

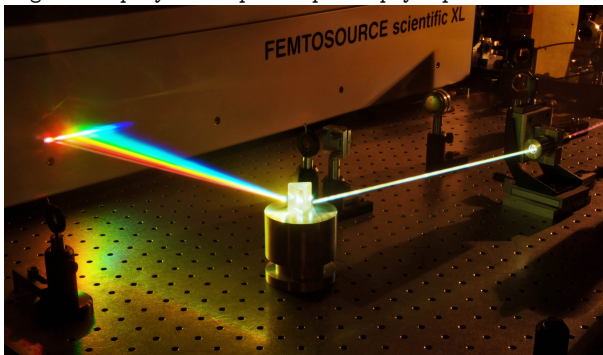
Optique non-linéaire et optique quantique

Manuel Joffre

Département de physique de l'Ecole polytechnique
et

Laboratoire d'Optique et Biosciences
Ecole Polytechnique - CNRS - INSERM

www.enseignement.polytechnique.fr/profs/physique/Manuel.Joffre/onl/



- Partie 1 : Optique non-linéaire

Manuel Joffre et François Hache (LOB)

05.03.12	Cours 1 et TD 1
12.03.12	Cours 2 et 3
19.03.12	Cours 3 et 4
26.03.12	Cours 5 et TD 2
02.04.12	Cours 6 et TD 3
23.04.12	TD 4 et TD 5

- Partie 2 : Optique quantique

Pierre-François Cohadon et Nicolas Treps (LKB)

Premier cours le 30 avril 2012

Partie 1 : Optique non-linéaire

- 1 Rappels d'optique linéaire
- 2 Modèle semi-classique de la susceptibilité
- 3 Optique non-linéaire du deuxième et du troisième ordre
- 4 Des lasers continus aux lasers femtosecondes
- 5 Caractérisation spatio-temporelle
- 6 Applications des impulsions femtosecondes

Cours n°1 : rappels d'optique non-linéaire

- 1 Rappels sur la transformée de Fourier et notations
- 2 Réponse linéaire
- 3 Equation de propagation
- 4 Domaine temporel
- 5 Domaine spatial
- 6 Biréfringence

Transformation de Fourier (domaine temporel)

$$f(\omega) = \mathcal{F}^{-1} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \quad \text{avec} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\int f_1^*(t) f_2(t) dt = \int f_1^*(\omega) f_2(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

$f(t) \otimes g(t)$	$f(\omega)g(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi} f(\omega) \otimes g(\omega)$
$\exp(-i\omega_0 t)$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\exp(i\omega t_0)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$-i\omega f(\omega)$
$it f(t)$	$\frac{df(\omega)}{d\omega}$

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

Transformation de Fourier (domaine spatial)

$$f(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_x x} f(x) dx \quad \text{avec} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x x} f(k_x) \frac{dk_x}{2\pi}$$

$$\int f_1^*(x) f_2(x) dx = \int f_1^*(k_x) f_2(k_x) \frac{dk_x}{2\pi}$$

$f(x) \otimes g(x)$	$f(k_x)g(k_x)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi} f(k_x) \otimes g(k_x)$
$\exp(ik_{x_0}x)$	$2\pi\delta(k_x - k_{x_0})$
$\delta(x - x_0)$	$\exp(ikx_0)$
$\frac{df(x)}{dx}$	$ik_x f(k_x)$
$-ix f(x)$	$\frac{df(k_x)}{dk_x}$

$$\Delta x \Delta k_x \geq \frac{1}{2}$$

Transformées de Fourier de fonctions usuelles

$\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$	$\sigma\sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)$
$\exp\left(-i\frac{at^2}{2}\right)$	$e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\exp\left(i\frac{\omega^2}{2a}\right)$
$\Theta(t)\exp(-\Gamma t - i\omega_0 t)$	$\frac{i}{\omega - \omega_0 + i\Gamma}$
$\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$	$2\pi\sigma^2\exp\left(-\frac{\sigma^2(k_x^2+k_y^2)}{2}\right)$
$\exp\left(ia\frac{x^2+y^2}{2}\right)$	$i\frac{2\pi}{a}\exp\left(-i\frac{(k_x^2+k_y^2)}{2a}\right)$

