Fonctions élémentaires par matériel

Alain GUYOT

Concurrent Integrated Systems
TIMA

(33) 04 76 57 46 16

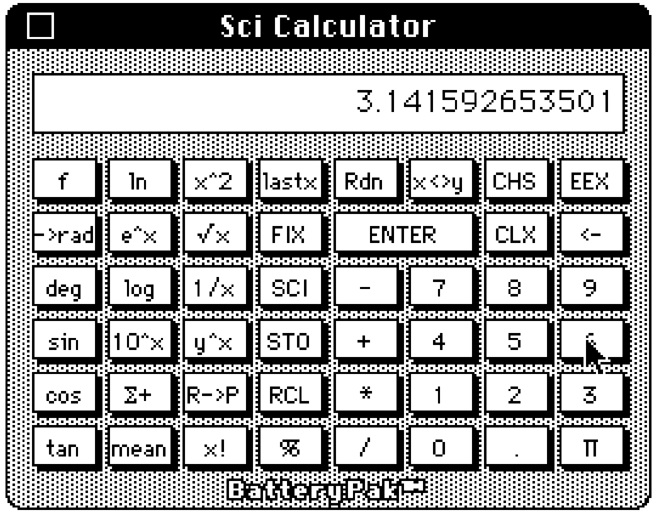
Alain. Guyot @imag .fr

http ://tima -cmp .imag .fr/~guyot

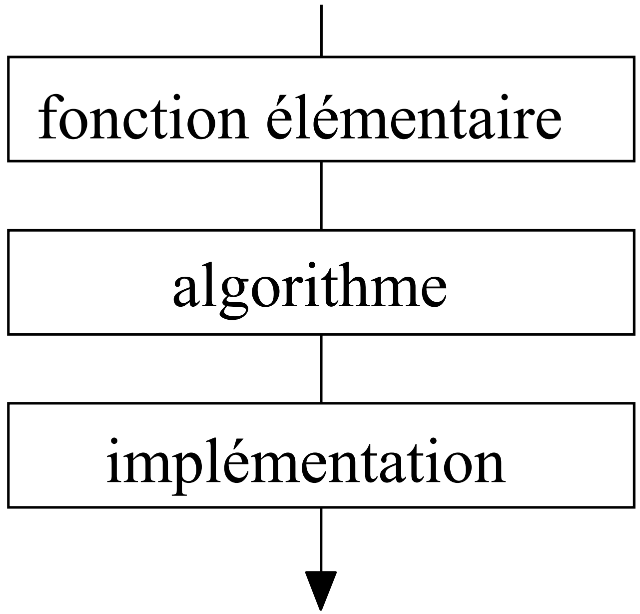
Techniques de l'Informatique et de la Microélectronique
pour l'Architecture. Unité associée au C.N.R.S. n° B0706

But
Réaliser des fonctions
(log, exp, sin, cos, arctg..

Optimiser la surface et la vitesse par rapport au calcul par développement limité



Moyens:
- Conversion de notation additive à multiplicative
- Conversion de notation multiplicative à additive
- Changement de base de numération



Généralités / Plan

Fonctions Elémentaires

- Polynomiales
  - Taylor
  - Legendre
  - Chebyshev
- Addition/Décalage
  - Base discrète
  - Logarithme /Exponentielle
  - Sinus/Cosinus

Calcul du logarithme et de l'exponentielle

$$\boxed{X = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + 2^{-i})^{p_i} \iff \log(X) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \log(1 + 2^{-i})}$$

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{i=0}^{m-1} x_i 2^{-i} \arrow[d, shift right, "1"'] & & \sum\limits_{i=0}^{m-1} y_i 2^{-i} \arrow[d, shift right, "3"'] \\
\prod\limits_{i=0}^{n-1} (1 + 2^{-i})^{p_i} \arrow[u, shift right, "2"'] \arrow[rr, shift right, "\text{logarithme}"'] \arrow[rr, phantom, "5"] & & \sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i \log(1 + 2^{-i}) \arrow[u, shift right, "4"'] \arrow[ll, shift right, "\text{exponentielle}"']
\end{tikzcd}$$

1 - passage de notation additive à multiplicative	(pseudo division)
2 - passage de notation multiplicative à additive	(pseudo multiplication)
3 - passage de la base 2^{-i} à la base $\log(1 + 2^{-i})$	(pseudo division)
4 - passage de la base $\log(1 + 2^{-i})$ à la base 2^{-i}	(pseudo multiplication)
5- change la valeur mais pas la représentation	

