

Concepts fondamentaux de la physique

Optique non-linéaire et optique quantique

Juin 2010

Durée : 3h

Les deux problèmes sont indépendants et devront être rédigés sur des copies séparées.

Il est recommandé de consacrer un temps équivalent à chacun d'entre eux.

Le cours et les notes personnelles sont autorisés.

Problème d'optique non-linéaire *Décalage Raman d'un soliton dans une fibre optique*

Partie I : Equation de Schrödinger non-linéaire

On considère la propagation dans une fibre optique d'une impulsion brève de longueur d'onde centrale $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 1.5 \mu\text{m}$. On écrit le champ électrique complexe sous la forme

$$\mathcal{E}(z, t) = \xi \mathcal{A}(z, t - k'_0 z) \exp(i(k_0 z - \omega_0 t)) \quad (1)$$

où k_0 et k'_0 sont respectivement le vecteur d'onde et l'inverse de la vitesse de groupe à la fréquence centrale. La constante ξ est définie de sorte que le carré de l'enveloppe, $|\mathcal{A}(z, t)|^2$, soit égal à la puissance instantanée circulant dans la fibre. La quantité

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{A}(z, t)|^2 dt \quad (2)$$

représente donc l'énergie portée par l'impulsion au point de coordonnée z . On modélise la propagation de l'impulsion à l'aide de l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = \hat{D}\mathcal{A} + \hat{K}\mathcal{A} \quad (3)$$

où

$$\hat{D}\mathcal{A}(z, t) = -i \frac{k''_0}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} \quad (4)$$

et

$$\hat{K}\mathcal{A}(z, t) = i\gamma |\mathcal{A}(z, t)|^2 \mathcal{A}(z, t) \quad (5)$$

où γ est une grandeur réelle positive.

1.1 *Ecrire l'action de l'opérateur $\hat{D}$ sur $\mathcal{A}(z, \omega)$. Rappeler l'origine physique de ce terme.*

$$\hat{D}\mathcal{A}(z, \omega) = i \frac{k''_0 \omega^2}{2} \mathcal{A}(z, \omega) \quad (6)$$

Ce terme provient du terme quadratique dans le développement de $k(\omega)$ autour de ω_0 . Il est associé à la dispersion de vitesse de groupe.

1.2 *A quel effet d'optique non-linéaire le terme $\hat{K}$ correspond-il? Que doit-on supposer sur le temps de réponse de la polarisation non-linéaire du troisième ordre pour pouvoir écrire l'éq. 5?*

Ce terme correspond à l'effet Kerr optique. Il est associé à une polarisation non-linéaire instantanée (temps de

réponse nul), qui s'écrit

$$\mathcal{P}(z, t) = \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{8} |\mathcal{E}(z, t)|^2 \mathcal{E}(z, t) \quad (7)$$

1.3 Expliquer pour quelle raison physique la grandeur $W(z)$ doit être indépendante de z .

Il n'y a pas d'énergie déposée dans le système car la polarisation non-linéaire est réelle, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'absorption. Par conservation de l'énergie, l'énergie de l'impulsion doit donc être constante.

1.4 Exprimer la dérivée par rapport à z de l'éq. 2 sous la forme d'une somme de deux termes

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dz} \Big|_D + \frac{dW}{dz} \Big|_K \quad (8)$$

faisant intervenir respectivement les contributions des opérateurs $\hat{D}$ et $\hat{K}$. Calculer ensuite chacun des deux termes (en s'aidant du théorème de Parseval-Plancherel pour le premier terme) et retrouver le résultat de la question 1.3. Par la suite, la quantité $W(z)$, indépendante de z , sera simplement notée W .

On a immédiatement

$$\frac{dW}{dz} = \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}^*(z, t) \mathcal{A}(z, t) dt \quad (9)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}^*(z, t) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} dt + c.c. \quad (10)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}^*(z, t) \hat{D} \mathcal{A}(z, t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}^*(z, t) \hat{K} \mathcal{A}(z, t) dt + c.c. \quad (11)$$

soit

$$\frac{dW}{dz} \Big|_D = \int \mathcal{A}(z, t)^* \hat{D} \mathcal{A}(z, t) dt + c.c. \quad (12)$$

$$= \int \mathcal{A}(z, \omega)^* \hat{D} \mathcal{A}(z, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} + c.c. \quad (13)$$

$$= i \frac{k_0''}{2} \int \omega^2 |\mathcal{A}(z, \omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} + c.c. \quad (14)$$

Cette grandeur est évidemment nulle puisque le premier terme est imaginaire pur. De même,

$$\frac{dW}{dz} \Big|_K = \int \mathcal{A}(z, t)^* \hat{K} \mathcal{A}(z, t) dt + c.c. \quad (15)$$

$$= i\gamma \int |\mathcal{A}(z, t)|^4 dt + c.c. \quad (16)$$

qui est à nouveau nul puisque le premier terme est imaginaire pur. $W(z) = W$ est donc indépendant de z .

