta k \leq 0 \end{aligned}$$

# Addition de photons jumeaux (2006)

*Durée : 3h*

*Le cours et les notes personnelles sont autorisés.*

*Problème proposé par Manuel Joffre, Michel Brune et Jean-Michel Courty*

## Partie I - Optique classique

### 1.1 Addition de fréquences entre deux impulsions brèves

On s'intéresse au processus d'addition de fréquences dans un cristal de susceptibilité non-linéaire  $\chi^{(2)}$  entre deux impulsions brèves associées aux champs complexes  $\mathcal{E}_1(z, \omega)$  et  $\mathcal{E}_2(z, \omega)$ . On suppose que ces deux impulsions ont la même fréquence centrale qui sera notée  $\omega_0$ . On appelle  $\mathcal{E}_3(z, \omega)$  le champ produit à la fréquence somme. On appellera  $k_1(\omega)$ ,  $k_2(\omega)$  et  $k_3(\omega)$  les vecteurs d'onde dans le cristal pour les trois ondes considérées.

**1.1.1** On suppose que les énergies des impulsions sont suffisamment faibles pour qu'on puisse négliger la déplétion des champs  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . Ecrire l'expression de  $\mathcal{E}_1(z, \omega)$  et  $\mathcal{E}_2(z, \omega)$  en fonction de  $\mathcal{E}_1(\omega) = \mathcal{E}_1(0, \omega)$  et  $\mathcal{E}_2(\omega) = \mathcal{E}_2(0, \omega)$ .

**1.1.2** Ecrire le terme pertinent de la polarisation non-linéaire du second ordre intervenant dans l'équation de propagation de  $\mathcal{E}_3(z, \omega)$ .

**1.1.3** On pose  $\mathcal{E}_3(z, \omega) = \mathcal{A}_3(z, \omega) \exp(ik_3(\omega)z)$ . Ecrire l'équation de propagation dont est solution  $\mathcal{A}_3(z, \omega)$  à l'aide d'un produit de convolution entre les champs  $\mathcal{E}_1(\omega)$  et  $\mathcal{E}_2(\omega)$ .

**1.1.4** Dans toute la suite, on suppose que les conditions d'accord de phase sont réalisées sur toute la bande spectrale des impulsions considérées. En effectuant une hypothèse sur les largeurs spectrales des champs  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ , montrer que le champ en sortie du cristal non-linéaire s'écrit

$$\mathcal{A}_3(L, \omega) = i\xi \int \mathcal{E}_1(\omega_1) \mathcal{E}_2(\omega - \omega_1) \frac{d\omega_1}{2\pi}$$

avec

$$\xi = \frac{\omega_0 \chi^{(2)} L}{n_3 \epsilon_0 c}$$

où  $L$  est l'épaisseur du cristal et  $n_3$  est l'indice de réfraction à la fréquence  $2\omega_0$  pour l'impulsion  $\mathcal{E}_3$ .

**1.1.5** En déduire l'expression de  $\mathcal{A}_3(L, t)$  en fonction de  $\mathcal{E}_1(t)$  et  $\mathcal{E}_2(t)$ .

**1.1.6** En supposant que les impulsions  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont identiques, montrer que l'énergie de l'impulsion produite par addition de fréquences est proportionnelle au carré de l'énergie et à l'inverse de la durée des impulsions incidentes.

**1.1.7** Les spectres  $|\mathcal{E}_1(\omega)|^2$  et  $|\mathcal{E}_2(\omega)|^2$  étant fixés, montrer que l'énergie totale de l'impulsion produite est toujours inférieure ou égale à ce que l'on obtiendrait pour des impulsions limitées par transformée de Fourier.

**1.1.8** Donner une condition nécessaire et suffisante sur les phases spectrales  $\varphi_1(\omega)$  et  $\varphi_2(\omega)$  des impulsions incidentes pour que la densité spectrale d'énergie  $|\mathcal{A}_3(L, 2\omega_0)|^2$  produite à la fréquence  $2\omega_0$  soit identique à ce que l'on obtiendrait pour des impulsions limitées par transformée de Fourier.

## 1.2 Amplification paramétrique

On considère un amplificateur paramétrique constitué d'un matériau de susceptibilité non-linéaire  $\chi^{(2)}$  pompé par un faisceau laser continu associé au champ  $\mathcal{E}_P(t) = E_P \exp(-2i\omega_0 t)$ , où  $E_P$  est une grandeur réelle. On injecte comme signal une impulsion brève de fréquence centrale  $\omega_0$  et associée au champ  $\mathcal{E}_S(t)$ . On n'injecte pas de lumière sur la voie complémentaire, correspondant à une direction de polarisation perpendiculaire à celle du signal. On supposera que la déplétion du champ de pompe peut être négligée. On appellera  $k_S(\omega)$ ,  $k_C(\omega)$  et  $k_P$  les vecteurs d'onde dans le cristal non-linéaire pour les ondes signal, complémentaire et pompe. On posera  $\mathcal{E}_S(z, \omega) = \mathcal{A}_S(z, \omega) \exp(ik_S(\omega)z)$  et  $\mathcal{E}_C(z, \omega) = \mathcal{A}_C(z, \omega) \exp(ik_C(\omega)z)$ . On admettra que compte tenu de la nature tensorielle de l'interaction non-linéaire, les polarisations non-linéaire à prendre en compte pour les propagations des champs signal et complémentaire sont respectivement

$$\mathcal{P}_S^{(2)}(z, t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_P \exp(i(k_P z - 2\omega_0 t)) \mathcal{E}_C^*(z, t)$$

et

$$\mathcal{P}_C^{(2)}(z, t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_P \exp(i(k_P z - 2\omega_0 t)) \mathcal{E}_S^*(z, t)$$

**1.2.1** Ecrire les équations de propagation pour les enveloppes  $\mathcal{A}_S(z, \omega)$  et  $\mathcal{A}_C(z, \omega)$  des champs signal et complémentaire.

**1.2.2** On suppose la condition d'accord de phase vérifiée sur l'ensemble de la bande spectrale du signal et du complémentaire, et on effectue les mêmes approximations qu'à la question 1.1.4. Pour simplifier, on suppose de plus que les indices de réfraction pour le signal et le complémentaire sont identiques. En déduire le système d'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}_S(z, \omega)}{\partial z} &= ig \mathcal{A}_C^*(z, 2\omega_0 - \omega) \\ \frac{\partial \mathcal{A}_C(z, \omega)}{\partial z} &= ig \mathcal{A}_S^*(z, 2\omega_0 - \omega) \end{aligned}$$

où  $g$  est une grandeur constante que l'on déterminera.

**1.2.3** Résoudre le système d'équations ci-dessus en supposant  $\mathcal{A}_S(0, \omega) = \mathcal{E}_S(\omega)$  et  $\mathcal{A}_C(0, \omega) = 0$ .

**1.2.4** On utilise les champs signal et complémentaire calculés ci-dessus comme champs  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  du processus d'addition de fréquence étudié à la partie 1.1. Que peut-on dire de la condition établie à la question 1.1.8 ? L'énergie produite à la fréquence  $2\omega_0$  dépend-elle de la phase spectrale de l'impulsion amplifiée par l'amplificateur paramétrique ?

## Partie II - Optique quantique

*Dans toute cette partie, on se placera en représentation de Heisenberg. On notera ainsi  $a(t)$  l'opérateur  $a$  à l'instant  $t$ . On aura naturellement  $a(0) = a$ .*

On rappelle que l'équation de Heisenberg qui donne l'évolution d'un opérateur  $O$  sous l'effet d'un Hamiltonien  $H(t)$  est

$$i\hbar \frac{dO(t)}{dt} = [O(t), H(t)]$$

### 2.1 Addition de fréquences

On suppose dans cette partie que deux faisceaux lumineux de fréquences  $\omega_s$  et  $\omega_c$  interagissent dans un cristal non-linéaire pour produire un faisceau à la fréquence somme  $\Omega = \omega_s + \omega_c$ . L'accord de phase est réalisé en géométrie colinéaire, comme représenté ci-dessous.

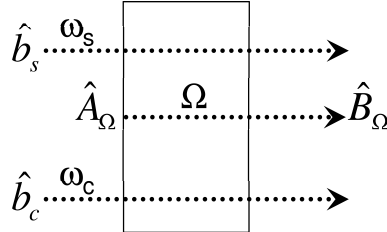


Figure 1

On appellera  $b_s$ ,  $b_c$  et  $A_\Omega$  les opérateurs de destruction associés aux trois modes correspondants. Le processus d'addition de fréquence est modélisé par une interaction de durée  $T$  gouvernée par le hamiltonien  $H = H_0 + W$  avec

$$\begin{aligned} H_0 &= \hbar\omega_s b_s^\dagger b_s + \hbar\omega_c b_c^\dagger b_c + \hbar\Omega A_\Omega^\dagger A_\Omega \\ W &= \hbar\zeta \left( A_\Omega b_s^\dagger b_c^\dagger + A_\Omega^\dagger b_s b_c \right) \end{aligned}$$

**2.1.1** Ecrire (en représentation de Heisenberg) l'équation d'évolution des opérateurs  $b_s(t)$ ,  $b_c(t)$  et  $A_\Omega(t)$  sous l'action du hamiltonien  $H$ .



**2.1.2** On suppose que  $\zeta T \ll 1$  ce qui permet de négliger la déplétion des modes  $b_s$  et  $b_c$ . On négligera donc le terme proportionnel à  $\zeta$  dans leurs équations d'évolution. Résoudre les équations d'évolution de  $b_s(t)$  et  $b_c(t)$  à cette approximation.

**2.1.3** Montrer que l'opérateur en sortie du cristal  $B_\Omega = A_\Omega(T)$  s'écrit alors

$$B_\Omega = A_\Omega(T) = e^{-i\Omega T} (A_\Omega - i\beta b_s b_c)$$

où  $\beta = \zeta T$ .

**2.1.4** Dans cette question, on suppose que pour les modes  $b_s$  et  $b_c$  sont dans un état cohérent. En outre, le mode  $A_\Omega$  est vide et les modes  $b_s$  et  $b_c$  ont chacun initialement un nombre de photons égal à  $n$  :  $n = \langle b_s^\dagger(0) b_s(0) \rangle = \langle b_c^\dagger(0) b_c(0) \rangle$ . Exprimer en fonction de  $n$  et de  $\beta$  la valeur moyenne  $N_\Omega = \langle A_\Omega^\dagger(T) A_\Omega(T) \rangle$  du nombre de photons produits à la fréquence  $\Omega$  en sortie du cristal. Ce résultat est-il conforme au comportement attendu en optique classique ?