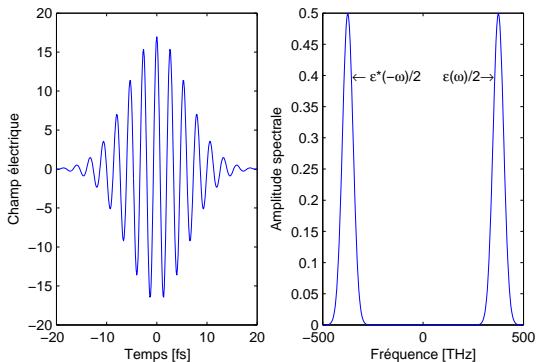
Notations

Champ électrique	\vec{E}
Polarisation induite	\vec{P}
Déplacement électrique	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
Champ magnétique	\vec{H}
Induction magnétique	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
Vecteur de Poynting	$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$

Utilisation de la transformée de Fourier

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}$$

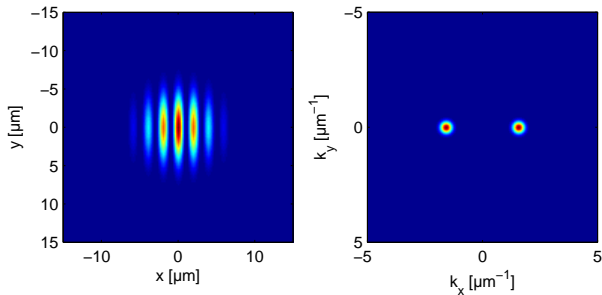
$$\vec{E}(\vec{r}, t) \text{ réel} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, \omega)^* = \vec{E}(\vec{r}, -\omega)$$



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) + \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, t) \right) = \text{Re} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$$

Décomposition en ondes planes

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(\vec{k}, \omega) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$



$$\Delta x \Delta k_x \geq \frac{1}{2}$$

Réponse linéaire

- Linéarité et localité

$$\Rightarrow P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(t, t') E_j(\vec{r}, t') dt'$$

- Invariance par translation dans le temps : $R_{ij}(t, t') = R_{ij}(t - t')$

$$\Rightarrow P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int R_{ij}(t - t') E_j(t') dt' = \epsilon_0 R_{ij}(t) \otimes E_j(t)$$

- Principe de causalité : $R_{ij}(t) = 0$ pour $t < 0$

$$\Rightarrow P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^{+\infty} R_{ij}(t') E_j(t - t') dt'$$

Susceptibilité linéaire

Domaine temporel

$$P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 R_{ij}(t) \otimes E_j(t)$$

Domaine spectral

$$P_i(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_{ij}(\omega) E_j(\vec{r}, \omega)$$

$$\text{où } \chi_{ij}(\omega) = \mathcal{F}^{-1} R_{ij}(t).$$

$\chi_{ij}(\omega)$ (aussi noté $\chi_{ij}^{(1)}(\omega)$) est la **susceptibilité linéaire** du matériau.

$$R_{ij}(t) \text{ réel} \Rightarrow \chi_{ij}^{(1)}(-\omega) = \chi_{ij}^{(1)}(\omega)^*$$

1 Rappels sur la transformée de Fourier et notations

2 Réponse linéaire

3 Equation de propagation

4 Domaine temporel

5 Domaine spatial

6 Biréfringence

Propagation

Equations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

Equation de propagation

$$\Delta \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Equation de propagation dans l'espace de Fourier

$$\Delta \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

$$-k^2 \vec{E}(\vec{k}, \omega) + \vec{k} \cdot \left(\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{k}, \omega) = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}(\vec{k}, \omega)$$

$$\left(-k^2 \delta_{ij} + k_i k_j + \frac{\omega^2}{c^2} (\delta_{ij} + \chi_{ij}(\omega)) \right) E_j(\vec{k}, \omega) = 0$$

Milieu isotrope : $\chi_{ij}(\omega) = \chi(\omega) \delta_{ij}$. Soit $k(\omega)^2 = (1 + \chi(\omega)) \frac{\omega^2}{c^2}$.

$$(-k^2 + k(\omega)^2) E_i(\vec{k}, \omega) = 0 \quad \text{ou} \quad (\Delta + k(\omega)^2) E_i(\vec{r}, \omega) = 0$$

Solution des équations de Maxwell (milieu isotrope)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(\vec{k}, \omega) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

- $\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) = 0$ (champ transverse)
- $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ non nul seulement lorsque $k = k(\omega)$.

