


Opérateurs de Calcul en-ligne



Alain GUYOT

Concurrent Integrated Systems
TIMA

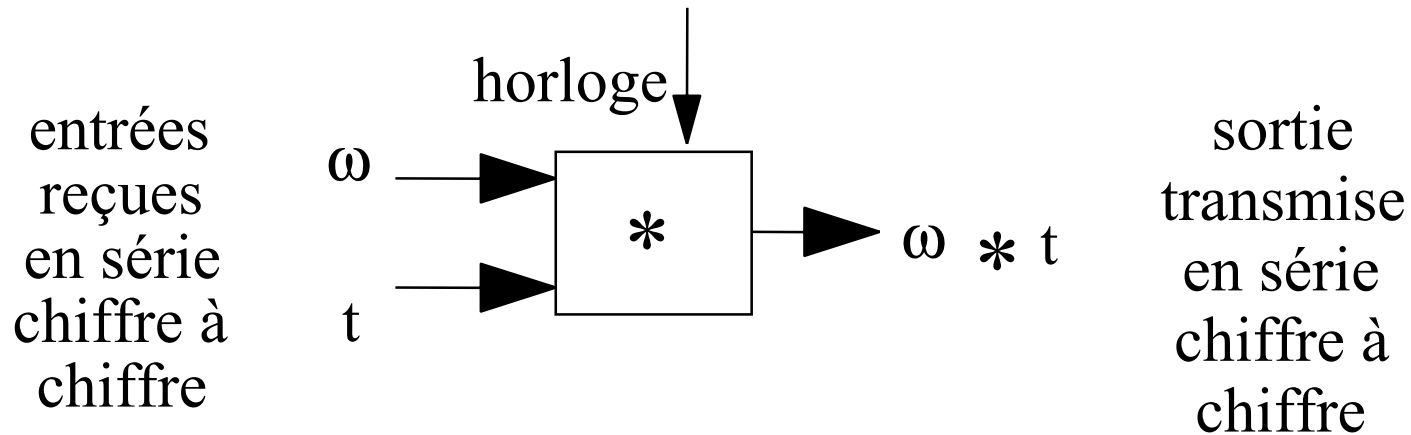
 (33) 04 76 57 46 16

 Alain.Guyot@imag.fr

<http://tima-cmp.imag.fr/~guyot/Cours/Arithmetique>

Techniques de l'Informatique et de la Microélectronique
pour l'Architecture. Unité associée au C.N.R.S. n° B0706

Opérateurs en ligne



Exemples d'opérations en ligne

Addition

$$\begin{array}{r} 4372 \\ + 5391 \\ \hline 9763 \end{array}$$

de droite à gauche



Maximum

$$\begin{array}{r} 1789 \\ \geq 1790 \\ \hline 1790 \end{array}$$

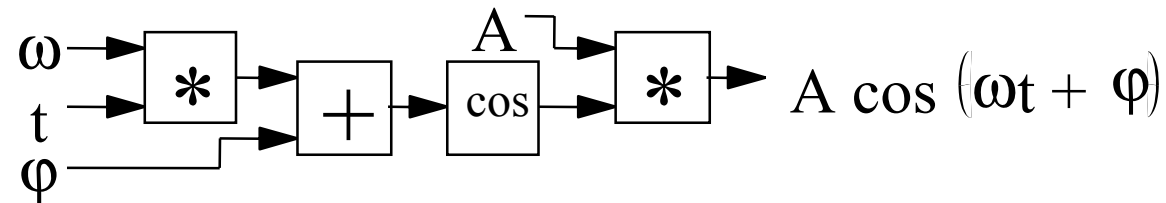
de gauche à droite



Avantages des opérateurs en ligne



Avantage 1: parallélisme à grain fin (niveau du chiffre)



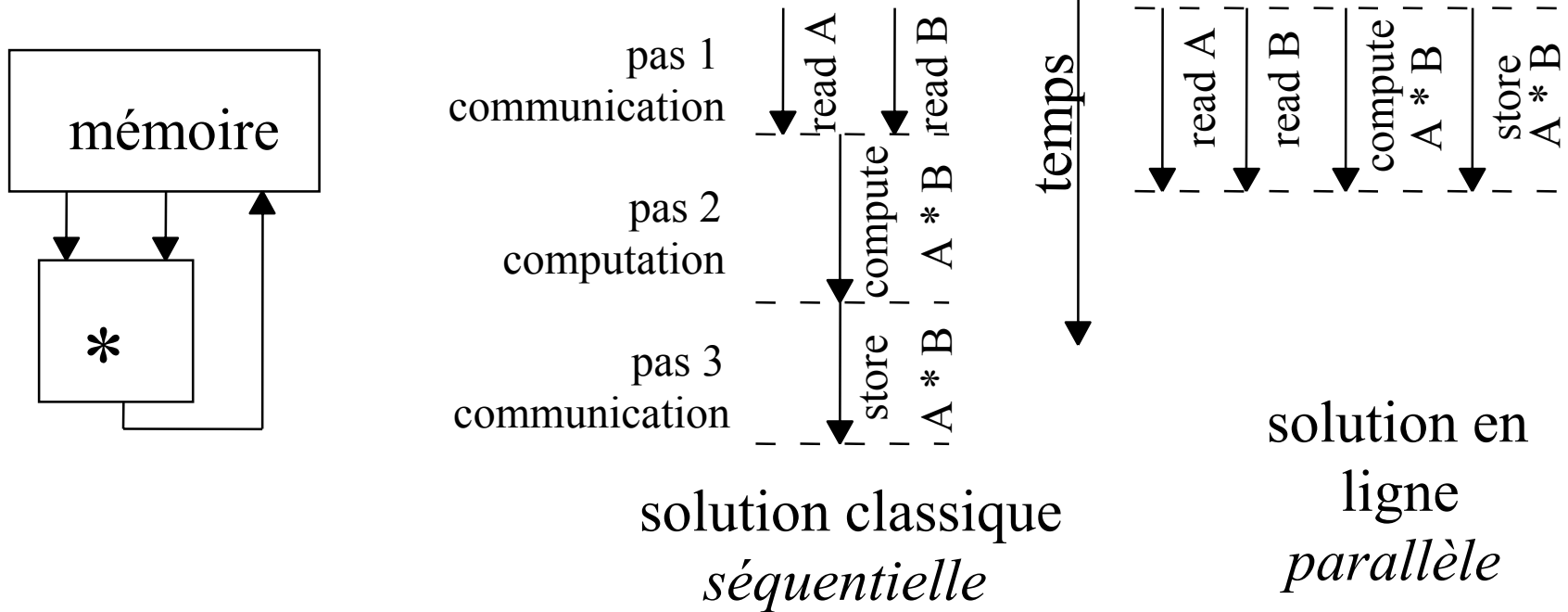
chaque opérateur travaille simultanément
(2 multiplieurs, 1 additionneur, 1 cosinus)