## 2.2 Fluorescence paramétrique

On considère le processus de fluorescence paramétrique où un cristal non-linéaire est pompé par un faisceau monochromatique de fréquence  $\Omega$ . Ce faisceau, supposé intense et peu perturbé, sera décrit par un champ classique. Les conditions d'accord de phase dans le cristal utilisé sont telles que l'émission paramétrique n'est possible qu'en géométrie colinéaire, ce qui permet de supposer que tous les faisceaux se propagent selon un même axe  $z$ .

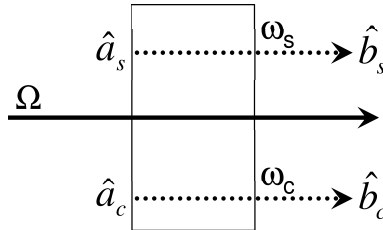


Figure 2

On considère en outre dans cette partie que seuls deux modes quantiques interviennent : le signal, associé à l'opérateur  $a_s$ , et le complémentaire, associé à l'opérateur  $a_c$ . Les fréquences respectives de ces deux modes sont  $\omega_s$  et  $\omega_c$  et vérifient la relation  $\omega_s + \omega_c = \Omega$  (on supposera également  $\omega_s \neq \omega_c$ ). Les seuls commutateurs non nuls sont donc  $[a_s, a_s^\dagger] = [a_c, a_c^\dagger] = 1$ . Le processus de fluorescence paramétrique est alors modélisé par une interaction de durée  $\tau$  gouvernée, en représentation de Schrödinger, par le hamiltonien  $H_S(t) = H_1 + V(t)$  avec

$$\begin{aligned} H_1 &= \hbar\omega_s a_s^\dagger a_s + \hbar\omega_c a_c^\dagger a_c \\ V(t) &= \hbar\xi (\exp(-i\Omega t) a_s^\dagger a_c^\dagger + \exp(i\Omega t) a_s a_c) \end{aligned}$$

où  $\xi$  est un nombre supposé réel et proportionnel à l'amplitude du champ de pompe (traité classiquement). Aucun photon de fréquence  $\omega_s$  ou  $\omega_c$  n'étant injecté à l'entrée du dispositif, l'état des modes signal et complémentaires est décrit par le vide  $|0, 0\rangle$ .

**2.2.1** Ecrire en représentation de Heisenberg les équations d'évolution des opérateurs  $a_s(t)$  et  $a_c^+(t)$ .

**2.2.2** On introduit les opérateurs

$$\begin{aligned}\tilde{a}_s(t) &= a_s(t) \exp(i\omega_s t) \\ \tilde{a}_c(t) &= a_c(t) \exp(i\omega_c t).\end{aligned}$$

Ecrire le système d'équations portant sur  $\tilde{a}_s(t)$  et  $\tilde{a}_c^+(t)$ .

**2.2.3** Montrer que la solution de ce système d'équations est:

$$\begin{aligned}a_s(\tau) &= e^{-i\omega_s \tau} (a_s \cosh \theta - i a_c^+ \sinh \theta) \\ a_c(\tau) &= e^{-i\omega_c \tau} (a_c \cosh \theta - i a_s^+ \sinh \theta)\end{aligned}$$

où  $\theta$  est un paramètre que l'on déterminera.

Comme représenté sur la figure 2, on posera dans toute la suite du problème  $b_s = a_s(\tau)$  et  $b_c = a_c(\tau)$ .

**2.2.4** Déterminer le nombre de photons signal  $n_s = \langle b_s^\dagger b_s \rangle$  en sortie du générateur paramétrique et vérifier que ce nombre est égal au nombre de photons complémentaires  $n_c$ .

*Dans la suite du problème on notera  $n = n_s = n_c$  le nombre de paires de photons produites lors de ce processus.*

### 2.3 Addition de fréquences entre photons jumeaux

On suppose maintenant que le faisceau de fluorescence paramétrique produit par le dispositif étudié à la partie 2.2 est injecté dans le dispositif d'addition de fréquences étudié à la partie 2.1, selon le schéma ci-dessous. On négligera le terme déphasage de  $b_s$  et  $b_c$  qui décrit la propagation entre les deux cristaux.

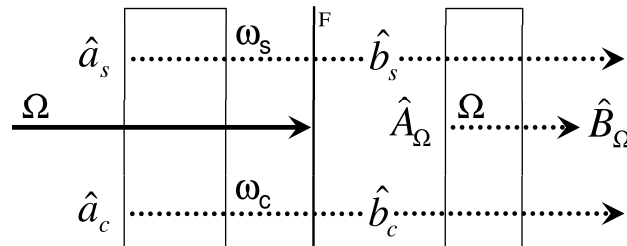


Figure 3

Le filtre F représenté ci-dessus est dichroïque (ce qui signifie que sa transmission dépend de la longueur d'onde) et permet de stopper totalement le faisceau de pompe tout en laissant passer les faisceaux signal et complémentaire. L'état initial du système est le vide pour les modes  $a_s$ ,  $a_c$  et  $A_\Omega$ . Les opérateurs  $b_s$  et  $b_c$  entrants dans le second cristal sont les opérateurs sortants du premier et ont été calculés à la partie 2.2.

**2.3.1** Montrer que le nombre moyen de photons produits à la fréquence  $\Omega$  en sortie du second cristal s'écrit

$$N_\Omega = \beta^2(n + 2n^2)$$

où  $n$  est le nombre de paires de photons jumeaux calculé à la question 1.2.5

**2.3.2** Comparer ce résultat à ce qui était attendu en optique classique. On discutera les cas  $n \gg 1$  et  $n \ll 1$ . Pouvez-vous suggérer une interprétation physique du résultat remarquable obtenu lorsque  $n \ll 1$  ?

**2.3.3** L'expérience décrite dans ce problème a été récemment effectuée par B. Dayan *et al.* (Phys. Rev. Lett. **94**, 043602 (2005)). Commenter la figure ci-dessous représentant le nombre de photons détectés à la fréquence  $\Omega$  en fonction du nombre de paires  $n$  (porté sur l'axe des abscisses supérieur).

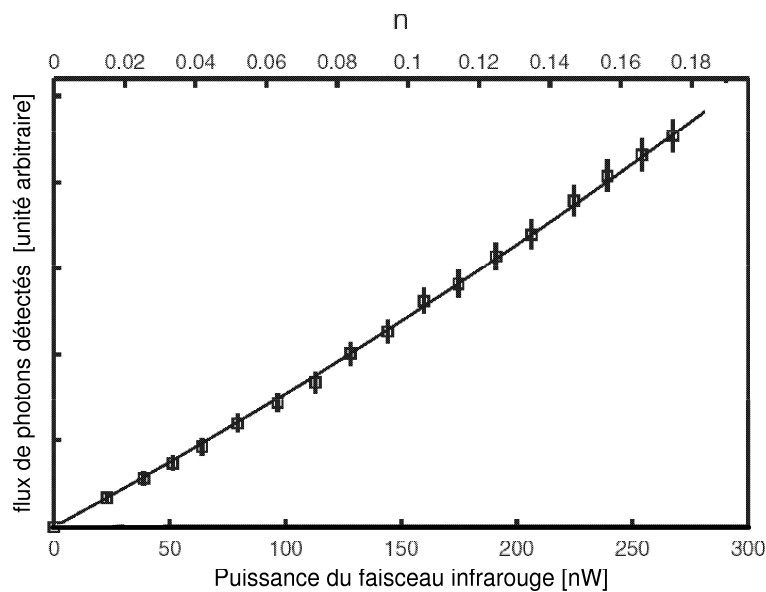


Figure 4

**2.3.4** Quelle méthode utiliseriez-vous pour faire varier expérimentalement le nombre de paires  $n$  afin d'obtenir la courbe de la question 2.3.3

## 2.4 Modèle multimode

L'objectif de cette question est de comprendre les résultats expérimentaux donnés par la figure 5. La situation étant très proche de ce qui se passe dans l'approche à deux modes développée plus

haut. On ne demande pas de refaire les calculs, mais de comprendre les résultats à la lumière de ce qui a été fait plus haut.

Plutôt que de se restreindre à une seule paire de modes, nous souhaitons maintenant prendre en compte un quasi-continuum de modes correspondant aux photons se propageant dans la direction  $z$ , associés aux fréquences  $\omega_l = l \delta\omega$ , où  $l$  est entier et  $\delta\omega$  est l'intervalle entre deux modes (égal par exemple à  $2\pi c/D$  où  $D$  est une "longueur de quantification"). On a les relations de commutation habituelles  $[a_l, a_{l'}^+] = \delta_{l,l'}$ .

On suppose que le cristal est pompé par un champ classique de fréquence  $\Omega = \omega_L = L\delta\omega$  où  $L$  est un nombre entier donné supposé impair. Le processus de fluorescence paramétrique est comme précédemment modélisé par une interaction de durée  $\tau$  gouvernée par le hamiltonien dépendant du temps en représentation de Schrödinger:  $H_S(t) = H_1 + V(t)$  avec maintenant

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_l \hbar\omega_l a_l^+ a_l \\ V(t) &= \sum_l \hbar\xi_l \left( \exp(-i\Omega t) a_l^+ a_{L-l}^+ + \exp(i\Omega t) a_l a_{L-l} \right) \end{aligned}$$

où la grandeur réelle  $\xi_l$  est déterminée par les conditions d'accord de phase dans le cristal non-linéaire. Cette grandeur est par définition symétrique par rapport à  $\Omega/2$ , soit  $\xi_{L-l} = \xi_l$ . On supposera qu'elle prend une valeur non nulle seulement pour  $\omega_l \in [\Omega/2 - \Delta\omega/2, \Omega/2 + \Delta\omega/2]$  où  $\Delta\omega$  est par définition la largeur d'accord de phase.