1.5 Pour cette question uniquement, on cherche une solution de l'éq. 3 de type soliton

$$\mathcal{A}(z, t) = \mathcal{A}_0 \frac{\exp(i\psi(z))}{\cosh t/\tau} \quad (17)$$

Exprimer la fonction $\psi(z)$ et établir une relation entre $|k_0''|$, γ , $\mathcal{A}_0$ et τ . Quelle propriété remarquable une telle impulsion possède-t-elle? Quel doit être le signe de k_0'' pour que le soliton soit solution de l'éq. 3?

On a

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = i \frac{d\psi}{dz} \mathcal{A}(z, t) \quad (18)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\mathcal{A}_0 \frac{\exp(i\psi(z))}{\tau} \frac{\sinh t/\tau}{\cosh^2 t/\tau} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mathcal{A}_0 \frac{\exp(i\psi(z))}{\tau^2} \frac{1}{\cosh t/\tau} + 2\mathcal{A}_0 \frac{\exp(i\psi(z))}{\tau^2} \frac{\sinh^2 t/\tau}{\cosh^3 t/\tau} \quad (20)$$

$$= \mathcal{A}_0 \frac{\exp(i\psi(z))}{\tau^2} \frac{1}{\cosh t/\tau} - 2\mathcal{A}_0 \frac{\exp(i\psi(z))}{\tau^2} \frac{1}{\cosh^3 t/\tau} \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \mathcal{A} - \frac{2}{\tau^2 \cosh^2 t/\tau} \mathcal{A} \quad (22)$$

Le terme dû à la dispersion s'écrit donc

$$\hat{D}\mathcal{A} = -\frac{ik_0''}{2\tau^2} \mathcal{A} + \frac{2ik_0''}{2\tau^2 \cosh^2 t/\tau} \mathcal{A} \quad (23)$$

Par ailleurs, le terme Kerr s'écrit

$$\hat{K}\mathcal{A} = \frac{i\gamma|\mathcal{A}_0|^2}{\cosh^2 t/\tau} \mathcal{A} \quad (24)$$

En remplaçant dans l'équation de Schrödinger non-linéaire, on obtient

$$i\frac{d\psi}{dz} = -\frac{ik_0''}{2\tau^2} + \frac{2ik_0''}{2\tau^2 \cosh^2 t/\tau} + \frac{i\gamma|\mathcal{A}_0|^2}{\cosh^2 t/\tau} \quad (25)$$

ce qui nous donne d'une part

$$\frac{d\psi}{dz} = -\frac{k_0''}{2\tau^2} \quad (26)$$

soit par exemple

$$\psi(z) = -\frac{k_0'' z}{2\tau^2} \quad (27)$$

et d'autre part

$$k_0'' = -\gamma|\mathcal{A}_0|^2 \tau^2 \quad (28)$$

On en déduit que la dispersion de vitesse de groupe doit être négative, ce qui est effectivement le cas dans la silice à une longueur d'onde de 1.5 μm . Dans ces conditions, le soliton a la propriété remarquable de se propager sans déformation le long de la fibre optique.

1.6 On revient au cas d'une solution générale $\mathcal{A}(z, t)$ de l'éq. 3. On définit la fréquence moyenne (par définition nulle en $z = 0$) à l'aide de la relation

$$\langle \omega \rangle(z) = \frac{1}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\mathcal{A}(z, \omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (29)$$

En procédant comme à la question 1.4, et toujours à l'aide du théorème de Parseval-Plancherel, montrer que $\langle \omega \rangle(z)$ est indépendant de z .

La contribution liée à $\hat{D}$ s'écrit

$$\left. \frac{d\langle \omega \rangle}{dz} \right|_D = \frac{1}{W} \int \mathcal{A}(z, \omega)^* \omega \hat{D}\mathcal{A}(z, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} + c.c. \quad (30)$$

$$= \frac{ik_0''}{2W} \int \omega^3 |\mathcal{A}(z, \omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} + c.c. \quad (31)$$