Avantages (2)



Avantage 2: la transmission recouvre l'exécution

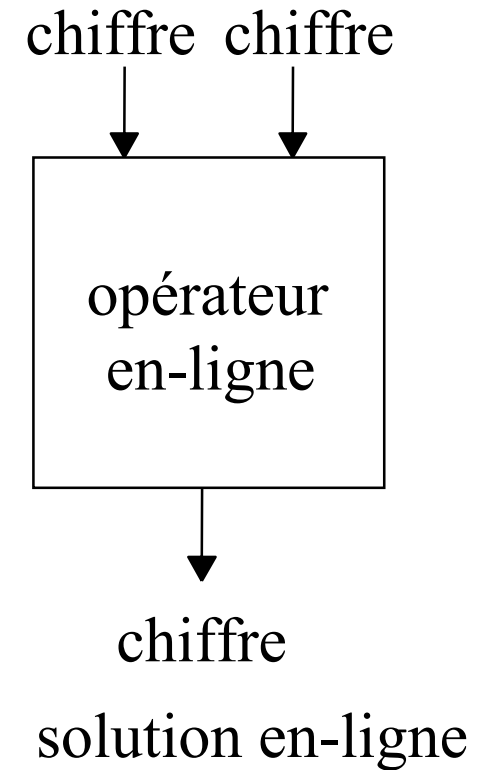
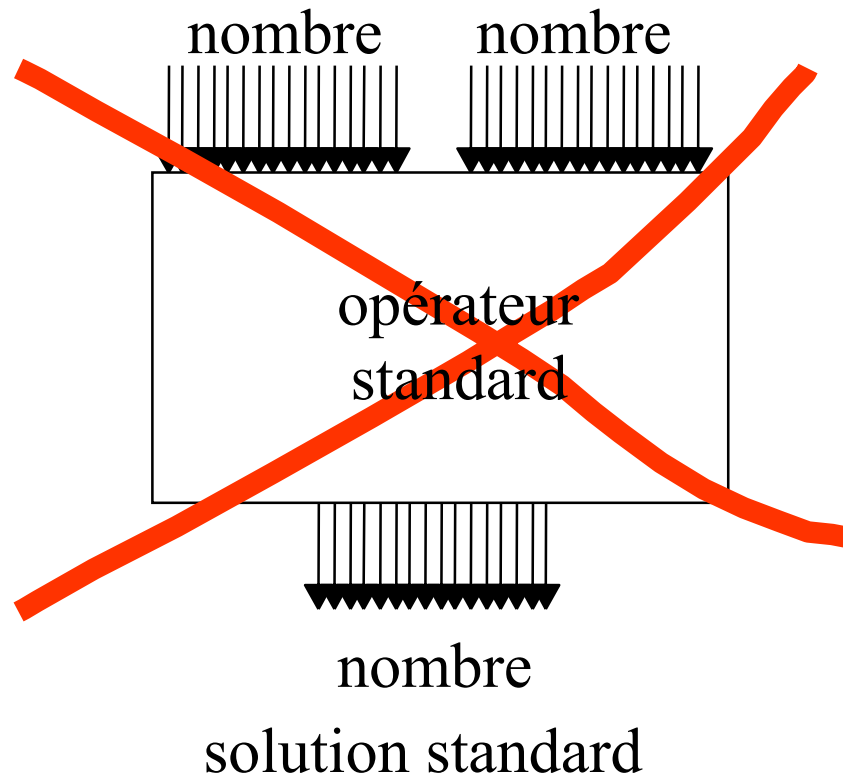
exemple: multiplication de deux grands entiers A et B
(Les grands entiers doivent être transmis en série)



Avantages (3)