Ce système produit des paires de photons que l'on va maintenant injecter dans le dispositif d'addition de fréquences. Dans ce faisceau, tous les photons sont susceptibles de s'associer. En d'autres termes : deux photons de fréquences  $\omega_l$  et  $\omega_{l'}$  pour donner des photons de fréquences  $\omega_l + \omega_{l'} = \omega_{l+l'}$ . On supposera que la polarisation des photons engendrés par addition de fréquences est perpendiculaire à celle des photons incidents, et que le faisceau engendré est donc décrit par un autre ensemble d'opérateurs, appelés  $A_m$ . Comme à la partie 2.1, le processus d'addition de fréquences est modélisé par une interaction de durée  $T$  gouvernée par le hamiltonien  $H = H_0 + W$  avec maintenant

$$H_0 = \sum_l \hbar\omega_l b_l^+ b_l + \sum_m \hbar\omega_m A_m^+ A_m$$

et, en supposant que la condition d'accord de phase est parfaitement réalisée pour tous les couples de fréquences (cristal mince) :

$$W = \hbar\zeta \sum_{l,l'} \left( A_{l+l'} b_l^+ b_{l'}^+ + A_{l+l'}^+ b_l b_{l'} \right)$$

On appelle  $N_m$  le nombre de photons produits dans le mode  $B_m$ . Le résultat des calculs est

$$N_m = \beta^2 \left( \delta_{L,m} \left( \sum_l \sqrt{1+n_l} \sqrt{n_l} \right)^2 + 2 \sum_l n_l n_{m-l} \right)$$

Interpréter chacun des deux termes intervenant dans l'expression de  $N_m$  et discuter la figure ci-dessous représentant  $N_m$  en fonction de la longueur d'onde du rayonnement produit à la fréquence somme (I. Abram et al., Phys. Rev. Lett. **57**, 2516 (1986)).

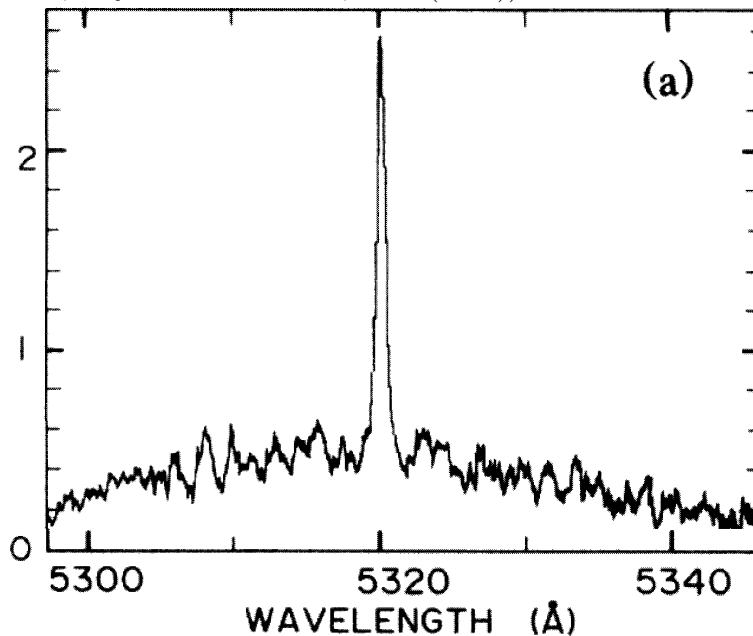


Figure 5

# Absorption à deux photons (2007)

Durée : 1h30

Le cours et les notes personnelles sont autorisés.

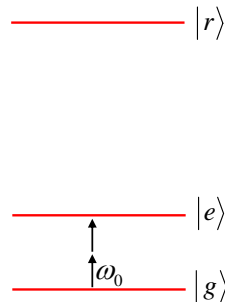
On considère un système à trois niveaux soumis au champ électrique  $E(t) = (\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}^*(t))/2$  d'une impulsion femtoseconde. Celle-ci induit une transition biphotonique de l'état fondamental  $|g\rangle$  vers l'état excité  $|e\rangle$  via le niveau relai  $|r\rangle$ . On appelle  $\hat{\mu}$  la projection de l'opérateur dipôle électrique selon la direction de polarisation du champ électrique de l'impulsion et on effectuera un développement perturbatif de l'opérateur densité à l'aide de la relation habituelle

$$\rho_{nm}^{(p+1)}(t) = G_{nm}(t) \otimes \left( E(t) \sum_l (\mu_{nl} \rho_{lm}^{(p)}(t) - \rho_{nl}^{(p)}(t) \mu_{lm}) \right)$$

où

$$G_{nm}(t) = \frac{i}{\hbar} \Theta(t) \exp(-i\omega_{nm}t - \Gamma_{nm}t) \quad \text{et} \quad G_{nm}(\omega) = \frac{-1/\hbar}{\omega - \omega_{nm} + i\Gamma_{nm}}$$

Les fréquences de transition sont telles que  $\omega_{eg} \approx 2\omega_0$ , où  $\omega_0$  est la fréquence centrale de l'impulsion, et  $\omega_{rg} \gg \omega_0$ , comme représenté ci-dessous.



La nature non résonnante des transitions vers l'état  $|r\rangle$  permet de poser  $\Gamma_{rg} = \Gamma_{re} = 0$ . On supposera par ailleurs que  $\Gamma_{eg}$  et  $\Gamma_{ee}$  sont très inférieurs à  $\omega_0$ . On fait enfin l'hypothèse que  $\mu_{er}$  et  $\mu_{rg}$  sont les seuls éléments de matrice non nuls de l'opérateur  $\hat{\mu}$  (ainsi bien entendu que les éléments  $\mu_{re}$  et  $\mu_{gr}$  obtenus par transposition<sup>1</sup>).

1. Donner un exemple de symétrie que peut vérifier le système permettant de justifier la dernière hypothèse énoncée ci-dessus.

2. Identifier et calculer le seul élément de matrice non nul de l'opérateur  $\hat{\rho}^{(1)}$ , sachant que  $\hat{\rho}^{(0)} = |g\rangle\langle g|$ . On en donnera une valeur approchée en fonction de  $\mathcal{E}(t)$  et  $\mathcal{E}^*(t)$  en tenant compte du fait que la largeur spectrale de l'impulsion  $\Delta\omega$  est très inférieure à  $\omega_{rg}$ . NB : dans cette question comme dans les suivantes, on pourra s'aider d'une représentation graphique qualitative dans l'espace des fréquences afin d'identifier les termes pertinents.

<sup>1</sup>Dans la suite du problème cette dernière précision sera considérée comme implicite à chaque fois que l'on mentionne le seul élément de matrice non nul d'un opérateur hermitien.

**3.** Identifier les éléments de matrice non nuls de l'opérateur  $\hat{\rho}^{(2)}$  et exposer les raisons permettant de ne conserver que  $\rho_{eg}^{(2)}(t)$ .

**4.** Calculer  $\rho_{eg}^{(2)}(t)$ . En ne conservant que le terme résonnant, montrer qu'on obtient

$$\rho_{eg}^{(2)}(t) = \frac{\tilde{\mu}_{eg}}{2} G_{eg}(t) \otimes \mathcal{E}(t)^2$$

où  $\tilde{\mu}_{eg}$  est un élément de matrice effectif dont on donnera l'expression.

**5.** Calculer la polarisation non-linéaire du second ordre. Commenter le résultat obtenu.

**6.** Exprimer  $\rho_{er}^{(3)}(t)$  à l'aide de  $\rho_{eg}^{(2)}(t)$ . On simplifiera le résultat obtenu en utilisant une méthode similaire à celle de la question 2.

**7.** Déterminer  $\rho_{ee}^{(4)}(t)$  en ne conservant que les termes résonnants.

**8.** On rappelle l'expression vue en cours de la population au second ordre de la théorie des perturbations pour un système à deux niveaux dans le cadre de l'approximation de l'onde tournante:

$$\rho_{ee}^{(2)}(t) = -\frac{|\mu_{eg}|^2}{4} G_{ee}(t) \otimes (\mathcal{E}^*(t) (G_{eg}(t) \otimes \mathcal{E}(t))) + c.c.$$

En déduire que le processus d'absorption à deux photons étudié ici est équivalent à un processus d'interaction à un photon entre un champ effectif égal au champ doublé  $\mathcal{E}^{(2)}(t) = \mathcal{E}(t)^2$  et un système à deux niveaux effectif dont on précisera les paramètres.

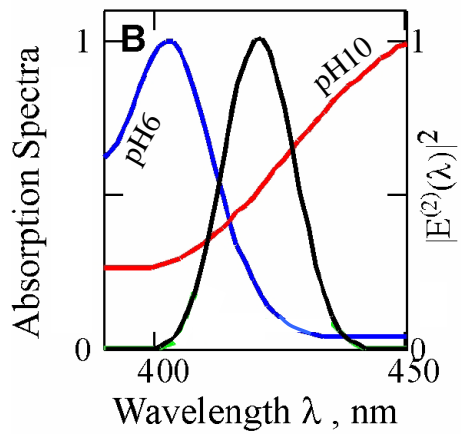
**9.** En déduire que la probabilité d'excitation après la fin de l'impulsion est gouvernée par l'intégrale de recouvrement entre le spectre du champ doublé  $|\mathcal{E}^{(2)}(\omega)|^2$  et le spectre d'absorption  $\alpha(\omega)$  du système à deux niveaux effectif, dont on rappellera l'expression.

**10.** Exprimer  $\mathcal{E}^{(2)}(\omega)$  à l'aide d'une intégrale portant sur  $\mathcal{E}(\omega')$ . Montrer que  $|\mathcal{E}^{(2)}(\omega)|$  est majorée par la valeur obtenue pour une impulsion de même spectre mais limitée par transformée de Fourier.

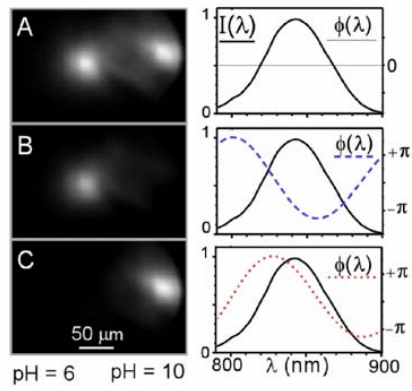
**11.** Que dire de  $|\mathcal{E}^{(2)}(\omega_{eg})|^2$  lorsque la phase spectrale de l'impulsion est telle que  $\varphi(\omega') = -\varphi(\omega_{eg} - \omega')$ . Interpréter ce résultat à l'aide du retard de groupe  $\tau_g(\omega')$  des différentes composantes spectrales contribuant à l'absorption biphotonique.

**12.** Décrire qualitativement ce qui se produit lorsque  $\varphi(\omega') \neq -\varphi(\omega_{eg} - \omega')$ .

**13.** Discuter les deux figures ci-dessous, extraites de l'article de Pastirk *et al.*, Opt. Express **11**, 1695 (2003).



**Fig. 1** : Calculated power spectrum of  $E(t)^2$  for transform-limited pulse (black). Absorption spectrum for HPTS at pH 10 (red line) and pH 6 (blue line).