Conversion de notation additive à multiplicative

$$X = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \, 2^{-i}$$

$$1 \quad x_1 \, x_2 \, x_3 \, \ldots. \, x_n$$

```
R := 1 ;
pour  i := 1  jusquà  n  faire
      si   R + R * 2^-i ≤ X   alors
      début   R := R + R*2^-i ;  p_i := 1   fin
      sinon   p_i := 0 ;
```

$$X = \prod_{i=1}^{n} (1 + 2^{-i})^{p_i}$$

$$p_1 \, p_2 \, p_3 \, \ldots. \, p_n$$

La conversion ne change pas la valeur de X mais seulement sa représentation sous forme de chaîne de bits

Valeurs numérique

n = 8 bits

$$
\begin{aligned}
\log(2) &= 0{,}69314718\\
\log(1{,}5) &= 0{,}40546511\\
\log(1{,}25) &= 0{,}22314355\\
\log(1{,}125) &= 0{,}11778304\\
\log(1{,}0625) &= 0{,}06062462\\
\log(1{,}03125) &= 0{,}03077166\\
\log(1{,}015625) &= 0{,}01550419\\
\log(1{,}0078125) &= 0{,}00778214\\
\log(1+\varepsilon) &\approx \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X = \;& (1 + p_0 * 1)\\
&* (1 + p_1 * 0{,}5)\\
&* (1 + p_2 * 0{,}25)\\
&* (1 + p_3 * 0{,}125)\\
&* (1 + p_4 * 0{,}0625)\\
&* (1 + p_5 * 0{,}03125)\\
&* (1 + p_6 * 0{,}015625)\\
&* (1 + p_7 * 0{,}0078125)\\
&* (1 + R_8)
\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}
\log(X) = \;& p_0 * 0{,}69314718\\
&+ p_1 * 0{,}40546511\\
&+ p_2 * 0{,}22314355\\
&+ p_3 * 0{,}11778304\\
&+ p_4 * 0{,}06062462\\
&+ p_5 * 0{,}03077166\\
&+ p_6 * 0{,}01550419\\
&+ p_7 * 0{,}00778214\\
&+ R_8
\end{aligned}
$$

Exemple de calcul

$$X = (1 + p_0 * 1) * (1 + p_1 * 0{,}5) * (1 + p_2 * 0{,}25) * (1 + p_3 * 0{,}125) * (1 + p_4 * 0{,}0625) * (1 + p_5 * 0{,}03125) * (1 + p_6 * 0{,}015625) * (1 + p_7 * 0{,}0078125) * (1 + R_8)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Y = \log(X) = p_0 * 0{,}69314718 + p_1 * 0{,}40546511 + p_2 * 0{,}22314355 + p_3 * 0{,}11778304 + p_4 * 0{,}06062462 + p_5 * 0{,}03077166 + p_6 * 0{,}01550419 + p_7 * 0{,}00778214 + R_8$$

Exemple: calcul de X = exp(1,236)

$$R_0 = 1{,}23600000$$

$$1{,}236 = 1 * 0{,}69314718 + 1 * 0{,}40546511 + 0 * 0{,}22314355 + 1 * 0{,}11778304 + 0 * 0{,}06062462 + 0 * 0{,}03077166 + 1 * 0{,}01550419 + 0 * 0{,}00778214 + 0{,}00410048$$

$$R_1 = 0{,}54285282 \quad R_2 = 0{,}13738771 \quad R_3 = 0{,}13738771 \quad R_4 = 0{,}01960467 \quad R_5 = 0{,}01960467 \quad R_6 = 0{,}01960467 \quad R_7 = 0{,}00410048 \quad R_8 = 0{,}00410048$$

$$\exp(1{,}236) = (1 + 1 * 1) * (1 + 1 * 0{,}5) * (1 + 0 * 0{,}25) * (1 + 1 * 0{,}125) * (1 + 0 * 0{,}0625) * (1 + 0 * 0{,}03125) * (1 + 1 * 0{,}015625) * (1 + 0 * 0{,}0078125) * (1 + 0{,}00410048)$$