Avantage 3: câblage



Bonnes Nouvelles

**Presque toutes les opérations habituelles
peuvent être calculées en ligne**

Addition

Maximum

Sinus/cosinus

Multiplication

Valeur Absolue

Tangente

Division

Saturation

Logarithme

Racine carrée

Tri

Exponentielle

Distance

Scaling

Polynômes

Euclidienne

Opérations non calculables en ligne

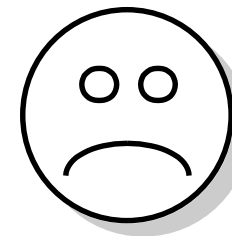
Reste

Opérations modulaires

PGCD

Fonctions non continues

Arc sinus



Opérations en série

NOTATION En - tête	Standard Poids faibles	Standard Poids forts	Redondante Poids forts
addition	X		X (2)
multiplication	X (1)		X (2)
division			X (2)
maximum		X	X
racine carrée			X (2)

- (1) Latence si on attend les poids forts
- (2) Latence systématique

Comment mesurer les opérateurs en-ligne

période : inverse de la fréquence d'horloge

latence: nombre d'étages de registres entre entrée et sortie

(ou combinaison des poids des entrées moins le poids de la sortie)

La période peut être échangée contre de la latence

Quand des opérateurs sont mis en série:

période = max (périodes)

latence = Σ (latences) sur le chemin critique

(la latence peut devenir prédominante)

Question: Quel est le rapport coût/performance



1 - Délai



opération	construction habituelle			en-ligne
	naïve	usuelle	optimisée	
addition	n	$\log_2 n$	1^*	n
multiplication	n^2	n^{**}	$\log_2 n^{**}$	n
division	n^2	$n \log_2 n$	n^{***}	n
racine carrée	n^2	$n \log_2 n$	n^{***}	n

* Additionneur à retenue sauvegardée

** Arbre de Wallace

*** Division SRT (non Newton)

Question: Quel est le rapport coût/performance (2)

1 - Surface

opération	standard	en-ligne
addition	$n \log_2 n$	1
multiplication	n^2	n
division	n^2	n
racine carrée	n^2	n

a) add,sub,max,abs,tri,gain

b) mult,div,carré, racine

c) fonctions élémentaires

coût fixe

coût linéaire

coût quadratique

1

$\theta(n)$

$\alpha n + \beta n^2$



Toutes les opérations en ligne reposent sur

- 1- l'addition sans propagation de retenus
(c'est à dire la notation redondante)
- 2- l'addition en série poids forts en tête dérivée de la précédente
- 3- en registre d'"erreur" interne

Quelque opérations en lignes reposent également sur
un estimation de faible précision de certaine variable
(reste partiel, angle, etc ...)

Notation binaire redondante BS

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \quad a_i \in \{-1, 0, 1\}$$

In the Borrow-Save (B.S.) notation, each digit is coded by 2 bits

			+ -	
a_i coded on 2 bits	+1	1 0		+ -
a_i^+	a_i^-	0 0	or	1 1
	-1	0 1		

A number in redundant B.S. notation can be seen as the difference of two positive numbers

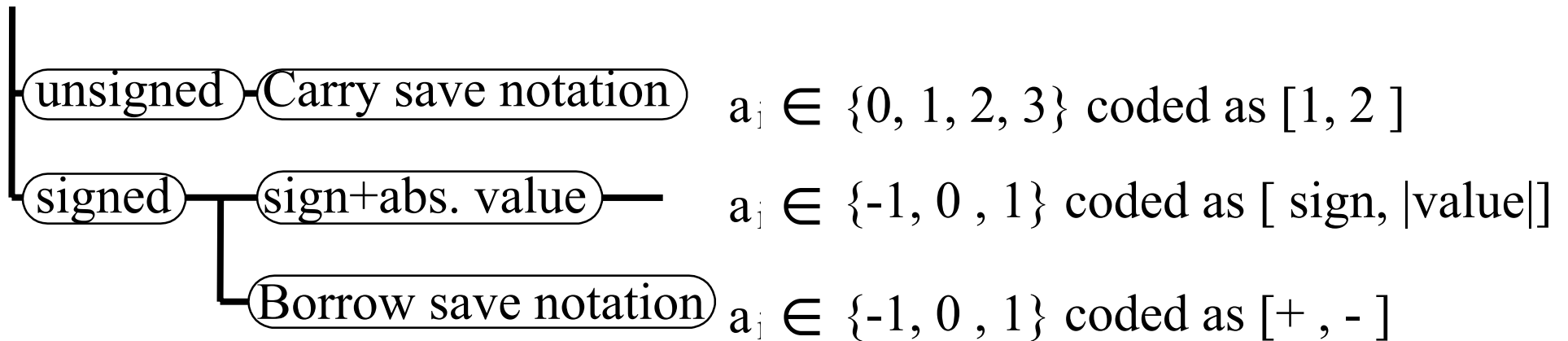
$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i^+ - a_i^-) 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^+ 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i^- 2^i = A^+ - A^-$$

Calcul en ligne 12

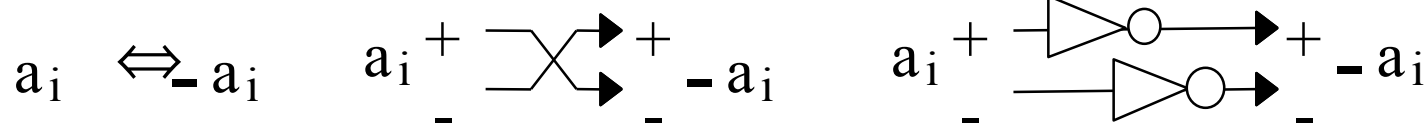
Autres notations binaires redondantes

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$$

Every digit is coded on 2 bits



Borrow Save is symmetrical
 truncation \equiv rounding
 easy to change sign (no $-B = \bar{B} + 1$)