**Fig. 2** : Experimental demonstration of pH-sensitive selective two-photon microscopy. The sample being imaged has an acidic (left side of the frame at pH 6) and a basic (right side of the frame at pH 10) region, both labeled with HPTS. The left panel shows the images obtained using 21-fs transform limited pulses centered at 842 nm (a) and shaped pulses with a spectral phase that maximize pH 6 (b) or pH 10 (c) fluorescence.



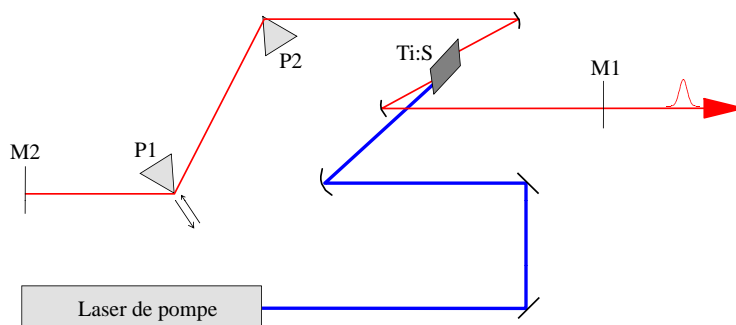
# Oscillateur femtoseconde (2008)

*Durée : 1h30*

*Le cours et les notes personnelles sont autorisés.*

*Problème proposé par Manuel Joffre et François Hache.*

L'objet de ce problème est d'étudier la propagation d'une impulsion dans une cavité laser produisant un train stationnaire d'impulsions femtosecondes. La figure ci-dessous représente le schéma du laser:



La cavité est constituée d'un cristal de saphir dopé au titane (Ti:S) et d'un ensemble de deux prismes P1 et P2 permettant d'introduire une dispersion de vitesse de groupe négative, ajustable par translation du prisme P1. Le chemin optique entre les deux miroirs extrêmes de la cavité, M1 et M2, est noté  $L$ . On rappelle que la production d'un train d'impulsions courtes résulte de l'effet conjugué de la dispersion de vitesse de groupe négative intervenant dans la ligne de prismes et de l'effet Kerr optique intervenant dans le cristal de saphir.

On traite la propagation dans la cavité à l'aide d'un modèle à une dimension, et on appellera  $z$  la coordonnée le long du trajet du faisceau. On appellera  $\mathcal{A}(z, t)$  l'enveloppe complexe de l'impulsion exprimée dans un référentiel se propageant à la vitesse de groupe, ce qui signifie que pour toute valeur de  $z$  la fonction  $|\mathcal{A}(z, t)|^2$  restera centrée en  $t = 0$ . De même, la fonction  $|\mathcal{A}(z, \omega)|^2$  sera supposée centrée en  $\omega = 0$ . On admettra que l'action de la ligne de prisme sur l'impulsion se traduit par l'ajout d'une phase spectrale purement quadratique  $\varphi(\omega) = \frac{1}{2}\varphi''\omega^2$ , où  $\varphi''$  est négatif. Par ailleurs, on négligera la dispersion linéaire intervenant dans le cristal de saphir, supposé très peu épais, ce qui permettra d'écrire l'équation de propagation dans le cristal sous la forme

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = -\gamma |\mathcal{A}(z, t)|^2 \mathcal{A}(z, t) \quad (3)$$

où  $\gamma$  est le coefficient de non-linéarité Kerr dans le cristal.

## Partie I : Quelques valeurs numériques

La puissance du laser de pompe est de 5 W. Le rendement du laser femtoseconde est supposé égal à 10 %, et la transmission du miroir de sortie M1 est de 2%. Enfin, on donne la longueur de la cavité,  $L = 1.5$  m.

**1.1** Quel est le taux de répétition du laser ?

**1.2** Quelle est l'énergie par impulsion ?

**1.3** Déterminer l'énergie de l'impulsion circulant dans la cavité.

## Partie II : Modèle continu

On supposera dans cette partie que la déformation de l'impulsion lors de sa propagation dans la cavité est suffisamment faible pour qu'on puisse distribuer l'effet des prismes et du cristal tout le long de la cavité. Cette approximation permet de traiter la propagation dans la cavité comme si l'impulsion se propageait dans un milieu homogène effectif d'épaisseur  $L$ , en obéissant à l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = \frac{k_0''}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} - \gamma_{\text{eff}} |\mathcal{A}(z, t)|^2 \mathcal{A}(z, t) \quad (4)$$

où  $k_0''$  est un coefficient de dispersion effectif et  $\gamma_{\text{eff}}$  est un coefficient Kerr optique effectif, supposé positif. On rappelle que lorsque  $k_0''$  est négatif cette équation admet une solution stationnaire appelée soliton et s'exprimant

$$\mathcal{A}(z, t) = \mathcal{A}_0 \frac{\exp\left(i \frac{|k_0''|z}{2\tau^2}\right)}{\cosh(t/\tau)} \quad (5)$$

ou, dans l'espace des fréquences,

$$\mathcal{A}(z, \omega) = \pi\tau \mathcal{A}_0 \frac{\exp\left(i \frac{|k_0''|z}{2\tau^2}\right)}{\cosh(\pi\omega\tau/2)} \quad (6)$$

avec la condition

$$\gamma_{\text{eff}} |\mathcal{A}_0|^2 \tau^2 = |k_0''| \quad (7)$$

L'objet des deux premières questions de cette partie est de déterminer les valeurs des coefficients effectifs introduits plus haut pour que le modèle représente bien l'effet des prismes ou du cristal dans le cas simple où un seul de ces deux éléments est présent dans la cavité.

**2.1** Ecrire puis résoudre dans l'espace des fréquences l'éq. 4 sans le terme non-linéaire ( $\gamma_{\text{eff}} = 0$ ).

En considérant la propagation sur une distance  $L$ , déterminer la relation entre le paramètre  $\varphi''$  introduit plus haut et le coefficient de dispersion de vitesse de groupe effectif  $k_0''$ .

**2.2** Ecrire l'éq. 4 sans le terme de dispersion ( $k_0'' = 0$ ) puis montrer que l'intensité temporelle  $I(z, t) = |\mathcal{A}(z, t)|^2$ , qui sera simplement noté  $I(t)$  dans la suite, ne dépend pas de  $z$ . En comparant

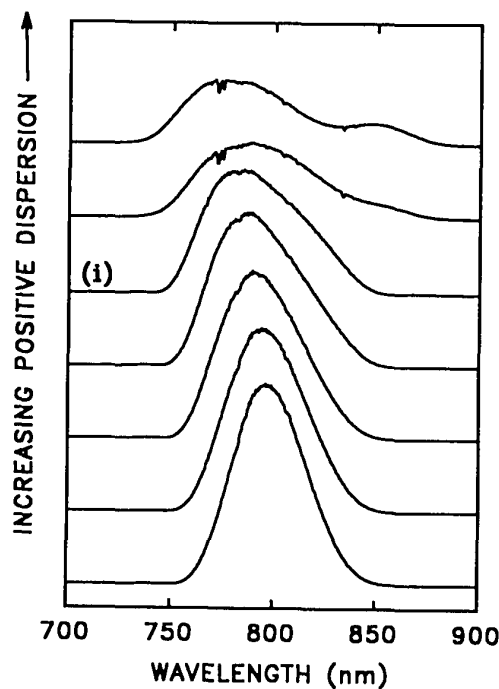
la solution de cette équation, pour une distance de propagation égale à  $L$ , avec la solution de l'éq. 3, pour une distance de propagation égale à  $L_c$ , on en déduira une relation entre  $\gamma$  et  $\gamma_{\text{eff}}$ .

**2.3** En supposant que l'impulsion se propage dans la cavité sous la forme du soliton introduit plus haut, établir une relation entre  $\tau$ ,  $|\varphi''|$ ,  $\gamma$ ,  $L_c$  et

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{A}(z, t)|^2 dt ,$$

grandeur proportionnelle à l'énergie de l'impulsion. Décrire qualitativement la variation de la durée et de la largeur spectrale de l'impulsion en fonction du paramètre  $|\varphi''|$  (à énergie par impulsion constante).

**2.4** La figure ci-dessous, extraite d'un article de P.F. Curley *et al.* (Opt. Lett. **18**, 54 (1993)) représente une série de spectres produits par un laser femtoseconde pour différentes positions d'un des prismes de la cavité. La dispersion nette de la cavité est négative et  $|\varphi''|$  diminue lorsque l'on va de bas en haut (ce qui signifie que  $\varphi''$  augmente).



Les spectres obtenus vous semblent-ils en accord qualitatif avec le modèle ?

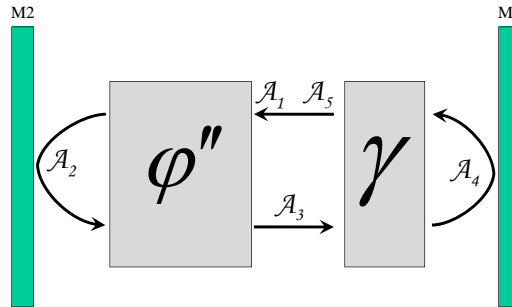
**2.5** Les miroirs M1 et M2 sont maintenant tout deux remplacés par des miroirs dont le coefficient de transmission est égal à 1 %, ce qui permet d'observer les impulsions sortant par M1 et par M2. On observe que ces impulsions n'ont pas la même durée, les deux valeurs mesurées étant 35 et 52 fs (à ce stade on ne précise pas de quel côté du laser sort l'impulsion la plus courte). Ce résultat vous semble-t-il compatible avec le modèle utilisé ?

**2.6** Calculer l'ordre de grandeur du déphasage non-linéaire causé par la propagation dans le cristal, sachant que l'indice non-linéaire du cristal de saphir (d'épaisseur  $L_c = 2\text{mm}$ ) est  $n_2 =$

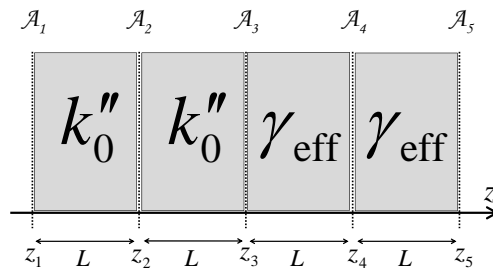
$3 \times 10^{-20} \text{m}^2/\text{W}$ . On prendra pour cette question une impulsion de forme rectangulaire de durée égale à 40 fs. On supposera que le profil spatial est un disque homogène de rayon  $20 \mu\text{m}$ . Que pensez-vous du résultat obtenu ?