$$X_0 = 1{,}00000000 \quad X_1 = 2{,}00000000 \quad X_2 = 3{,}00000000 \quad X_3 = 3{,}00000000 \quad X_4 = 3{,}37500000 \quad X_5 = 3{,}37500000 \quad X_6 = 3{,}37500000 \quad X_7 = 3{,}42773437 \quad X_8 = 3{,}42773437$$

$$3{,}44178808$$

Exemple de calcul

$$
\begin{aligned}
X = \;& (1 + p_0 * 1)\\
&* (1 + p_1 * 0{,}5)\\
&* (1 + p_2 * 0{,}25)\\
&* (1 + p_3 * 0{,}125)\\
&* (1 + p_4 * 0{,}0625)\\
&* (1 + p_5 * 0{,}03125)\\
&* (1 + p_6 * 0{,}015625)\\
&* (1 + p_7 * 0{,}0078125)\\
&* (1 + R_8)
\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}
Y = \log(X) = \;& p_0 * 0{,}69314718\\
&+ p_1 * 0{,}40546511\\
&+ p_2 * 0{,}22314355\\
&+ p_3 * 0{,}11778304\\
&+ p_4 * 0{,}06062462\\
&+ p_5 * 0{,}03077166\\
&+ p_6 * 0{,}01550419\\
&+ p_7 * 0{,}00778214\\
&+ R_8
\end{aligned}
$$

Exemple: calcul de X = exp(Y)

$$
\begin{aligned}
Y = \;& \square * 0{,}69314718\\
+ \;& \square * 0{,}40546511\\
+ \;& \square * 0{,}22314355\\
+ \;& \square * 0{,}11778304\\
+ \;& \square * 0{,}06062462\\
+ \;& \square * 0{,}03077166\\
+ \;& \square * 0{,}01550419\\
+ \;& \square * 0{,}00778214\\
+ \;& 0{,}00410048
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
R_0 &= Y\\
R_1 &= \square\\
R_2 &= \square\\
R_3 &= \square\\
R_4 &= \square\\
R_5 &= \square\\
R_6 &= \square\\
R_7 &= \square\\
R_8 &= \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exp(Y) = \;& (1 + \square * 1)\\
&* (1 + \square * 0{,}5)\\
&* (1 + \square * 0{,}25)\\
&* (1 + \square * 0{,}125)\\
&* (1 + \square * 0{,}0625)\\
&* (1 + \square * 0{,}03125)\\
&* (1 + \square * 0{,}015625)\\
&* (1 + \square * 0{,}0078125)\\
&* (1 + 0{,}00410048)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
X_0 &= 1\\
X_1 &= \square\\
X_2 &= \square\\
X_3 &= \square\\
X_4 &= \square\\
X_5 &= \square\\
X_6 &= \square\\
X_7 &= \square\\
X_8 &= \square
\end{aligned}
$$

Calcul du sinus et du cosinus

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \, 2^{-i} \qquad a_i \in \{0,+1\}$$

$$\Big\Downarrow \; 1$$

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \operatorname{arctg}\left(2^{-i}\right) \qquad \alpha_i \in \{-1,+1\}$$

$$\Big\Downarrow \; 2$$

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \cos\left(\alpha_i \operatorname{arctg}\left(2^{-i}\right)\right) & -\sin\left(\alpha_i \operatorname{arctg}\left(2^{-i}\right)\right) \\ \sin\left(\alpha_i \operatorname{arctg}\left(2^{-i}\right)\right) & \cos\left(\alpha_i \operatorname{arctg}\left(2^{-i}\right)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 - changement de base de l'angle α

2 - rotation de l'angle α

Réécriture de la rotation de l'angle α

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i \,\mathrm{arctg}(2^{-i})) & -\sin(\alpha_i \,\mathrm{arctg}(2^{-i})) \\ \sin(\alpha_i \,\mathrm{arctg}(2^{-i})) & \cos(\alpha_i \,\mathrm{arctg}(2^{-i})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\prod_{i=0}^{n} \cos(\alpha_i \,\mathrm{arctg}(2^{-i})) \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{tang}(\alpha_i \,\mathrm{arctg}(2^{-i})) \\ \mathrm{tang}(\alpha_i \,\mathrm{arctg}(2^{-i})) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\prod_{i=0}^{n} \cos(\mathrm{arctg}(2^{-i})) \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_i \,\mathrm{tang}(\mathrm{arctg}(2^{-i})) \\ \alpha_i \,\mathrm{tang}(\mathrm{arctg}(2^{-i})) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i \in \{-1,+1\}$$