Cas particulier du (Borrow Save)

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \quad a_i \in \{-1, 0, 1\}$$

- 1- $a_{n-1} \in \{-1, 0\}$ $a_{0..n-1} \in \{0, 1\}$ standard 2's complement
- 2- $a_i \in \{-1, 1\}$ on-line functions
- 3- $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ with the maximum number of zero
(average 2/3 zero 1/6 one 1/6 minus one)

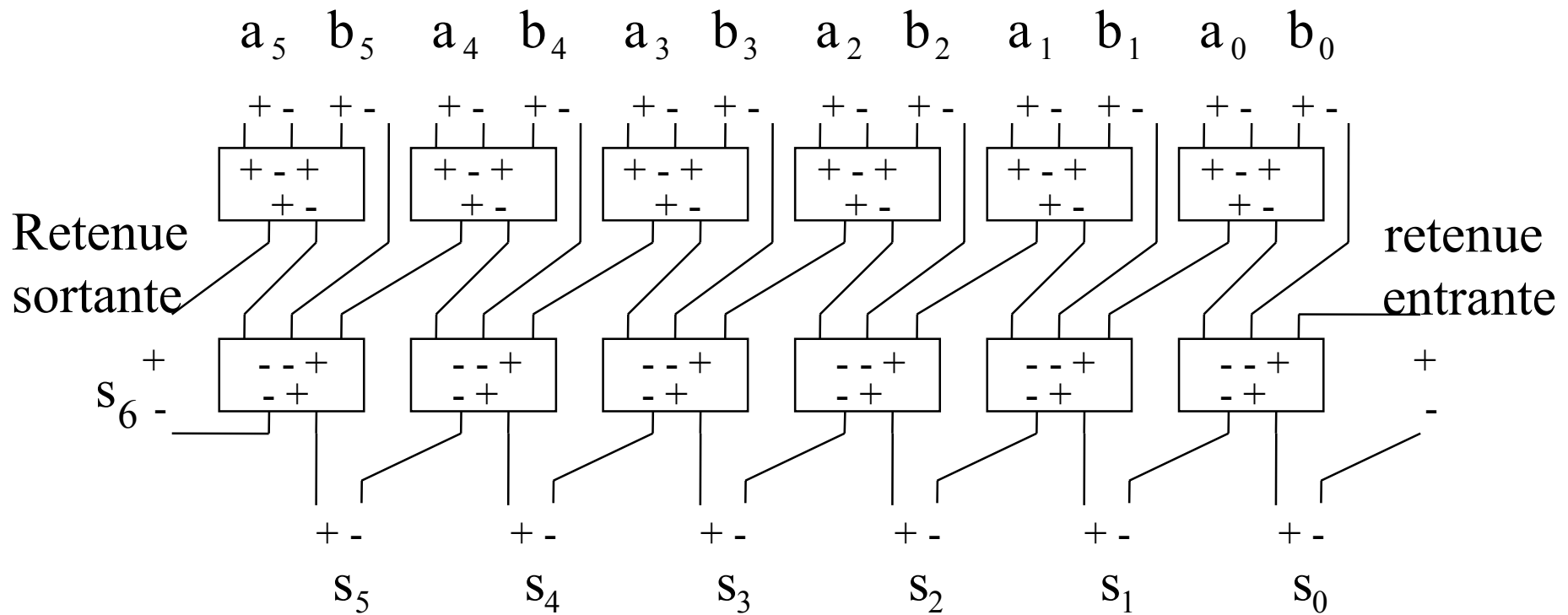
forms 1 and 3 may require an extra digit

only odd numbers representable in form 2

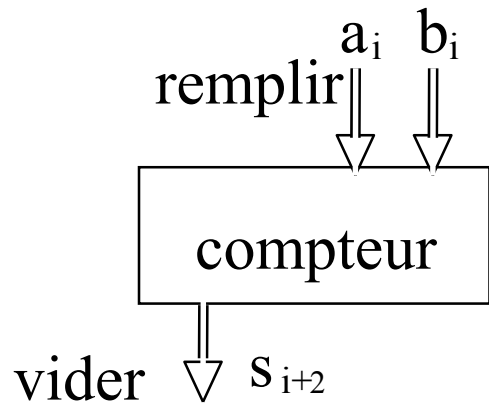
form 3 is the canonic signed binary digit form

Addition parallèle sans propagation de la retenue

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \quad B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \quad S = \sum_{i=0}^n a_i 2^i \quad a_i, b_i, s_i \in \{-1, 0, 1\}$$