### Partie III : Modèle discret

On se propose d'utiliser maintenant un modèle prenant en compte la nature discrète des éléments introduits dans la cavité, comme représenté dans la figure ci-dessous, où  $\varphi''$  représente la ligne de prismes et  $\gamma$  le cristal de saphir.



On considère les enveloppes  $\mathcal{A}_j(t)$  du champ aux points indiqués et les variances associées  $\Delta t_j^2$  et  $\Delta \omega_j^2$ . On s'intéressera à une solution stationnaire telle que l'enveloppe se reproduise identique à elle-même (à une phase près) après un tour de cavité, soit  $\mathcal{A}_5(t) = e^{i\theta} \mathcal{A}_1(t)$ . Pour cela on déplie la cavité et on décrit un aller-retour dans la cavité selon le schéma ci-dessous.<sup>2</sup>



**3.1** Montrer que 4 parmi les 5  $\Delta t_j$  sont identiques. Montrer de même que 4 parmi les 5  $\Delta \omega_j$  sont identiques.

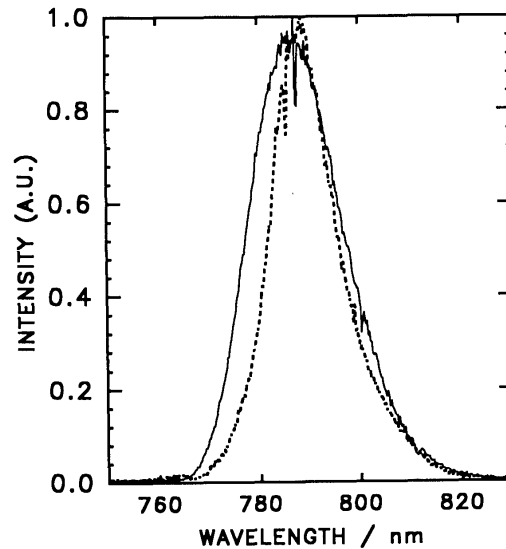
**3.2** Rappeler la forme générale de la variation avec  $z$  de  $\Delta t(z)^2$  dans un système dispersif. Dédire des résultats de la question précédente le centre de symétrie de cette fonction puis en déduire une relation entre  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  et  $\Delta \omega_1$ . Représenter graphiquement la fonction  $\Delta t(z)^2$  en fonction de  $z$  dans l'intervalle  $[z_1, z_5]$  puis discuter à nouveau les résultats expérimentaux de la question 2.5. On indiquera de quel côté de la cavité sort l'impulsion la plus courte.

**3.3** On considère maintenant l'évolution de la largeur spectrale lors de la propagation dans le cristal. Ecrire l'expression de la phase temporelle  $\Phi(z, t)$  pour  $z_3 < z < z_5$ , puis écrire la fréquence

<sup>2</sup>on n'attachera pas d'importance au fait que la distance parcourue soit  $4L$  au lieu de  $2L$  car le résultat final sera indépendant du choix de  $L$ .

instantanée  $\Omega(z, t) = -d\Phi/dt$ . En déduire les moyennes par rapport au temps  $\langle \Omega(z, t) \rangle$  et  $\langle \Omega(z, t)^2 \rangle$ , puis la variance correspondante  $\Delta\Omega^2$ . On rappelle que la variance de la fréquence s'écrit  $\Delta\omega^2 = \Delta\omega_{\Phi=0}^2 + \Delta\Omega^2$ , où  $\Delta\omega_{\Phi=0}^2$  serait la variance obtenue en l'absence de phase temporelle (voir éq. A.34 du cours). En déduire la forme générale de  $\Delta\omega(z)^2$  puis une relation entre  $\Delta\omega_3$  et  $\Delta\omega_4$ . Représenter la fonction  $\Delta\omega(z)^2$  dans l'intervalle  $[z_1, z_5]$ .

**3.4** La figure ci-dessous, extraite d'un article de P.F. Curley *et al.* (J. Opt. Soc. Am. B **10**, 1025 (1993)), représente les spectres mesurés pour les deux sorties de la cavité.



Pouvez-vous expliquer ce résultat et indiquer à quel spectre correspond chacune des deux sorties M1 et M2 de la cavité ?

**3.5** Décrire qualitativement la propagation de l'impulsion dans la cavité, en indiquant notamment la dérive de fréquence de l'impulsion aux différents points de la cavité et les phénomènes physiques venant modifier la forme temporelle ou spectrale de l'impulsion.

**3.6** On fait l'hypothèse simplificatrice que l'impulsion est de forme gaussienne, supposée limitée par transformée de Fourier en deux points de la cavité que l'on précisera. Etablir un système de deux équations portant sur  $\Delta t_1^2$  et  $\Delta t_2^2$ , puis retrouver une relation similaire à celle obtenue à la question 2.3 dans le cas où  $\gamma$  et  $\varphi''$  tendent vers zéro. Pour comparer les équations obtenues, on utilisera le fait que, pour une impulsion de type soliton comme celle décrite par l'éq. 3, on a  $\Delta t = \tau\pi^2/12$ . On donne également

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma^2.$$

# Façonnage d'impulsion (2009)

Durée : 1h30

Le cours et les notes personnelles sont autorisés.

Il est **vivement recommandé** de consulter au préalable le formulaire situé à la fin de ce document, puis de s'y reporter régulièrement, car on y trouvera certaines formules mathématiques utiles à la résolution du problème. Les quatre parties peuvent le plus souvent être traitées indépendamment à condition d'admettre les résultats annoncés dans le sujet.

De nombreuses expériences utilisant des impulsions femtosecondes nécessitent un contrôle précis de la forme temporelle des impulsions, par exemple pour compenser la déformation subie lors de la propagation, ou bien pour des expériences de contrôle cohérent. On utilise pour cela un dispositif de façonnage d'impulsion, ou façonneur, qui est en fait un filtre linéaire programmable caractérisé par sa fonction de transfert complexe  $R(\omega)$ , déterminant la relation entre l'impulsion incidente,  $\mathcal{E}_{in}(\omega)$ , et l'impulsion produite par le façonneur,  $\mathcal{E}_{out}(\omega)$ . On a ainsi  $\mathcal{E}_{out}(\omega) = R(\omega)\mathcal{E}_{in}(\omega)$ , ou encore  $\mathcal{E}_{out}(t) = R(t) \otimes \mathcal{E}_{in}(t)$  dans le domaine temporel. Comme il s'agit d'un filtre passif, on a obligatoirement  $|R(\omega)| \leq 1$ , ce qui signifie qu'il n'y a pas d'amplification. Dans le cas idéal, le façonneur permet de programmer le module et la phase de la fonction  $R(\omega)$ . Un exemple très répandu de façonneur est le dispositif représenté Fig. 1 et 2, et dont l'étude approfondie fait l'objet de ce problème. La Fig. 1 représente le trajet des différentes composantes spectrales constituant l'impulsion, tandis que la Fig. 2 représente la propagation du faisceau lumineux associé à la longueur d'onde centrale.

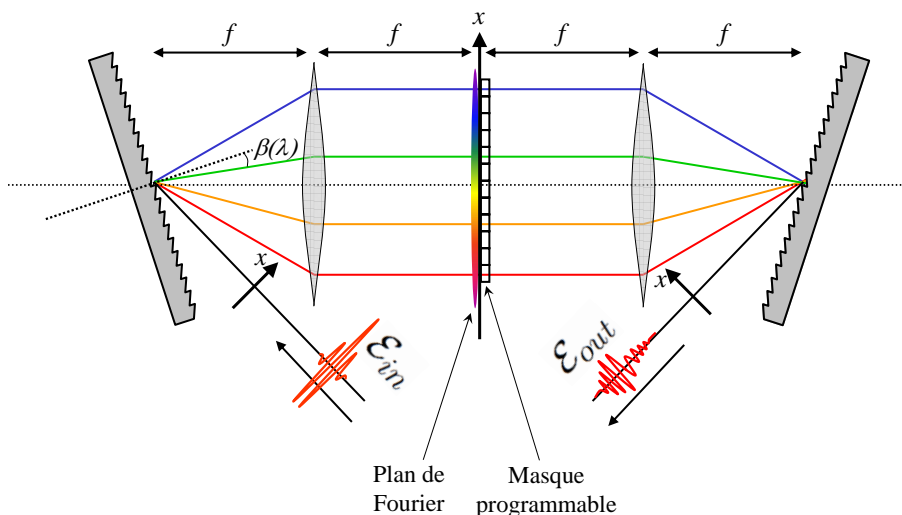


Fig. 1

Le faisceau incident est tout d'abord diffracté sur un réseau de diffraction, qui décompose les différentes composantes spectrales de l'impulsion. Chaque longueur d'onde est focalisée dans un

plan appelé plan de Fourier situé dans le plan focal d'une lentille cylindrique, placée elle-même à une distance  $f$  du réseau de diffraction. Un masque, utilisant par exemple une matrice de cristaux liquides adressable spatialement et caractérisé par sa fonction de transfert complexe  $M(x)$  permet de contrôler le module et la phase en chaque point du plan de Fourier. Puis le faisceau initial est reconstitué à l'aide d'un arrangement symétrique. Dans le cas où le masque est neutre ( $M(x) = 1$ ), l'impulsion initiale est reconstituée identique à elle-même. A l'inverse, une modification de la fonction de transfert du masque permet de modifier la forme de l'impulsion transmise.

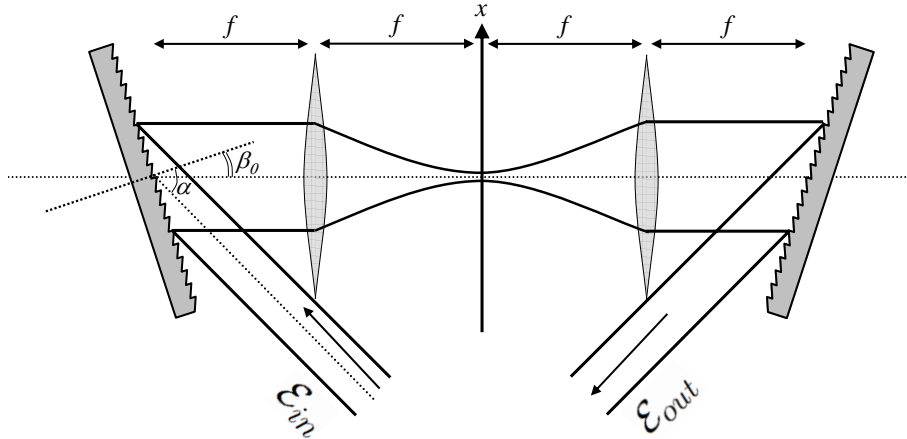


Fig. 2

## Partie I : Introduction

**1.1** On rappelle que la diffraction sur un réseau de période  $d$  obéit à la relation

$$\sin \alpha + \sin \beta(\lambda) = \frac{\lambda}{d} \quad (8)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre le faisceau incident et la normale au réseau, tandis que  $\beta(\lambda)$  (ou  $\beta(\omega)$ ) est l'angle du faisceau diffracté. On appellera  $\beta_0 = \beta(\omega_0)$  l'angle associé au faisceau diffracté pour la fréquence centrale,  $\omega_0$ , de l'impulsion (voir Fig. 2). On appellera  $x(\omega)$  la coordonnée dans le plan de Fourier où est focalisée la composante de fréquence  $\omega$ , en supposant que la fréquence centrale  $\omega_0$  est focalisée au centre ( $x = 0$ ). En effectuant un développement au plus bas ordre en  $\omega - \omega_0$ , montrer que  $x(\omega) \approx \xi(\omega - \omega_0)$ , où  $\xi$  est un facteur que l'on déterminera.