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \sqrt{1+2^{-2i}} \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_i \, 2^{-i} \\ \alpha_i \, 2^{-i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcul du sinus et du cosinus (1)

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \, 2^{-i} \qquad a_i \in \{0,+1\}$$

1

Cette conversion change la représentation de α
mais pas la valeur de α
(à l'erreur de conversion près)

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \, \mathrm{arctg}\left(2^{-i}\right) \qquad \alpha_i \in \{-1,+1\}$$

2

valeur initiale

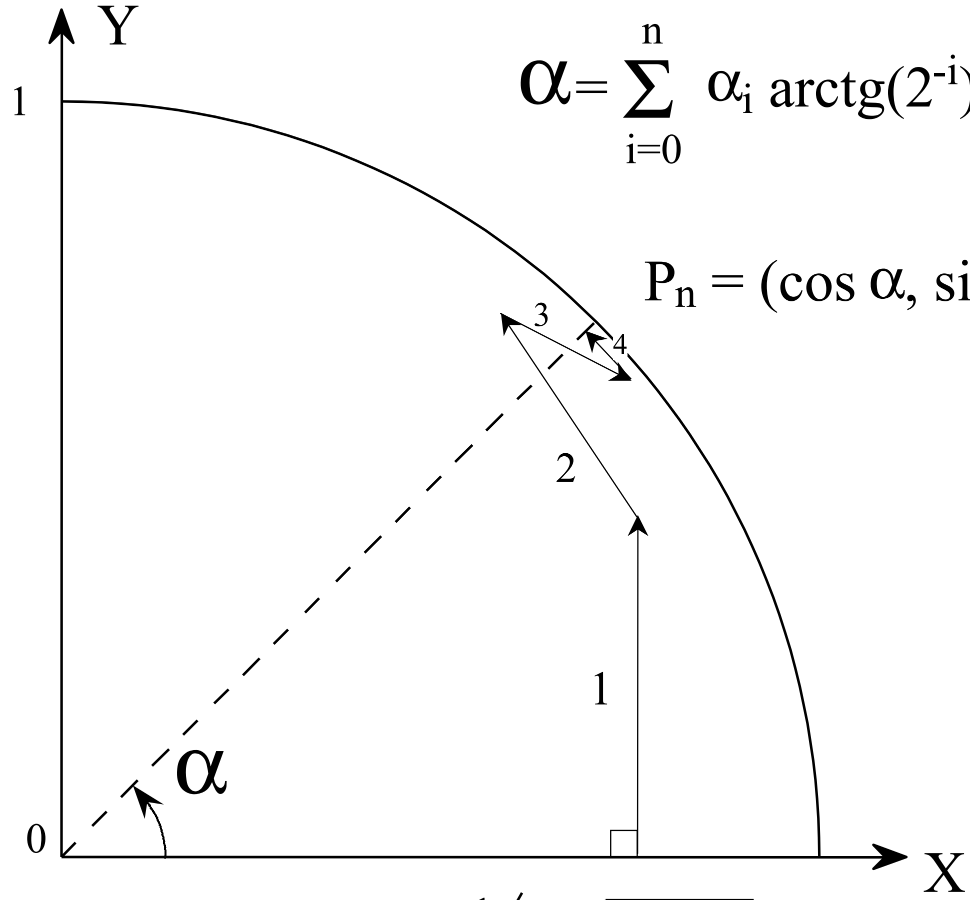
$$\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_i \, 2^{-i} \\ \alpha_i \, 2^{-i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \Big/ \prod_{i=0}^{n} \sqrt{1+2^{-2i}} \end{pmatrix}$$

1 - changement de base de l'angle α (pseudo division)

2 - conversion de multiplicative à additive (pseudo multiplications)

Calcul du sinus et du cosinus (2)

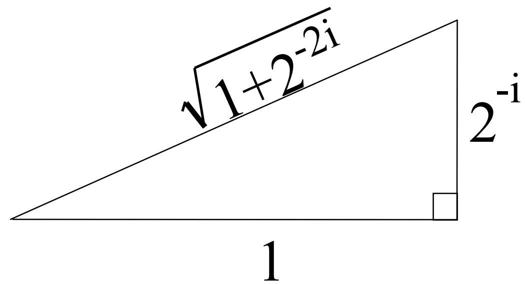
$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \operatorname{arctg}(2^{-i}) \qquad \alpha_i \in \{-1,1\}$$



$$P_n = (\cos\alpha, \sin\alpha\,)$$

vecteurs perpendiculaires

$$x_{i+1} := x_i - \alpha_i\, y_i\, 2^{-i}$$
$$y_{i+1} := y_i + \alpha_i\, x_i\, 2^{-i}$$



$$P_0 = \left(1 \Big/ \prod_{i=0}^{n} \sqrt{1+2^{-2i}},\ 0\ \right)$$

(environ 0,607 252 935…)