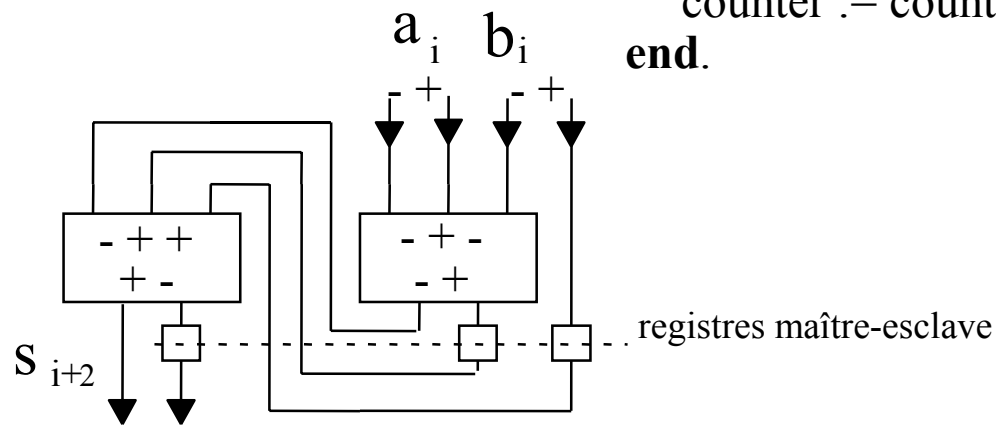


Addition en-ligne (addition de chiffres en série)



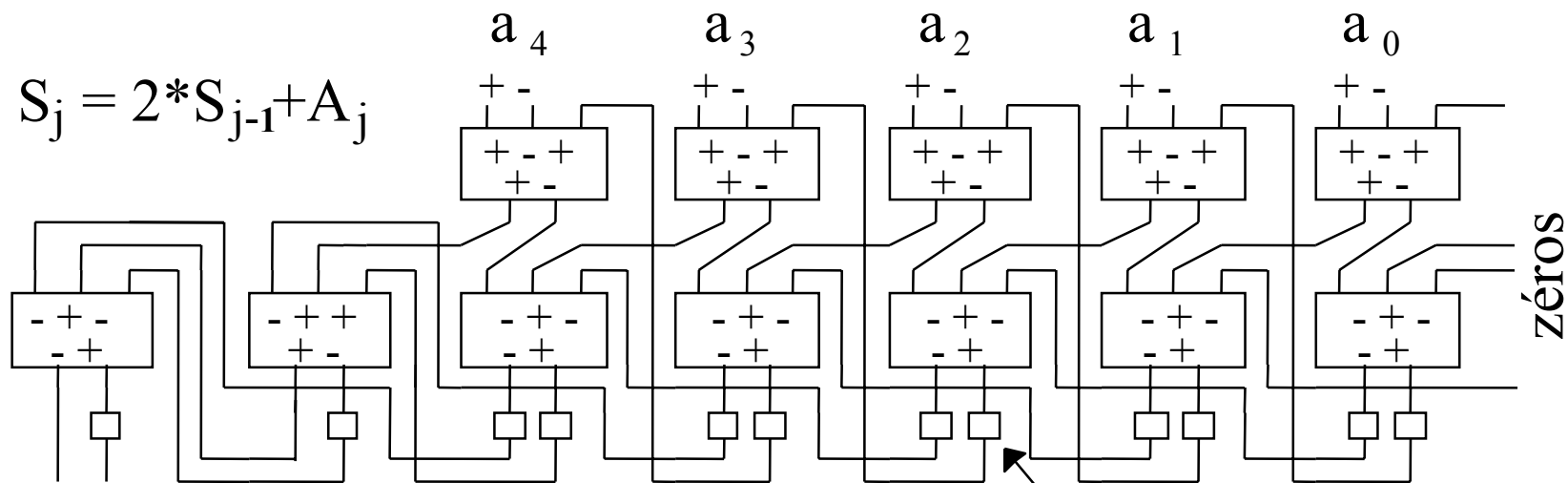
```

Procedure Addserie( $a_i, b_i, s_i$  : SBD);
var counter: integer;
begin
    counter := 2*counter +  $a_i$  +  $b_i$  ;
    if counter > 2 then  $s_i := 1$       {overflow}
    else if counter < -2 then  $s_i := -1$  {underflow}
    else  $s_i := 0$  ;
    counter := counter - 4* $s_i$  ;
end.
    
```



Addition d'une série de nombres avec résultat en-ligne

$$S = \sum_{j=m-1}^0 A_j 2^j \quad A_j = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} 2^i \quad a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$$