**1.2** On considère une impulsion limitée par transformée de Fourier, de forme gaussienne, et de durée  $\Delta t = 10$  fs (au sens de l'écart quadratique moyen). Quelle sera l'extension  $\Delta x$  (au sens de l'écart quadratique moyen) du faisceau dans le plan de Fourier ? On donne la longueur d'onde centrale,  $\lambda_0 = 800$  nm, le nombre de traits par mm gravés sur le réseau,  $1/d = 300 \text{ mm}^{-1}$ , l'angle d'incidence du faisceau sur le réseau,  $\alpha = 10^\circ$ , et la distance focale,  $f = 250$  mm.

**1.3** On cherche à utiliser le façonneur pour produire deux répliques de l'impulsion incidente décalées l'une par rapport à l'autre d'un retard  $\tau$ :

$$\mathcal{E}_{out}(t) = \eta (\mathcal{E}_{in}(t + \tau/2) + \mathcal{E}_{in}(t - \tau/2)) \quad (9)$$

Déterminer le module et la phase de la fonction de transfert correspondante. Calculer la valeur de  $\eta$  associée à la meilleure transmission possible pour ce filtre (en supposant que  $\tau$  est très supérieur à la durée  $\Delta t$  de l'impulsion incidente). Comment cette transmission se compare-t-elle à celle d'un interféromètre de Michelson que l'on aurait utilisé pour réaliser la même fonction ?

### Partie II : Modélisation d'une ligne 4f

L'objet de cette partie est de modéliser la partie centrale du façonneur (à l'exception des réseaux de diffraction), appelée ligne 4f et représentée à nouveau Fig. 3.

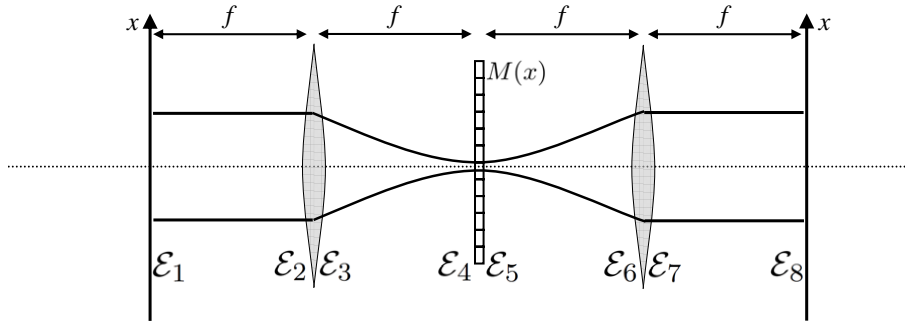


Fig. 3

Le système étant invariant par translation selon la dimension  $y$  (perpendiculaire au schéma des Fig. 1 à 3), on ne considèrera qu'une seule variable transverse,  $x$ , et le champ sera donc caractérisé par la grandeur complexe  $\mathcal{E}(x, \omega)$  en différents points du dispositif, comme représenté Fig. 3. Pour éviter toute confusion, on utilisera la notation  $\tilde{\mathcal{E}}(k_x, \omega)$  pour exprimer le champ dans l'espace des fréquences spatiales, qui est relié à  $\mathcal{E}(x, \omega)$  par les relations de Fourier habituelles (voir eq. 20 et 21).

On rappelle les relations de transfert entre le champ entrant,  $\mathcal{E}$ , et le champ sortant,  $\mathcal{E}'$  pour les éléments optiques suivants:

- Propagation libre sur une distance  $L$

$$\tilde{\mathcal{E}}'(k_x, \omega) = \tilde{\mathcal{E}}(k_x, \omega) \exp \left( -i \frac{k_x^2 c}{2\omega} L + i \frac{\omega}{c} L \right) \quad (10)$$



- Traversée d'une lentille de distance focale  $f$

$$\mathcal{E}'(x, \omega) = \mathcal{E}(x, \omega) \exp\left(-i\frac{\omega x^2}{2fc}\right) \quad (11)$$

**2.1** On considère tout d'abord la première moitié de la ligne. Exprimer le champ  $\tilde{\mathcal{E}}_4$  en fonction de  $\tilde{\mathcal{E}}_3$ , puis  $\tilde{\mathcal{E}}_3$  en fonction de  $\tilde{\mathcal{E}}_2$ , puis  $\tilde{\mathcal{E}}_2$  en fonction de  $\tilde{\mathcal{E}}_1$ . En déduire l'expression de  $\tilde{\mathcal{E}}_4(k_x, \omega)$  en fonction de la fonction  $\tilde{\mathcal{E}}_1$ . On explicitera le produit de convolution obtenu pour finalement exprimer  $\tilde{\mathcal{E}}_4(k_x, \omega)$  en fonction de  $\mathcal{E}_1$ .

**2.2** En prenant la transformée de Fourier de l'équation obtenue ci-dessus, et à l'aide d'un changement de variable approprié, exprimer  $\mathcal{E}_4(x, \omega)$  à l'aide de la fonction  $\tilde{\mathcal{E}}_1$ . Discuter les résultats obtenus aux questions 2.1 et 2.2.

**2.3** On considère maintenant la ligne  $4f$  dans son ensemble, comme représenté Fig. 3. L'effet du masque est simplement donné par la relation  $\mathcal{E}_5(x, \omega) = M(x)\mathcal{E}_4(x, \omega)$ . Exprimer  $\tilde{\mathcal{E}}_8(k_x, \omega)$  en fonction de  $\mathcal{E}_5$  puis montrer que

$$\tilde{\mathcal{E}}_8(k_x, \omega) = i \exp\left(i\frac{4\omega f}{c}\right) M(\zeta k_x) \tilde{\mathcal{E}}_1(-k_x, \omega) \quad (12)$$

où  $\zeta = -fc/\omega$ .

**2.4** Donner l'interprétation physique du facteur  $\exp(i4\omega f/c)$  et indiquer un changement de variable simple sur le champ  $\mathcal{E}_{out}(x, t)$  permettant de s'en affranchir. Dans la suite du problème, on utilisera donc l'expression simplifiée

$$\tilde{\mathcal{E}}_8(k_x, \omega) = iM(\zeta k_x) \tilde{\mathcal{E}}_1(-k_x, \omega) \quad (13)$$

**2.5** Discuter le résultat obtenu en l'absence de masque ( $M(x) = 1$ ), puis dans le cas général. Quel type d'opération ce dispositif permet-il d'effectuer ?

### Partie III : Modélisation du dispositif de façonnage

On s'intéresse maintenant à la modélisation du façonneur dans son ensemble, tel que représenté Fig. 1. Il s'agit pour cela de prendre en compte l'effet de la diffraction sur les réseaux placés en amont et en aval de la ligne  $4f$  étudiée lors de la partie précédente. On appellera  $\mathcal{E}_{in}(x, \omega)$  le champ incident juste avant la diffraction sur le premier réseau, et  $\mathcal{E}_{out}(x, \omega)$  le champ produit juste après la diffraction sur le second réseau, avec le choix d'axe transverse  $x$  comme représenté Fig. 1.

**3.1** On admet que la diffraction sur le premier réseau peut être caractérisée par la relation

$$\mathcal{E}_1(x, \omega) = \sqrt{b}\mathcal{E}_{in}(bx, \omega) \exp(i\gamma(\omega - \omega_0)x) \quad (14)$$

où  $b = \cos \alpha / \cos \beta_0$  et

$$\gamma = \frac{2\pi}{\omega_0 d \cos \beta_0}$$

De même, la diffraction sur le second réseau sera gouvernée par la relation

$$\mathcal{E}_{out}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{b}} \mathcal{E}_8(x/b, \omega) \exp\left(i \frac{\gamma(\omega - \omega_0)x}{b}\right) \quad (15)$$

Commenter les relations ci-dessus sans chercher à les démontrer rigoureusement. On pourra notamment s'intéresser à l'extension transverse du faisceau juste avant et juste après le premier réseau, et à la dispersion angulaire du faisceau diffracté.

**3.2** Montrer que

$$\tilde{\mathcal{E}}_{out}(k_x, \omega) = iM(\zeta(bk_x - \gamma(\omega - \omega_0)))\tilde{\mathcal{E}}_{in}(-k_x, \omega) \quad (16)$$

### Partie IV : Couplage spatio-temporel

**4.1** On suppose, uniquement dans cette question, que la divergence angulaire du faisceau est suffisamment faible pour qu'on puisse poser  $k_x = 0$  dans l'éq. 16. Exprimer dans cette limite la fonction de transfert  $R(\omega)$  du dispositif de façonnage en fonction de la fonction  $M$  caractérisant le masque programmable (on pourra remplacer  $\zeta$  par  $-fc/\omega_0$  en supposant que la largeur spectrale de l'impulsion est faible devant  $\omega_0$ ). Comparer l'expression obtenue au résultat de la question 1.1.

**4.2** On cherche à produire une impulsion décalée d'un retard  $\tau$  variable. Donner l'expression de la fonction de transfert correspondante  $R(\omega)$ , puis celle de la fonction  $M(x)$  correspondante selon l'approximation de la question 4.1.

**4.3** Calculer le champ  $\mathcal{E}_{out}(k_x, \omega)$  que l'on obtiendrait avec le masque  $M(x)$  obtenu en 4.2, puis en déduire l'expression du champ  $\mathcal{E}_{out}(x, t)$  en fonction de  $\mathcal{E}_{in}(x, t)$ . Qu'observe-t-on ?