Cette grandeur est bien nulle. La contribution liée à $\hat{K}$ s'écrit

$$\left. \frac{d\langle \omega \rangle}{dz} \right|_K = \frac{1}{W} \int \omega \mathcal{A}(z, \omega)^* \hat{K}\mathcal{A}(z, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} + c.c. \quad (32)$$

$$= \frac{-i}{W} \int (-i\omega \mathcal{A}(z, \omega))^* \hat{K} \mathcal{A}(z, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} + c.c. \quad (33)$$

$$= \frac{-i}{W} \int \left(\frac{\partial \mathcal{A}(z, t)}{\partial t} \right)^* \hat{K} \mathcal{A}(z, t) dt + c.c. \quad (34)$$

$$= \frac{\gamma}{W} \int \frac{\partial \mathcal{A}^*(z, t)}{\partial t} |\mathcal{A}(z, t)|^2 \mathcal{A}(z, t) dt + c.c. \quad (35)$$

$$= \frac{\gamma}{W} \int |\mathcal{A}(z, t)|^2 \frac{\partial |\mathcal{A}(z, t)|^2}{\partial t} dt \quad (36)$$

$$= \frac{\gamma}{2W} \int \frac{\partial |\mathcal{A}(z, t)|^4}{\partial t} dt \quad (37)$$

$$= \frac{\gamma}{2W} [|\mathcal{A}(z, t)|^4]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (38)$$

puisque l'intensité temporelle s'annule de part et d'autre de l'impulsion. On en déduit donc que la fréquence moyenne de l'impulsion se conserve.

1.7 La Fig. 1, extraite d'un article intitulé *Discovery of the soliton self-frequency shift* (Mitschke et Mollenauer, *Opt. Lett.* **11**, 659 (1986)), représente le spectre obtenu en sortie d'une fibre optique pour des valeurs de l'énergie de plus en plus importantes (les courbes sont décalées de bas en haut lorsque l'énergie augmente).

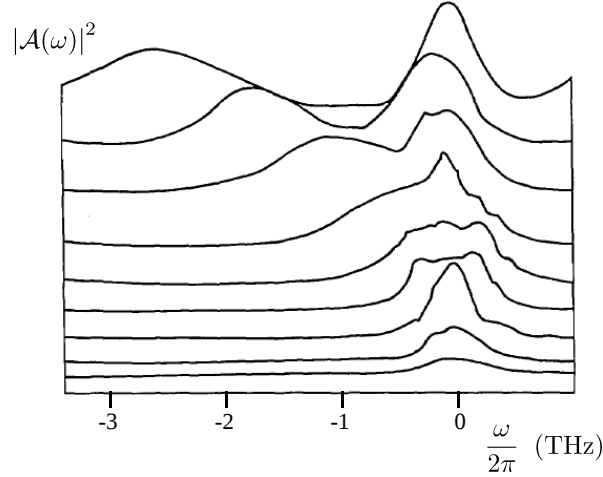


Fig. 1

Ce résultat vous semble-t-il en accord avec la théorie développée plus haut?

Le résultat n'est pas du tout en accord avec la théorie puisqu'on observe un décalage du spectre vers le rouge (*i.e.* vers les basses fréquences).

Partie II : Cas d'une réponse non instantanée

On souhaite maintenant prendre en compte le temps de réponse fini de la polarisation non-linéaire induite dans la fibre optique. Pour cela, on remplace le terme non-linéaire (eq. 5) par la relation

$$\hat{K} \mathcal{A}(z, t) = i\gamma \left(R(t) \otimes |\mathcal{A}(z, t)|^2 \right) \mathcal{A}(z, t) = i\gamma \left(\int_{-\infty}^{+\infty} R(t') |\mathcal{A}(z, t - t')|^2 dt' \right) \mathcal{A}(z, t) \quad (39)$$

où la fonction $R(t)$ est une grandeur réelle, nulle pour $t < 0$, et d'intégrale égale à 1. On introduit en outre la grandeur

$$T_R = \int_0^{+\infty} t R(t) dt \quad (40)$$

qui caractérise le temps de réponse de la non-linéarité. Cette quantité peut être mesurée expérimentalement et a pour valeur $T_R = 3.0$ fs dans le cas d'une fibre en silice.

2.1 Pour quelle raison la fonction $R(t)$ est-elle supposée nulle pour $t < 0$?

C'est le principe de causalité.

2.2 Calculer à nouveau $\left. \frac{dW}{dz} \right|_K$ avec la nouvelle expression de $\hat{K}$ et vérifier que l'énergie est bien conservée.

On a maintenant

$$\left. \frac{dW}{dz} \right|_K = \int \mathcal{A}(z, t)^* \hat{K} \mathcal{A}(z, t) dt + c.c. \quad (41)$$

$$= i\gamma \int |\mathcal{A}(z, t)|^2 (R(t) \otimes |\mathcal{A}(z, t)|^2) dt + c.c. \quad (42)$$

Comme la fonction $R(t)$ est réelle, cette quantité est nulle, ce qui assure la conservation de l'énergie.