Deux cas particuliers importants :

1) Domaine spatial (faisceau monochromatique)

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \int \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

2) Domaine spectro-temporel (onde plane)

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \int \vec{\mathcal{E}}(z, \omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} = \int \vec{\mathcal{E}}(0, \omega) \exp(i(k(\omega)z - \omega t)) \frac{d\omega}{2\pi}$$

1 Rappels sur la transformée de Fourier et notations

2 Réponse linéaire

3 Equation de propagation

4 Domaine temporel

5 Domaine spatial

6 Biréfringence

Propagation d'une impulsion ultracourte

$$\mathcal{E}(z, t) = \int_0^{+\infty} \mathcal{E}(z, \omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{avec} \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} + k(\omega)^2 \right) \mathcal{E}(z, \omega) = 0.$$

Onde plane se propageant dans le sens des z positifs

$$\mathcal{E}(z, \omega) = \mathcal{E}(0, \omega) \exp(ik(\omega)z)$$

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} (1 + \chi(\omega))^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \text{Re}\chi(\omega) \right) + i \frac{\omega}{2c} \text{Im}\chi(\omega)$$

- Indice de réfraction : $n(\omega) = \text{Re} (1 + \chi(\omega))^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \text{Re}\chi(\omega)$
- Coefficient d'absorption : $\alpha(\omega) = 2 \text{Im} k(\omega) \approx \frac{\omega}{c} \text{Im}\chi(\omega)$

$$\mathcal{E}(z, \omega) = \mathcal{E}(0, \omega) \exp \left(in(\omega) \frac{\omega}{c} z \right) \exp(-\alpha(\omega)z/2)$$

Densité de puissance et flux

- Densité de puissance (ou **intensité temporelle**) [W/m^2]

$$I(z, t) = n(\omega_0) \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathcal{E}(z, t)|^2$$

- Densité spectrale de flux (ou **intensité spectrale**) [$\text{J}/(\text{Hz} \cdot \text{m}^2)$]

$$I(z, \omega) = n(\omega_0) \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathcal{E}(z, \omega)|^2$$

- Flux [J/m^2]

$$\Phi(z) = \int I(z, t) dt = \int I(z, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

Grandeurs caractéristiques d'une impulsion

On pose $\mathcal{E}(t) = A\epsilon(t)$ de sorte que $|\epsilon(t)|^2$ soit normalisée.

- Phase temporelle $\phi(t) : \epsilon(t) = |\epsilon(t)| \exp(i\phi(t))$
- Phase spectrale $\varphi(\omega) : \epsilon(\omega) = |\epsilon(\omega)| \exp(i\varphi(\omega))$
- Barycentre de l'impulsion : $t_0 = \langle t \rangle = \int t |\epsilon(t)|^2 dt = \langle \frac{d\varphi}{d\omega} \rangle$
- Fréquence centrale : $\omega_0 = \langle \omega \rangle = \int \omega |\epsilon(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = -\langle \frac{d\phi}{dt} \rangle$
- Retard de groupe $\tau_g(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega}$
- Fréquence instantanée $\Omega(t) = -\frac{d\phi}{dt}$
- Durée (au sens de l'écart quadratique) : $\Delta t = \sqrt{\langle (t - t_0)^2 \rangle}$
- Largeur spectrale : $\Delta\omega = \sqrt{\langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle}$