**4.4** La Fig. 4, extraite d'un article de F. Frei *et al.* (J. Chem. Phys. **130**, 034302 (2009)), représente le profil transverse du faisceau lumineux mesuré en sortie du façonneur pour  $\tau = 0$  (a) et  $\tau = 500$  fs (b). Commenter le résultat expérimental sachant que les paramètres numériques sont les mêmes que ceux donnés à la question 1.2. A quel type de profil temporel pourrait correspondre le profil spatial mesuré en (c) ?

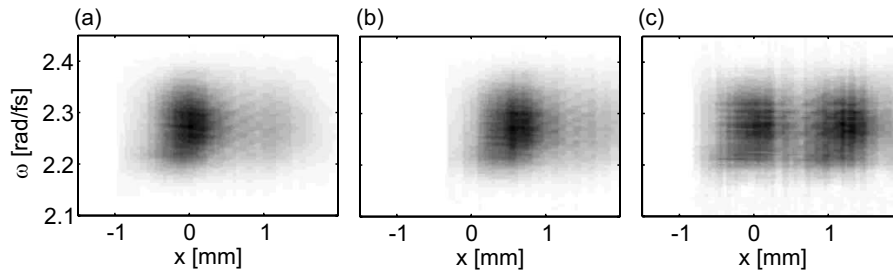


Fig. 4

### Formulaire

$$f(t) = \int f(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (17)$$

$$f(\omega) = \int f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (18)$$

$$\int f(t - \tau) \exp(i\omega t) dt = f(\omega) \exp(i\omega\tau) \quad (19)$$

$$\mathcal{E}(x, \omega) = \int \tilde{\mathcal{E}}(k_x, \omega) \exp(ik_x x) \frac{dk_x}{2\pi} \quad (20)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}(k_x, \omega) = \int \mathcal{E}(x, \omega) \exp(-ik_x x) dx \quad (21)$$

$$\int f_1(x, \omega) f_2(x, \omega) \exp(-ik_x x) dx = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}_1(k_x, \omega) \otimes \tilde{f}_2(k_x, \omega) = \int \tilde{f}_1(k'_x, \omega) \tilde{f}_1(k_x - k'_x, \omega) \frac{dk'_x}{2\pi} \quad (22)$$

$$\int \exp\left(-i\frac{ax^2}{2}\right) \exp(-ik_x x) dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \exp\left(i\frac{k_x^2}{2a}\right) \quad (23)$$

# Décalage Raman d'un soliton dans une fibre optique (2010)

*Durée : 1h30*

*Le cours et les notes personnelles sont autorisés.*

## Partie I : Equation de Schrödinger non-linéaire

On considère la propagation dans une fibre optique d'une impulsion brève de longueur d'onde centrale  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 1.5 \mu\text{m}$ . On écrit le champ électrique complexe sous la forme

$$\mathcal{E}(z, t) = \xi \mathcal{A}(z, t - k'_0 z) \exp(i(k_0 z - \omega_0 t)) \quad (24)$$

où  $k_0$  et  $k'_0$  sont respectivement le vecteur d'onde et l'inverse de la vitesse de groupe à la fréquence centrale. La constante  $\xi$  est définie de sorte que le carré de l'enveloppe,  $|\mathcal{A}(z, t)|^2$ , soit égal à la puissance instantanée circulant dans la fibre. La quantité

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{A}(z, t)|^2 dt \quad (25)$$

représente donc l'énergie portée par l'impulsion au point de coordonnée  $z$ . On modélise la propagation de l'impulsion à l'aide de l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = \hat{D} \mathcal{A} + \hat{K} \mathcal{A} \quad (26)$$

où

$$\hat{D} \mathcal{A}(z, t) = -i \frac{k''_0}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2}, \quad \text{et} \quad (27)$$

$$\hat{K} \mathcal{A}(z, t) = i\gamma |\mathcal{A}(z, t)|^2 \mathcal{A}(z, t) \quad (28)$$

où  $\gamma$  est une grandeur réelle positive.

**1.1** Ecrire l'action de l'opérateur  $\hat{D}$  sur  $\mathcal{A}(z, \omega)$ . Rappeler l'origine physique de ce terme.

**1.2** A quel effet d'optique non-linéaire le terme  $\hat{K}$  correspond-il? Que doit-on supposer sur le temps de réponse de la polarisation non-linéaire du troisième ordre pour pouvoir écrire l'éq. 28?

**1.3** Expliquer pour quelle raison physique la grandeur  $W(z)$  doit être indépendante de  $z$ .

**1.4** Exprimer la dérivée par rapport à  $z$  de l'éq. 25 sous la forme d'une somme de deux termes

$$\frac{dW}{dz} = \left. \frac{dW}{dz} \right|_D + \left. \frac{dW}{dz} \right|_K \quad (29)$$

faisant intervenir respectivement les contributions des opérateurs  $\hat{D}$  et  $\hat{K}$ . Calculer ensuite chacun des deux termes (en s'aidant du théorème de Parseval-Plancherel pour le premier terme) et retrouver

le résultat de la question 1.3. Par la suite, la quantité  $W(z)$ , indépendante de  $z$ , sera simplement notée  $W$ .

**1.5** Pour cette question uniquement, on cherche une solution de l'éq. 26 de type soliton

$$\mathcal{A}(z, t) = \mathcal{A}_0 \frac{\exp(i\psi(z))}{\cosh t/\tau} \quad (30)$$

Exprimer la fonction  $\psi(z)$  et établir une relation entre  $|k_0''|$ ,  $\gamma$ ,  $\mathcal{A}_0$  et  $\tau$ . Quelle propriété remarquable une telle impulsion possède-t-elle? Quel doit être le signe de  $k_0''$  pour que le soliton soit solution de l'éq. 26?

**1.6** On revient au cas d'une solution générale  $\mathcal{A}(z, t)$  de l'éq. 26. On définit la fréquence moyenne (par définition nulle en  $z = 0$ ) à l'aide de la relation

$$\langle \omega \rangle(z) = \frac{1}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\mathcal{A}(z, \omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (31)$$

En procédant comme à la question 1.4, et toujours à l'aide du théorème de Parseval-Plancherel, montrer que  $\langle \omega \rangle(z)$  est indépendant de  $z$ .

**1.7** La Fig. 1, extraite d'un article intitulé *Discovery of the soliton self-frequency shift* (Mitschke et Mollenauer, Opt. Lett. **11**, 659 (1986)), représente le spectre obtenu en sortie d'une fibre optique pour des valeurs de l'énergie de plus en plus importantes (les courbes sont décalées de bas en haut lorsque l'énergie augmente).

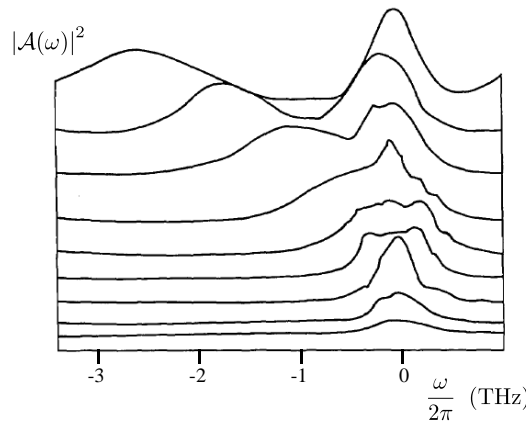


Fig. 1

Ce résultat vous semble-t-il en accord avec la théorie développée plus haut?

## Partie II : Cas d'une réponse non instantanée

On souhaite maintenant prendre en compte le temps de réponse fini de la polarisation non-linéaire induite dans la fibre optique. Pour cela, on remplace le terme non-linéaire (eq. 28) par la relation

$$\hat{K}\mathcal{A}(z, t) = i\gamma \left( R(t) \otimes |\mathcal{A}(z, t)|^2 \right) \mathcal{A}(z, t) = i\gamma \left( \int_{-\infty}^{+\infty} R(t') |\mathcal{A}(z, t - t')|^2 dt' \right) \mathcal{A}(z, t) \quad (32)$$

où la fonction  $R(t)$  est une grandeur réelle, nulle pour  $t < 0$ , et d'intégrale égale à 1. On introduit en outre la grandeur

$$T_R = \int_0^{+\infty} tR(t)dt \quad (33)$$

qui caractérise le temps de réponse de la non-linéarité. Cette quantité peut être mesurée expérimentalement et a pour valeur  $T_R = 3.0$  fs dans le cas d'une fibre en silice.

**2.1** Pour quelle raison la fonction  $R(t)$  est-elle supposée nulle pour  $t < 0$ ?

**2.2** Calculer à nouveau  $\frac{dW}{dz}\Big|_K$  avec la nouvelle expression de  $\hat{K}$  et vérifier que l'énergie est bien conservée.

**2.3** On suppose que la durée de l'impulsion est grande devant  $T_R$ , ce qui permet de supposer que  $t'$  est petit devant la durée de l'impulsion dans l'éq. 32. En effectuant un développement limité de  $|\mathcal{A}(z, t - t')|^2$  au premier ordre en  $t'$ , on exprimera  $\hat{K}\mathcal{A}(z, t)$  à l'aide de  $\mathcal{A}(z, t)$  et de  $\partial|\mathcal{A}(z, t)|^2/\partial t$ .

**2.4** Montrer que

$$\frac{d\langle\omega\rangle}{dz} = -\frac{\gamma T_R}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial|\mathcal{A}(z, t)|^2}{\partial t} \right)^2 dt \quad (34)$$

et commenter à nouveau le résultat expérimental représenté Fig. 1.

**2.5** Retrouver par un raisonnement qualitatif pour quelle raison physique un temps de réponse fini dans le déphasage non-linéaire se manifeste par un décalage du spectre vers les basses fréquences (on pourra négliger dans cette question la dispersion et considérer la phase instantanée et la fréquence instantanée induite par le terme non-linéaire seul).

**2.6** On suppose que l'impulsion en entrée de fibre est un soliton, comme celui étudié à la question 1.5. Exprimer la valeur de  $d\langle\omega\rangle/dz$  en  $z = 0$  uniquement en fonction de  $T_R$ ,  $|k_0''|$  et  $\tau$ . On pourra utiliser les résultats de la question 1.5 ainsi que les relations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 x} dx = 2 \quad (35)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^4 x} dx = \frac{4}{3} \quad (36)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^6 x} dx = \frac{16}{15} \quad (37)$$

**2.7** Dans une de leurs expériences effectuée avec une impulsion de type soliton avec  $\tau = 150$  fs, Mitschke et Mollenauer mesurent un décalage de -8 THz pour la fréquence  $\langle\omega\rangle/(2\pi)$  après une propagation dans une fibre de longueur égale à 392 m. Ce résultat est-il en accord avec la théorie développée dans cette partie? On donne la dispersion de la fibre,  $k_0'' = -17.9$  ps<sup>2</sup>/km.