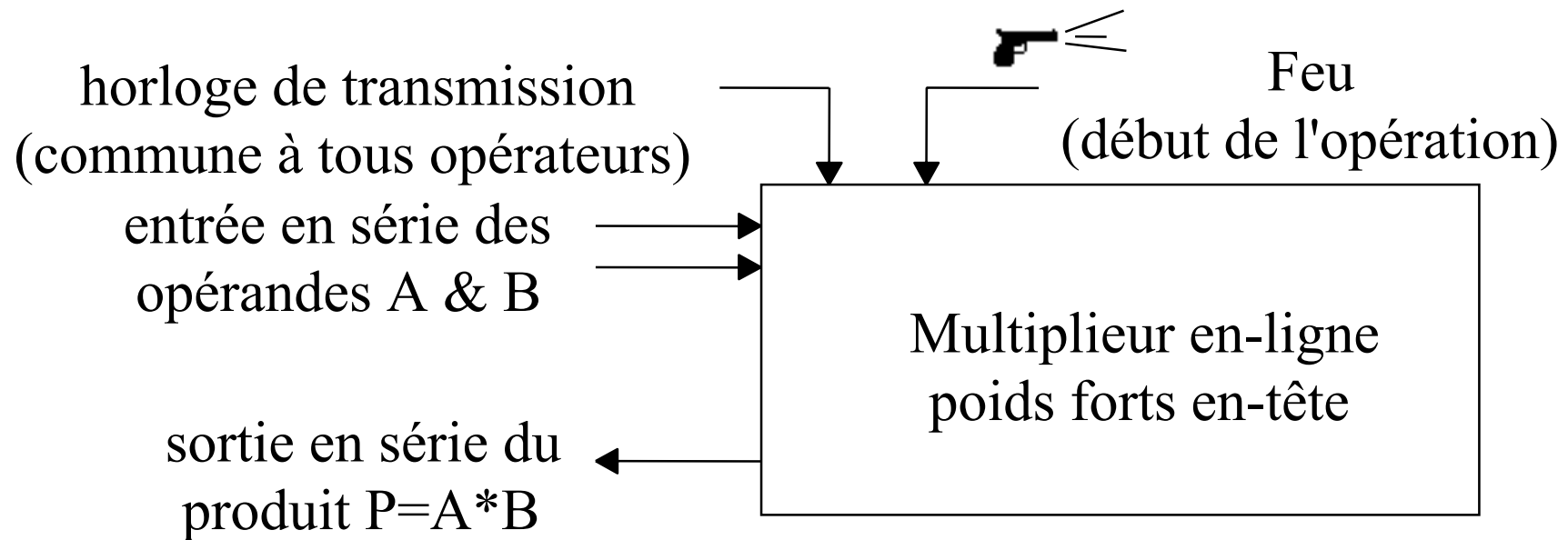


somme en-ligne
poids forte en-tête

registre d'erreur ou de récurSION

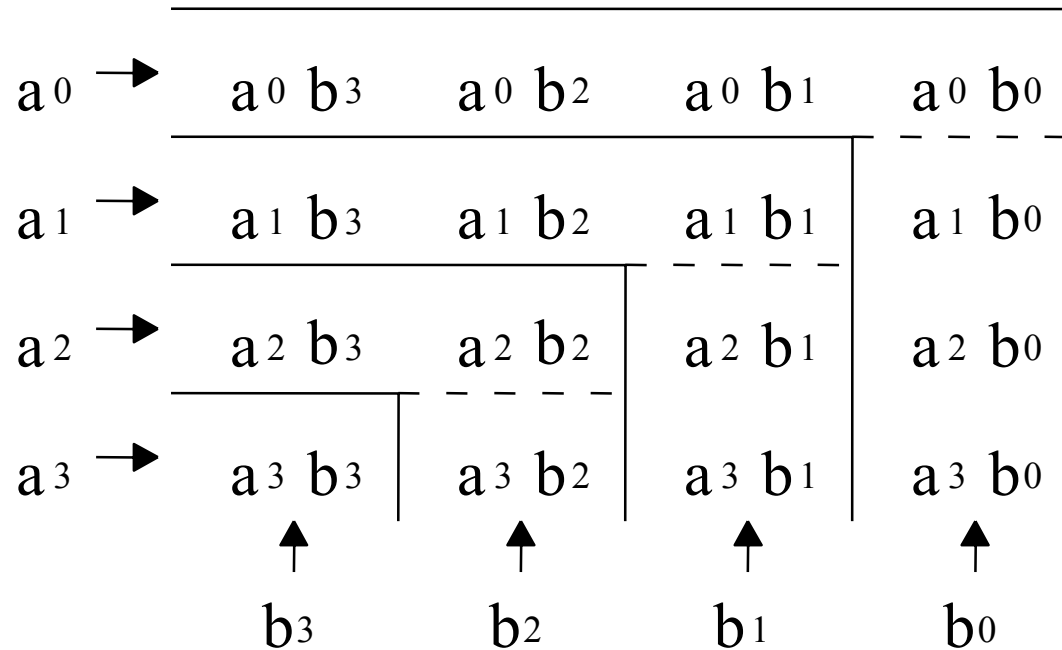
Multiplieur en ligne poids forts en-tête

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \quad B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \quad P = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i b_j 2^{i+j}$$



Multiplication en ligne poids forts en tête (2)

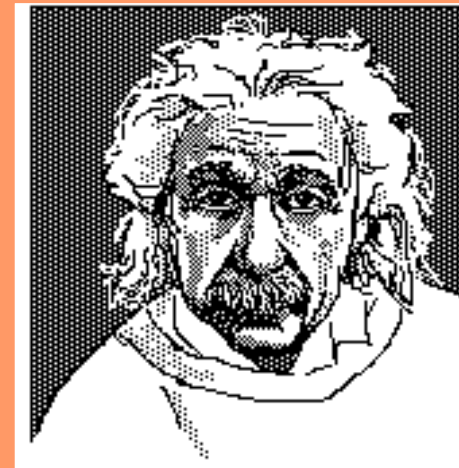
$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \quad B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \quad P = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i b_j 2^{i+j}$$