Relation entre phase spectrale et durée d'impulsion

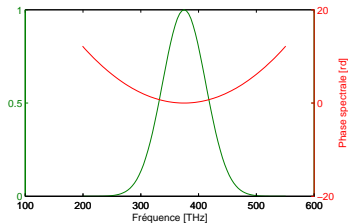
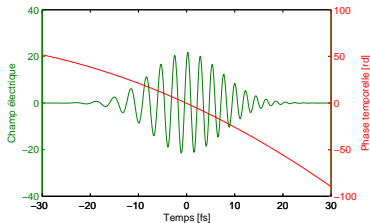
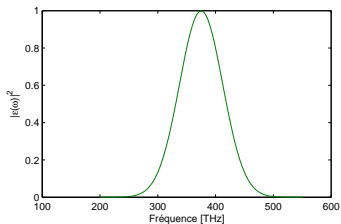
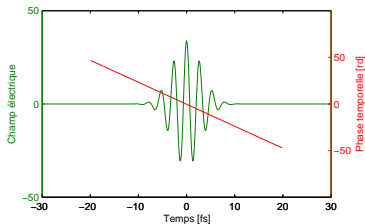
$$\Delta t^2 = \Delta t_{\varphi=0}^2 + \Delta \tau_g^2$$

avec

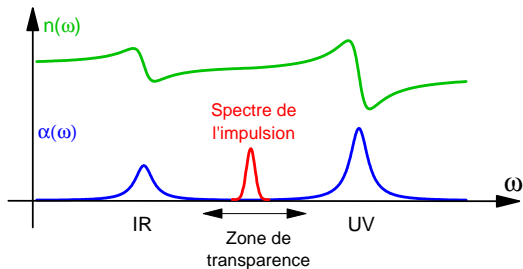
$$\Delta \tau_g^2 = \left\langle \left(\frac{d\varphi}{d\omega} \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{d\varphi}{d\omega} \right\rangle^2$$

- Pour $|\epsilon(\omega)|$ fixé, l'impulsion la plus courte possible est obtenue lorsque $\frac{d\varphi}{d\omega}$ est indépendant de la fréquence ($\Delta \tau_g = 0$). Il s'agit alors d'une impulsion dite **limitée par transformée de Fourier**.
- A l'inverse, lorsque $\frac{d\varphi}{d\omega}$ n'est pas constant, on dit que l'impulsion présente une dérive de fréquence (ou *chirp*).

Impulsion sans et avec dérive de fréquence



Dispersion chromatique



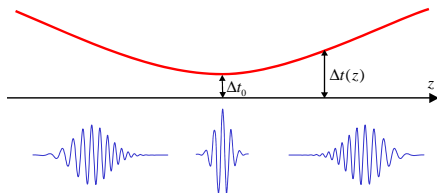
$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0)k'_0 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2k''_0 + \dots$$

$$\varphi(z, \omega) = \varphi(0, \omega) + k(\omega)z = \varphi(0, \omega) + k_0z + (\omega - \omega_0)k'_0z + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2k''_0z + \dots$$

Propagation linéaire d'une impulsion brève

$$\langle t \rangle = \left\langle \frac{d\varphi}{d\omega} \right\rangle = \langle k'(\omega)z \rangle = \left\langle \frac{z}{v_g} \right\rangle = k'_0 z$$

$$\Delta t(z) = \sqrt{\Delta t_0^2 + \Delta \left(\frac{z}{v_g} \right)^2} = \sqrt{\Delta t_0^2 + k''_0{}^2 \Delta \omega^2 z^2}$$



- $k'_0 = \frac{1}{v_g} \rightarrow v_g$: vitesse de groupe
- $k''_0 = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g(\omega)} \right)$: dispersion de vitesse de groupe

De la solution ... à l'équation différentielle

$$\mathcal{E}(z, t) = u(z, t - k'_0 z) \exp(i(k_0 z - \omega_0 t))$$

$u(z, t)$: enveloppe dans un référentiel se propageant à $v_g = 1/k'_0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(z, \omega) &= e^{ik_0 z} (u(z, \omega) \exp(ik'_0 z \omega)) \otimes \delta(\omega - \omega_0) \\ &= e^{ik_0 z} u(z, \omega - \omega_0) \exp(ik'_0 z (\omega - \omega_0))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(z, \omega) = u(0, \omega) \exp\left(i \frac{k''_0}{2} \omega^2 z\right)$$

Equation différentielle : $\frac{\partial u(z, \omega)}{\partial z} = i \frac{k''_0}{2} \omega^2 u(z, \omega)$, soit :

$$i \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = \frac{k''_0}{2} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2}$$