Valeurs numériques

i	2^{-i}	$\arctan(2^{-i})$
0	1.00000 00000	0.110 001 000 000 000
1	0.10000 00000	0.011 010 100 100 001
2	0.01000 00000	0.001 110 000 010 010
3	0.00100 00000	0.000 111 001 000 000
4	0.00010 00000	0.000 011 100 100 000
5	0.00001 00000	0.000 001 110 101 100
6	0.00000 10000	0.000 000 111 001 010
7	0.00000 01000	0.000 000 011 100 101
8	0.00000 00100	0.000 000 001 110 010
9	0.00000 00010	0.000 000 000 111 001
10	0.00000 00001	0.000 000 000 011 100

La précision est significativement augmenté en normalisant les constantes $\arctan(2^{-i}) * 2^i$. Pour n bits de précision il faut calculer avec $n + \log_2(n) + 2$ bits

Bases discrètes

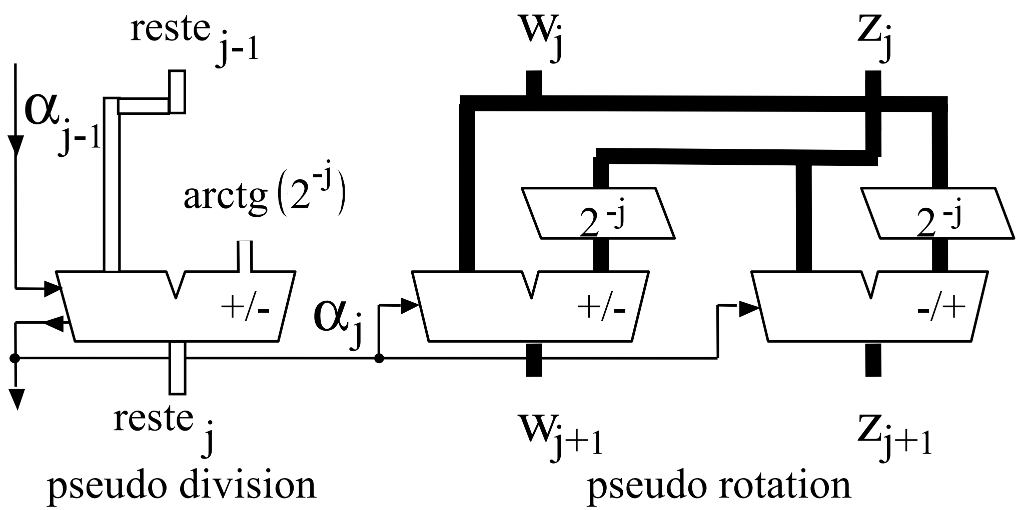
Quels nombres peut-on écrire en base:

$\log(1+2^i)$

$\mathrm{ArcTg}(2^i)$

Cette question détermine le domaine des algorithmes de calcul de logarithme et fonctions de trigonométrie.

Tranche pour le calcul du sinus et du cosinus



soit n = nombre de bits = nombre de pas
coût du j^{eme} décaleur: (n-j) fils $*$ j positions

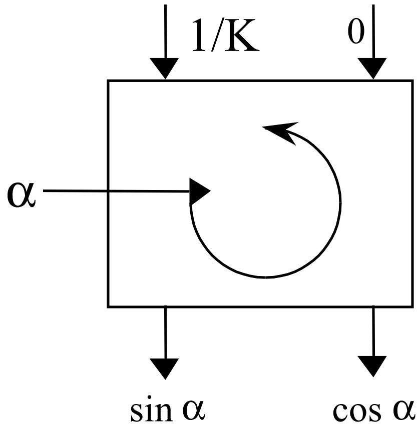
Remarque: les calculs peuvent également se faire sans propagation de retenue

Rotateur Euclidien (1)