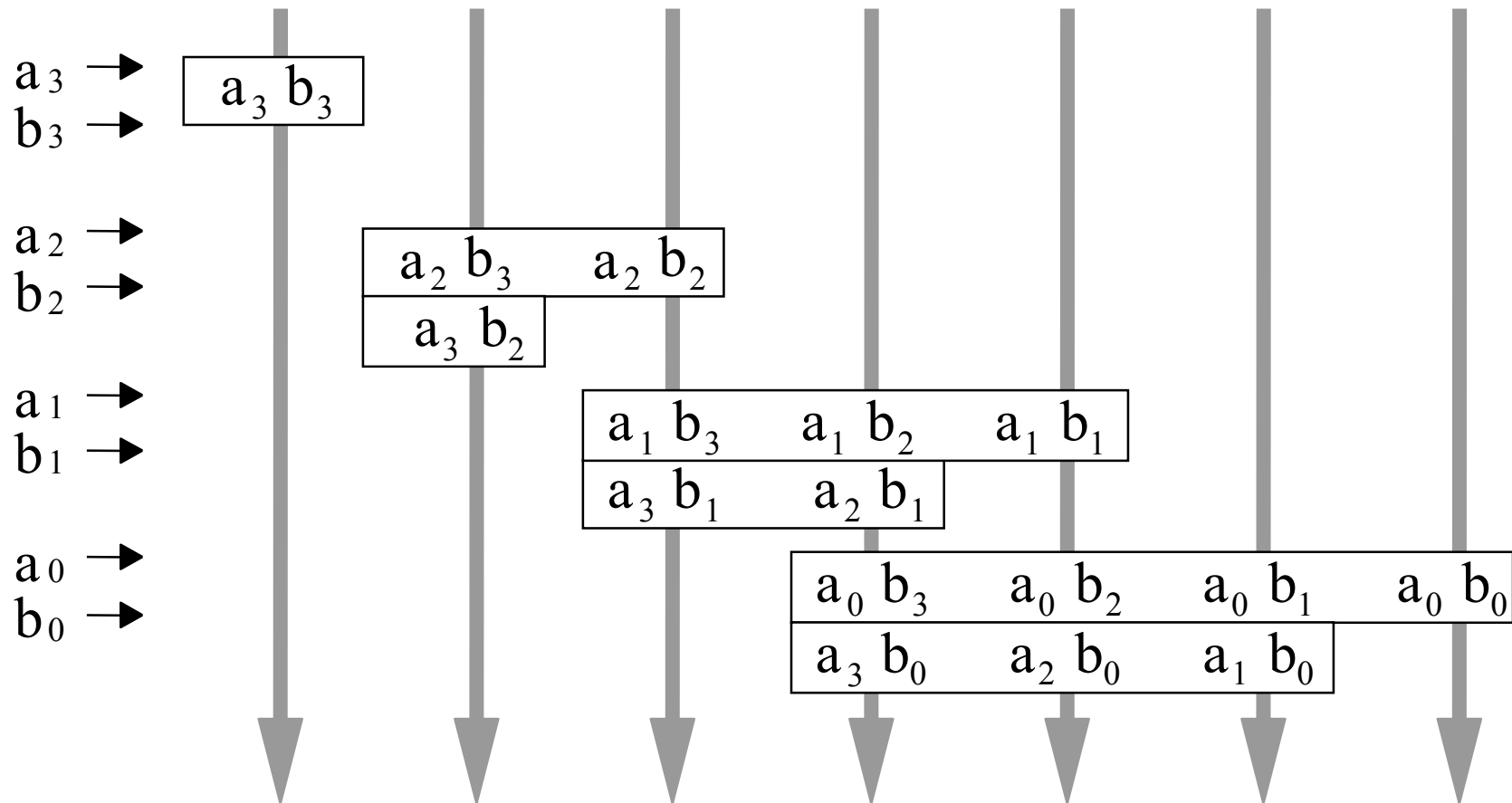
futur

présent

passé



Multiplication en ligne poids forts en tête (3)



sequence of numbers summed up to give a sequence of digits

Opérations à faire simultanément pour la multiplication en-ligne (4)

1- Ranger les chiffres reçus dans les registres A & B

$$A^j \leftarrow A^{j-1} \& a_j \quad B^j \leftarrow B^{j-1} \& b_j$$

2- Multiplier A et B par les chiffres reçus



$$A^j * b_j, B^{j-1} * a_j$$

3- Décaler et sortir le résultat partiel

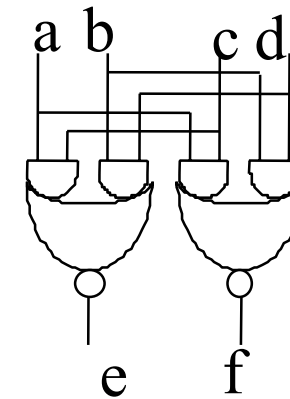
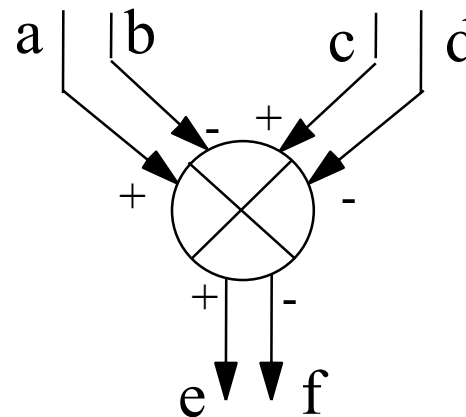
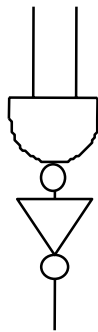
$$P^j \leftarrow 2 * P^{j-1}$$