2.3 On suppose que la durée de l'impulsion est grande devant T_R , ce qui permet de supposer que t' est petit devant la durée de l'impulsion dans l'éq. 39. En effectuant un développement limité de $|\mathcal{A}(z, t - t')|^2$ au premier ordre en t' , on exprimera $\hat{K}\mathcal{A}(z, t)$ à l'aide de $\mathcal{A}(z, t)$ et de $\partial|\mathcal{A}(z, t)|^2/\partial t$.

On a

$$\hat{K}\mathcal{A}(z, t) = i\gamma \left(\int_{-\infty}^{+\infty} R(t') |\mathcal{A}(z, t - t')|^2 dt' \right) \mathcal{A}(z, t) \quad (43)$$

$$= i\gamma \left(\int_{-\infty}^{+\infty} R(t') \left(|\mathcal{A}(z, t)|^2 - t' \frac{\partial |\mathcal{A}(z, t)|^2}{\partial t} \right) dt' \right) \mathcal{A}(z, t) \quad (44)$$

$$= i\gamma \left(|\mathcal{A}(z, t)|^2 - T_R \frac{\partial |\mathcal{A}(z, t)|^2}{\partial t} \right) \mathcal{A}(z, t) \quad (45)$$

On retrouve donc l'effet Kerr optique instantané auquel vient s'ajouter une petite perturbation proportionnelle à T_R .

2.4 Montrer que

$$\frac{d\langle \omega \rangle}{dz} = -\frac{\gamma T_R}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial |\mathcal{A}(z, t)|^2}{\partial t} \right)^2 dt \quad (46)$$

et commenter à nouveau le résultat expérimental représenté Fig. 1.

En ne conservant que le terme en T_R , qui est le seul susceptible de donner une contribution non nulle, et en procédant comme à la question 1.6, on obtient

$$\frac{d\langle \omega \rangle}{dz} = \left. \frac{d\langle \omega \rangle}{dz} \right|_K = -\frac{\gamma T_R}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{A}^*(z, t)}{\partial t} \frac{\partial |\mathcal{A}(z, t)|^2}{\partial t} \mathcal{A}(z, t) dt + c.c. \quad (47)$$

$$= -\frac{\gamma T_R}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial |\mathcal{A}(z, t)|^2}{\partial t} \frac{\partial |\mathcal{A}(z, t)|^2}{\partial t} dt \quad (48)$$

$$= -\frac{\gamma T_R}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial |\mathcal{A}(z, t)|^2}{\partial t} \right)^2 dt \quad (49)$$

Cette grandeur est strictement négative ce qui signifie que le spectre se décale vers le rouge lors de la propagation. Cet effet est d'autant plus important lorsque la puissance augmente, en accord avec la Fig. 1.

2.5 Retrouver par un raisonnement qualitatif pour quelle raison physique un temps de réponse fini dans le déphasage non-linéaire se manifeste par un décalage du spectre vers les basses fréquences (on pourra négliger dans cette question la dispersion et considérer la phase instantanée et la fréquence instantanée induite par le terme non-linéaire seul).

Le terme non-linéaire induit une phase non-linéaire

$$\Phi(z, t) = \gamma z R(t) \otimes |\mathcal{A}(t)|^2 \quad (50)$$

Dans le cas d'une réponse instantanée, la phase non-linéaire a une tangente horizontale au centre de l'impulsion. Dans le cas d'un temps de réponse fini, la phase non-linéaire continue d'augmenter au centre de l'impulsion. Ceci correspond à une fréquence instantanée $\Omega(t) = -d\Phi/dt$ négative, ce qui explique que le spectre se décale vers le rouge.

2.6 On suppose que l'impulsion en entrée de fibre est un soliton, comme celui étudié à la question 1.5. Exprimer la valeur de $d\langle\omega\rangle/dz$ en $z = 0$ uniquement en fonction de T_R , $|k_0''|$ et τ . On pourra utiliser les résultats de la question 1.5 ainsi que les relations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 x} dx = 2 \quad (51)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^4 x} dx = \frac{4}{3} \quad (52)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^6 x} dx = \frac{16}{15} \quad (53)$$