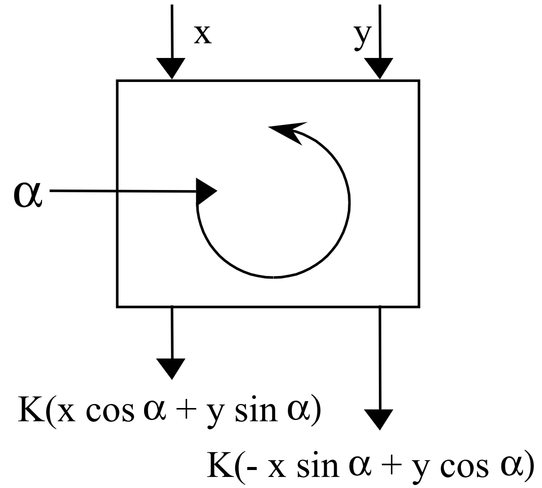
(imagerie)

But: faire subir une rotation à un vecteur sans calcul explicite de sin et cos

Calcul de sinus et cosinus



Rotateur Euclidien



Pour la rotation, il faut diviser le résultat par K

Solution 1: Ecrire $1/K = \prod_{i=0}^{n} (1 + \varepsilon_i \, 2^{-i})$ avec $\varepsilon_i \in \{-1,0,+1\}$ et le minimum de $\varepsilon_i \neq 0$

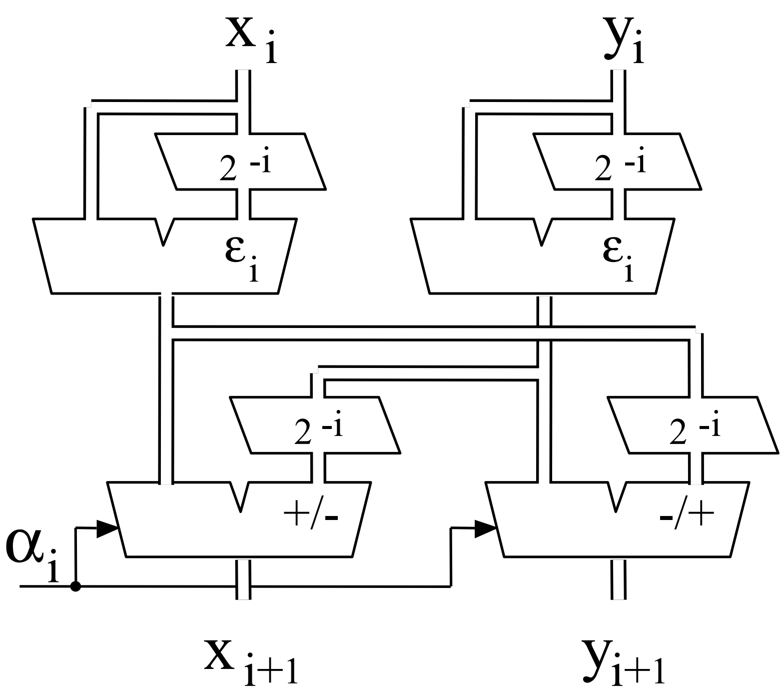
Solution 2: Décomposer α dans la base Arctg $(2^{-si}+2^{-s'i})$ tq. $K = \prod_{i=0}^{n} \sqrt{1 + (2^{-si}+2^{-s'i})^2}$
soit proche d'une puissance de 2

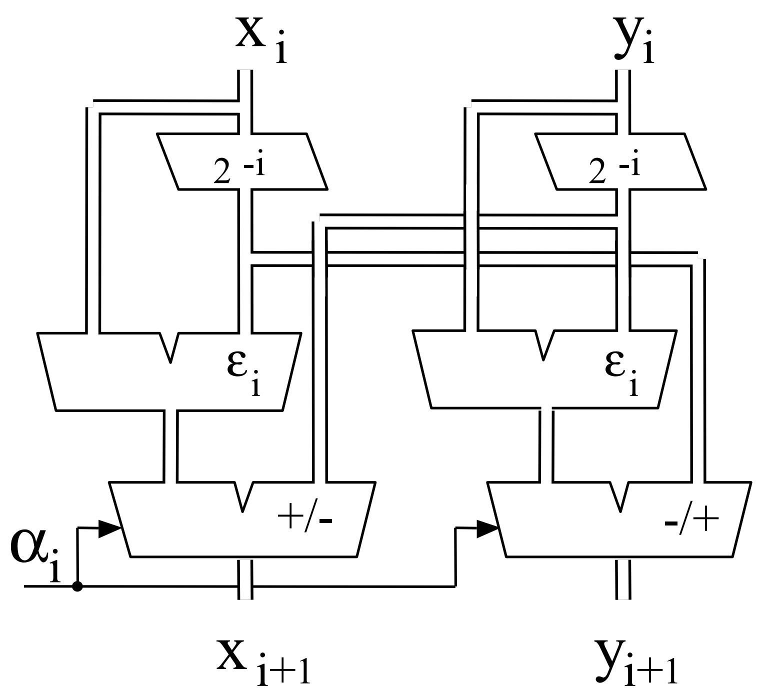
Rotateur Euclidien (2)