- 1 Rappels sur la transformée de Fourier et notations
- 2 Réponse linéaire
- 3 Equation de propagation
- 4 Domaine temporel
- 5 Domaine spatial**
- 6 Biréfringence

Equation de propagation

$$\Delta E(x, y, z) + k^2 E = 0$$

Posons $\mathcal{E}(x, y, z) = A u(x, y, z) \exp(ikz)$ ($\int |u(x, y, 0)|^2 dx dy = 1$)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 u + k^2 u \right) \exp(ikz) = 0$$

Approximation paraxiale

$u(x, y, z)$ varie lentement avec z , soit $\partial^2 u / \partial z^2 \ll k \partial u / \partial z$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Analogie spatio-temporelle

Espace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Coordonnées transverses : x, y

$$\Delta k_x$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Delta x(z) = \sqrt{\Delta x(0)^2 + \frac{\Delta k_x^2}{k^2} z^2}$$

Temps

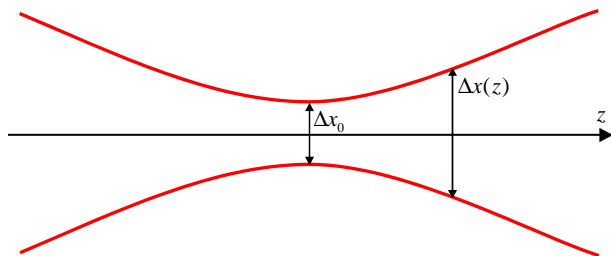
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2i}{k_0''} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Temps : t

$$\Delta \omega$$
$$-1/k_0''$$

$$\Delta t(z) = \sqrt{\Delta t(0)^2 + k_0''^2 \Delta \omega^2 z^2}$$

Propagation d'un faisceau lumineux



$$\Delta x(z) = \sqrt{\Delta x(0)^2 + \frac{\Delta k_x^2}{k^2} z^2}$$

Espace des vecteurs d'ondes transverses

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Une transformée de Fourier par rapport à x et y donne

$$-(k_x^2 + k_y^2) u(k_x, k_y, z) + 2ik \frac{\partial u(k_x, k_y, z)}{\partial z} = 0$$

$$u(k_x, k_y, z) = u(k_x, k_y, 0) \exp\left(-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z\right)$$

→ Méthode numérique de propagation d'un faisceau arbitraire.

Propagation d'un faisceau gaussien

Soit un faisceau de profil initial gaussien :

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_0} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right)$$

Dans l'espace de Fourier :

$$u(k_x, k_y, 0) = \sqrt{2\pi} w_0 \exp\left(-\frac{(k_x^2 + k_y^2)w_0^2}{4}\right)$$

D'où

$$u(k_x, k_y, z) = \sqrt{2\pi} w_0 \exp\left(-\frac{(k_x^2 + k_y^2)w_0^2}{4}\right) \exp\left(-i\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}z\right)$$

⇒ le faisceau reste de profil gaussien.

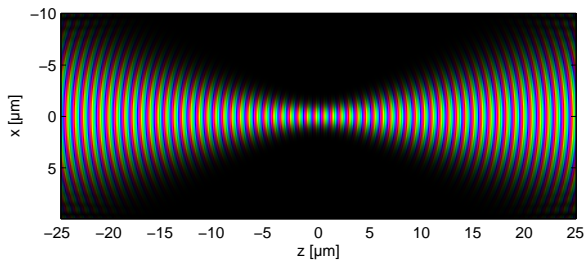
Propagation d'un faisceau gaussien

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(-i\psi_0(z))}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{w(z)}} \Phi_0\left(\frac{x\sqrt{2}}{w(z)}\right) \Phi_0\left(\frac{y\sqrt{2}}{w(z)}\right) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right) \exp(-i\psi_0(z))\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \\ R(z) &= z + \frac{z_R^2}{z} \\ z_R &= \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \\ \psi_0(z) &= \arctan \frac{z}{z_R}\end{aligned}$$

Propagation d'un faisceau gaussien



$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

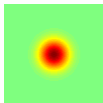
$$z_R = \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

$$\psi_0(z) = \arctan \frac{z}{z_R}$$

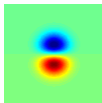
Faisceaux gaussiens d'ordre multiple : TEM_{n,m}

$$u_{n,m}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{w(z)}} \Phi_n\left(\frac{x\sqrt{2}}{w(z)}\right) \Phi_m\left(\frac{y\sqrt{2}}{w(z)}\right) \exp\left(ik\frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right) \exp(-i\psi_{nm}(z))$$