Pour un soliton, on a

$$|\mathcal{A}(0, t)|^2 = \frac{|\mathcal{A}_0|^2}{\cosh^2 t/\tau} \quad (54)$$

donc

$$\frac{\partial |\mathcal{A}(0, t)|^2}{\partial t} = -\frac{2|\mathcal{A}_0|^2 \sinh t/\tau}{\tau \cosh^3 t/\tau} \quad (55)$$

et

$$\left(\frac{\partial |\mathcal{A}(0, t)|^2}{\partial t} \right)^2 = \frac{4|\mathcal{A}_0|^4 \sinh^2 t/\tau^2}{\tau^2 \cosh^6 t/\tau} \quad (56)$$

$$= \frac{4|\mathcal{A}_0|^4}{\tau^2} \left(\frac{1}{\cosh^4 t/\tau} - \frac{1}{\cosh^6 t/\tau} \right) \quad (57)$$

On en déduit

$$\int \left(\frac{\partial |\mathcal{A}(0, t)|^2}{\partial t} \right)^2 dt = \frac{4|\mathcal{A}_0|^4}{\tau} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^4 x} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^6 x} dx \right) \quad (58)$$

$$= \frac{4|\mathcal{A}_0|^4}{\tau} \left(\frac{4}{3} - \frac{16}{15} \right) \quad (59)$$

$$= \frac{16|\mathcal{A}_0|^4}{15\tau} \quad (60)$$

La dérivée de la fréquence moyenne s'écrit donc

$$\frac{d\langle\omega\rangle}{dz} = -\frac{16\gamma|\mathcal{A}_0|^4 T_R}{15W\tau} = -\frac{16|k_0''||\mathcal{A}_0|^2 T_R}{15W\tau^3} \quad (61)$$

où l'on a utilisé la relation établie à la question 1.5. Par ailleurs, l'énergie du soliton s'écrit

$$W = \int \frac{|\mathcal{A}_0|^2}{\cosh^2 t/\tau} dt = |\mathcal{A}_0|^2 \tau \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = 2|\mathcal{A}_0|^2 \tau \quad (62)$$

Donc

$$\frac{d\langle\omega\rangle}{dz} = -\frac{8|k_0''|T_R}{15\tau^4} \quad (63)$$

2.7 Dans une de leurs expériences effectuée avec une impulsion de type soliton avec $\tau = 150$ fs, Mitschke et Mollenauer mesurent un décalage de -8 THz pour la fréquence $\langle\omega\rangle/(2\pi)$ après une propagation dans une fibre de longueur égale à 392 m. Ce résultat est-il en accord avec la théorie développée dans cette partie? On donne la dispersion de la fibre, $k_0'' = -17.9$ ps²/km.

En appliquant la formule établie ci-dessus, on obtient

$$\frac{d\langle\frac{\omega}{2\pi}\rangle}{dz} = -\frac{4.56 \cdot 10^{-3} \text{ THz/km}}{\tau^4} = -\frac{0.044 \text{ THz/km}}{\Delta t_{1/2}^4} \quad (64)$$

où τ et $\Delta t_{1/2}$ sont exprimés en ps. Ce résultat est identique à celui publié par J.P. Gordon dans un article intitulé *Theory of the soliton self-frequency shift* (Opt. Lett. **11**, 662 (1986)). Pour $\tau = 150$ fs et une fibre de 392 m, on trouve un décalage de -3.5 THz. Ce résultat est environ deux fois plus faible que la valeur expérimentale, ce qui n'est pas si mal compte tenu de l'extrapolation linéaire sur la variation de $\langle\omega\rangle$. En outre, un facteur 2 sur le décalage correspond à une erreur de seulement 20% sur la durée de l'impulsion, et peut aussi s'expliquer par le fait que l'impulsion n'était pas tout à fait de forme sécante hyperbolique.

Le décalage Raman est un processus qui joue un rôle très important dans la propagation d'impulsions femtosecondes dans des fibres optiques. Parmi les applications, on peut mentionner la possibilité d'accorder la longueur d'onde de l'impulsion produite simplement en choisissant une longueur de fibre appropriée.

2.8 Cet effet vous semble-t-il significatif dans le cas des télécommunications par fibres optiques où les durées d'impulsion utilisées sont de l'ordre de 20 ps?

L'effet est beaucoup moins important pour des impulsions picosecondes en raison de l'exposant 4 dans la formule du décalage. On peut s'en convaincre en calculant la distance au bout de laquelle on obtient un décalage de l'ordre de la largeur spectrale de l'impulsion. Une impulsion de 20 ps à mi-hauteur a une largeur spectrale de l'ordre de 20 GHz à mi-hauteur. Pour atteindre un tel décalage, il faudrait une longueur de fibre de l'ordre de 80000 km, soit deux fois le tour de la Terre. Le décalage Raman n'a donc pas de conséquence pratique pour les télécommunications par fibres optiques.