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = (1 + \varepsilon_i\, 2^{-i}) \begin{pmatrix} 1 & \alpha_i\, 2^{-i} \\ -\alpha_i\, 2^{-i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$x_{i+1} = x_i + (\,\varepsilon_i\, x_i + \alpha_i\, y_i)\, 2^{-i} + \varepsilon_i\, \alpha_i\, y_i\, 2^{-2i}$$

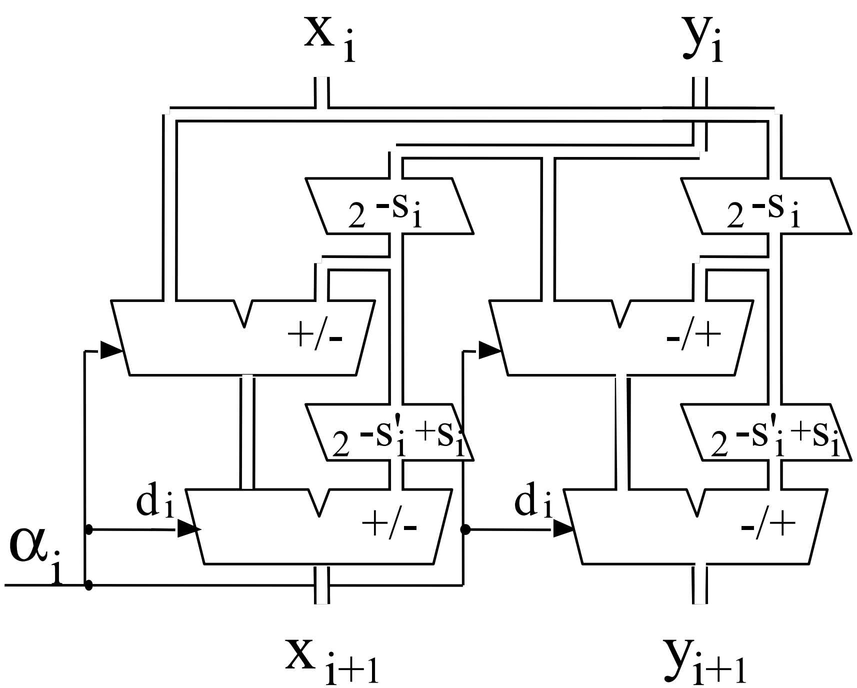
$$y_{i+1} = y_i + (\,\varepsilon_i\, y_i - \alpha_i\, x_i)\, 2^{-i} + \varepsilon_i\, \alpha_i\, x_i\, 2^{-2i}$$





Rotateur Euclidien (3)

$$\alpha = \sum_{i=0}^{18} \operatorname{arctg} \left(2^{-s_i} + d_i 2^{-s'_i}\right)$$



$$K = \prod_{i=0}^{18} \sqrt{1 + \left(2^{-s_i} + d_i 2^{-s'_i}\right)^2} = 0{,}5000096618$$

i	s_i	s'_i	d_i	arctg
0	0	3	+1	0,844154
1	1	8	+1	0,466768
2	1	6	+1	0,476069
3	2	14	+1	0,245036
4	2	4	-	0,185348
5	4	6	1+	0,077967
6	4	10	1-	0,061446
7	5		1	0,031240
8	6		0	0,015624
9	7		0	0,007812
10	8		0	0,003906
11	9		0	0,001953
12	10		0	0,000977
13	11		0	0,000488
14	12		0	0,000244
15	13		0	0,000122
16	14		0	0,000061
17	15		0	0,000031
18	16		0	0,000015
			0	