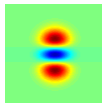
TEM 00



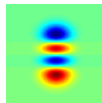
TEM 01



TEM 02



TEM 03



TEM 10



TEM 11



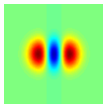
TEM 12



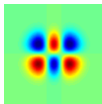
TEM 13



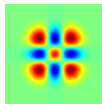
TEM 20



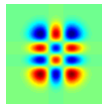
TEM 21



TEM 22



TEM 23



Fourier (ou diffraction de Fresnel)

$$u(x, y, 0) \xrightarrow{\mathcal{F}} u(k_x, k_y, 0) \xrightarrow{\cdot \exp(-i\dots)} u(k_x, k_y, z) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x, y, z)$$

Hermite

$$u(x, y, 0) = \sum_{nm} C_{nm} u_{nm}(x, y) \rightarrow u(x, y, z) = \sum_{nm} C_{nm} u_{nm}(x, y, z)$$

avec $C_{nm} = \int \int u_{nm}^*(x, y) u(x, y, 0) dx dy$

- 1 Rappels sur la transformée de Fourier et notations
- 2 Réponse linéaire
- 3 Equation de propagation
- 4 Domaine temporel
- 5 Domaine spatial
- 6 Biréfringence**

De l'équation de propagation à l'équation de Fresnel

$$\Delta \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

$$-k^2 \vec{E}(\vec{k}, \omega) + \vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega)) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{k}, \omega) = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}(\vec{k}, \omega)$$

$$(-k^2 \delta_{ij} + k_i k_j + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} (\delta_{ij} + \chi_{ij}(\omega))}_{n_i^2(\omega) \delta_{ij}}) E_j(\vec{k}, \omega) = 0$$

Posons $\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{s}$ (\vec{s} vecteur unitaire colinéaire à \vec{k}).

$$\rightarrow \text{Equation de Fresnel : } \sum_i \frac{s_i^2}{\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

Deux valeurs possibles de n pour chaque \vec{s} : **Surface des indices**

Différents types de matériaux

Matériau isotrope

$$n_x = n_y = n_z = n$$

Matériau uniaxe

$$n_x = n_y = n_o; n_z = n_e.$$

n_o est l'indice **ordinaire**

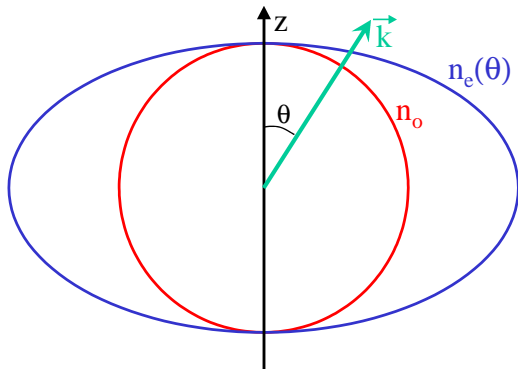
n_e est l'indice **extraordinaire**

z est l'**axe optique**.

Matériau biaxe

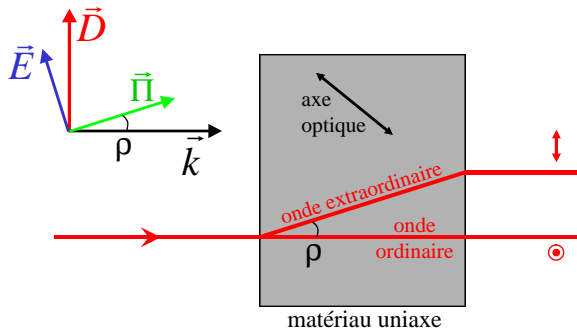
$$n_x \neq n_y \neq n_z$$

Surface des indices dans un matériau uniaxe



$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$$

Double réfraction (walkoff)



$$\tan \rho = \frac{n_e^2(\theta)}{2} \sin(2\theta) \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right)$$