**2.8** Cet effet vous semble-t-il significatif dans le cas des télécommunications par fibres optiques où les durées d'impulsion utilisées sont de l'ordre de 20 ps?

# Compression spectrale (2011)

Durée : 1h30

Le cours et les notes personnelles sont autorisés.

L'objet de ce problème est la compression spectrale, méthode permettant de réduire la largeur spectrale d'une impulsion brève à l'aide d'un processus d'optique non-linéaire.

## Partie I : Modèle théorique

On considère la propagation dans une fibre optique d'une impulsion femtoseconde de fréquence centrale  $\omega_0$ . On écrit le champ électrique complexe sous la forme  $\mathcal{E}(z, t) = \eta \mathcal{A}(z, t - k'_0 z) \exp(i(k_0 z - \omega_0 t))$ , où  $k_0$  et  $k'_0$  sont respectivement le vecteur d'onde et l'inverse de la vitesse de groupe à la fréquence centrale. La constante  $\eta$  - proportionnelle à la racine carrée de l'énergie de l'impulsion - est définie de sorte que la fonction  $\mathcal{A}(0, t)$  soit normée:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{A}(0, t)|^2 dt = 1. \quad (38)$$

La dispersion de vitesse de groupe est négligée dans tout le problème, ce donne l'équation de propagation

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = i\xi |\mathcal{A}(z, t)|^2 \mathcal{A}(z, t) \quad (39)$$

où  $\xi$  est une grandeur réelle strictement positive.

**1.1** Rappeler l'effet physique à l'origine du second membre de l'éq. 39, et rappeler la relation entre le coefficient  $\xi$  et le terme approprié de la susceptibilité non-linéaire. On montrera en outre que  $\xi$  est proportionnel à l'énergie de l'impulsion.

**1.2** Montrer que l'intensité temporelle  $I(z, t) = |\mathcal{A}(z, t)|^2$  est indépendante de  $z$ . Cette grandeur sera simplement notée  $I(t)$  dans la suite du problème.

**1.3** En déduire l'expression de  $\mathcal{A}(z, t)$  en fonction de  $\mathcal{A}(0, t)$ .

**1.4** On pose  $\mathcal{A}(z, t) = |\mathcal{A}(z, t)| \exp(i\phi(z, t))$ . Quelle est la signification physique de la grandeur  $\Omega(z, t) = -\partial\phi(z, t)/\partial t$ ?

**1.5** Exprimer  $\Omega(z, t)$  à l'aide de  $\Omega(0, t)$  et de  $I(t)$ . Commenter.

## Partie II : Evolution de la largeur spectrale

**2.1** En chaque point  $z$ , on définit les valeurs moyennes des grandeurs quelconques  $f(z, t)$  et  $g(z, \omega)$  par les relations

$$\langle f(z, t) \rangle_z = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, t) |\mathcal{A}(z, t)|^2 dt \quad \text{et} \quad \langle g(z, \omega) \rangle_z = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z, \omega) |\mathcal{A}(z, \omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (40)$$

Justifier brièvement pour quelles raisons les lois de probabilité proposées sont bien normalisées.

Que dire de  $\langle f(t) \rangle_z$  pour une fonction  $f$  ne dépendant pas de  $z$ ?

**2.2** Sachant que  $\langle \omega \rangle_z = \langle \Omega(z, t) \rangle$ , et que  $\langle \omega \rangle_{z=0} = 0$  par définition même de la fréquence centrale  $\omega_0$ , montrer que  $\langle \omega \rangle_z = 0$ .

**2.3** On considère la variance  $\Delta\omega^2(z) = \langle \omega^2 \rangle_z - \langle \omega \rangle_z^2$ . A l'aide du théorème de Parseval-Plancherel, montrer que  $\Delta\omega^2(z) = \Delta\omega_{\phi=0}^2 + \langle \Omega(z, t)^2 \rangle$ , où  $\Delta\omega_{\phi=0}^2$  est par définition la variance que l'on obtiendrait pour une phase temporelle identiquement nulle. Donner une interprétation physique de ce résultat.

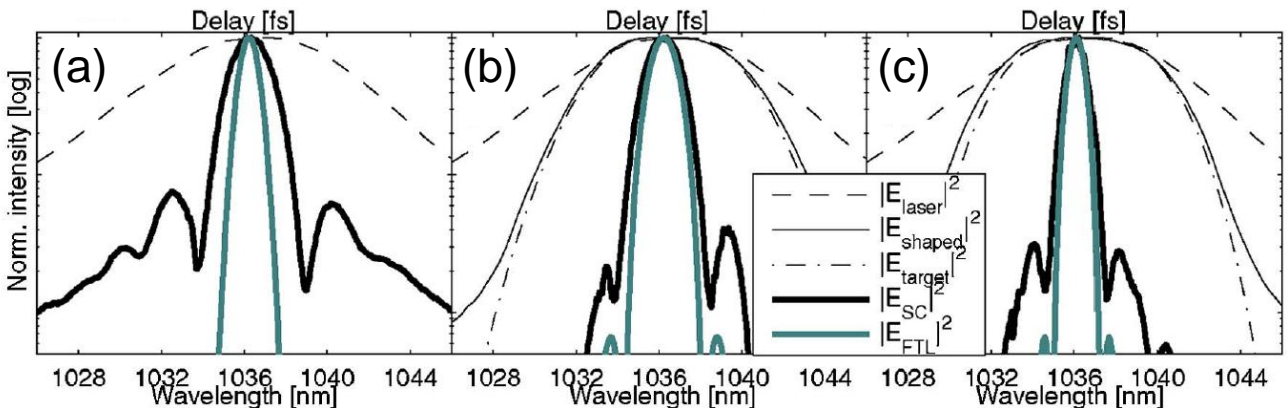
**2.4** On injecte dans la fibre optique une impulsion telle que  $\phi(0, t) = 0$ . Qu'observe-t-on? Est-il possible d'obtenir dans ce cas une compression spectrale, c'est à dire une diminution de la largeur spectrale en aval de la fibre?

**2.5** On injecte dans la fibre optique une impulsion à dérive de fréquence, définie par  $\phi(0, t) = \alpha t^2$ . Quelle est la condition sur le signe de  $\alpha$  pour que  $\Delta\omega(z)$  puisse diminuer avec  $z$ ? Donnez une interprétation physique du résultat, en vous aidant d'une représentation graphique de la fréquence instantanée de l'impulsion en fonction du temps, dans le cas d'une impulsion de forme gaussienne.

**2.6** Déterminer la valeur optimale de  $\alpha$  pour avoir la largeur spectrale la plus faible possible en sortie d'une fibre de longueur  $L$ .

### Partie III : Résultats expérimentaux

La figure ci-dessous est extraite d'un article intitulé *Transform-limited spectral compression by self-phase modulation of amplitude-shaped pulses with negative chirp* (E.R. Andresen, J.M. Dudley, D. Oron, C. Finot, et H. Rigneault, Opt. Lett. **36**, 707 (2011)).



La figure représente les spectres obtenus en sortie d'une fibre optique de longueur  $L = 1$  m, représentés en échelle semi-logarithmique pour une impulsion incidente de forme gaussienne (a) ou parabolique (b, c), de durées à mi-hauteur  $\tau = 1.5$  ps (a, b) ou 2.5 ps (c), avec  $\alpha = 5.6$  ps $^{-2}$  (a),



5 ps<sup>-2</sup> (b) ou 3 ps<sup>-2</sup> (c), et une énergie par impulsion égale à 2.8 nJ (a), 1.8 nJ (b), ou 5.8 nJ (c). Dans chaque cas, les auteurs de l'article ont ajusté le paramètre  $\alpha$  pour obtenir le spectre le plus étroit en sortie de fibre. La courbe noire en trait épais représente le spectre mesuré en sortie de fibre tandis que la courbe en bleu-vert représente le spectre calculé pour une impulsion de même forme temporelle mais limitée par transformée de Fourier ( $\Omega(t) = 0$ ). Les impulsions à dérive de fréquence de forme gaussienne ou parabolique sont produites à partir des impulsions gaussiennes limitées par transformée de Fourier produites par le laser (spectre représenté en trait interrompu) à l'aide d'un dispositif de façonnage d'impulsion permettant de modifier l'amplitude et la phase spectrale des impulsions incidentes. Dans le cas (a), seule la phase spectrale est modifiée, tandis que dans les cas (b) et (c), l'amplitude spectrale est également modifiée de manière appropriée (courbe en trait mixte).

On utilisera les expressions suivantes de l'intensité, respectivement pour une impulsion gaussienne

$$I(t) = \frac{1}{\Delta t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\Delta t^2}\right) \quad (41)$$

et pour une impulsion parabolique

$$I(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}\tau} \left(1 - 2\frac{t^2}{\tau^2}\right) \text{ pour } |t| \leq \frac{\tau}{\sqrt{2}} \text{ et } I(t) = 0 \text{ pour } |t| > \frac{\tau}{\sqrt{2}}. \quad (42)$$

où  $\Delta t$  représente la largeur temporelle de l'impulsion au sens de l'écart quadratique moyen, tandis que  $\tau$  est la largeur à mi-hauteur.

**3.1** Pour quelle forme d'impulsion le spectre obtenu en sortie de fibre est-il le plus proche de celui attendu pour une impulsion limitée par transformée de Fourier? Pourquoi?

**3.2** Dans le cas d'une impulsion parabolique, comparer une détermination directe de la valeur optimale de  $\alpha$  au résultat général établi à la question 2.6.

**3.3** En vous aidant des paramètres expérimentaux utilisés dans le cas (b), pouvez-vous prévoir l'énergie requise dans le cas (c) compte tenu de la durée de l'impulsion et de la valeur de  $\alpha$ ? Comparer à la valeur utilisée dans l'expérience.

**3.4** Dans le cas d'une impulsion de forme gaussienne, quelle autre méthode pourrait-on employer pour façonner l'impulsion produite par le laser avant de l'injecter dans la fibre?

**3.5** Quel est l'avantage de la méthode de compression spectrale étudiée dans ce problème par rapport à ce que l'on aurait pu obtenir à l'aide d'un filtre linéaire programmable comme un dispositif de façonnage d'impulsion, qui par définition n'exploite que des processus d'optique linéaire?