4- Ajouter les produits partiels au résultat partiel

$$P^j \leftarrow P^j + A^j * b_j + B^{j-1} * a_j$$

Multiplication de 2 chiffres

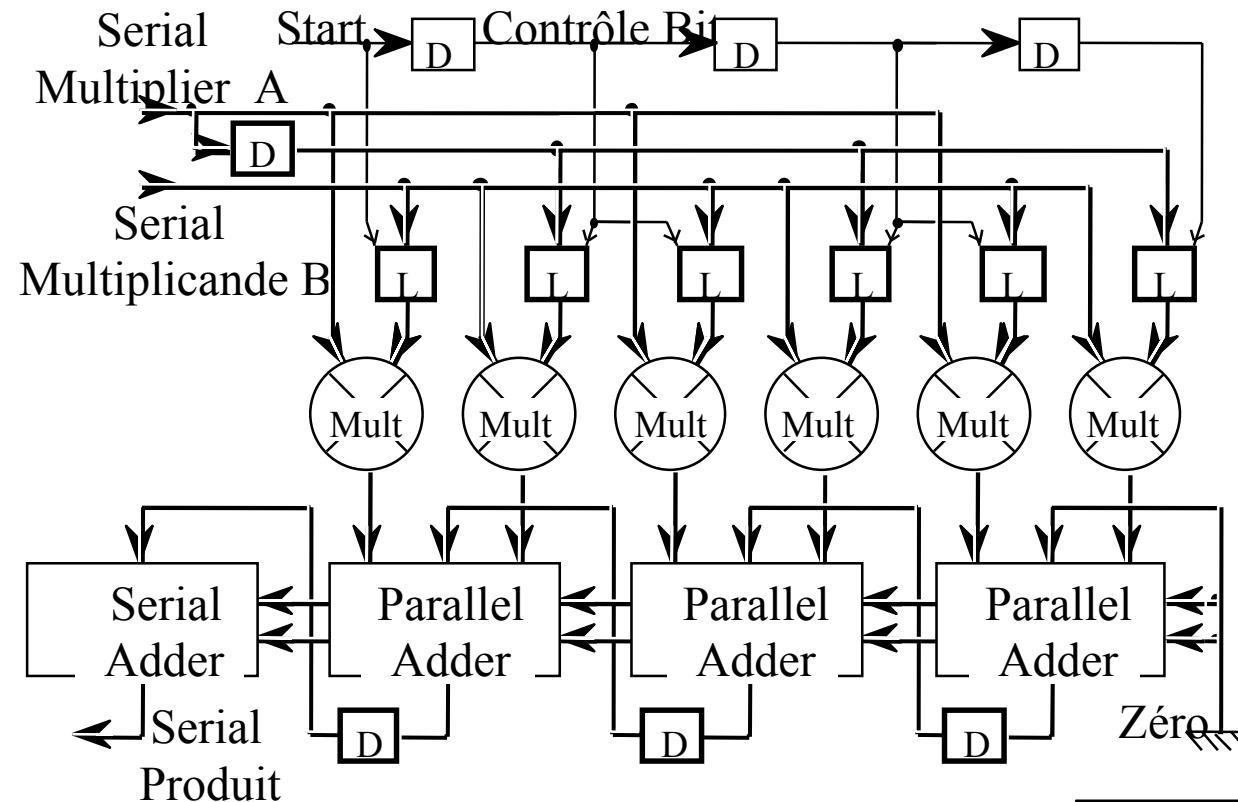
As for bits, the product of two signed digits is one digit.



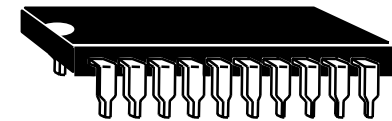
$$e = \overline{a c + b d}$$

$$f = a d + b c$$

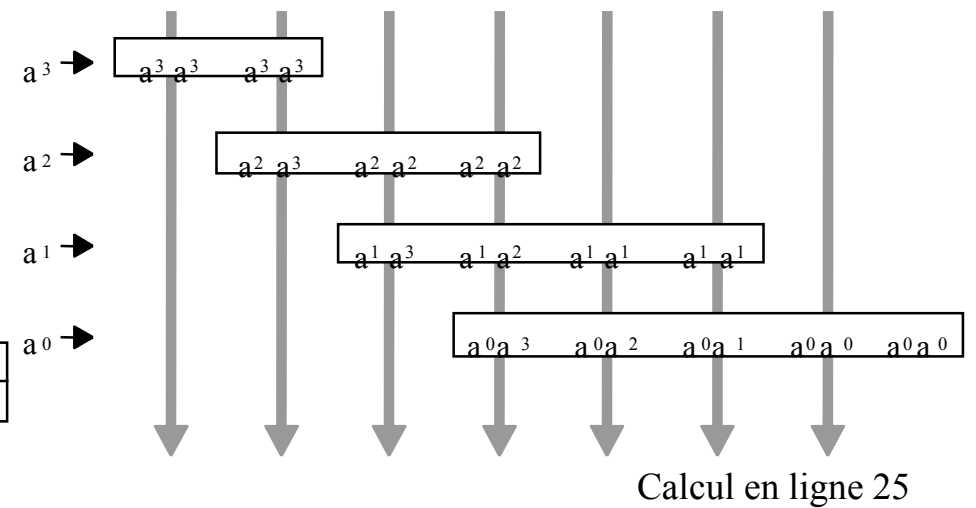
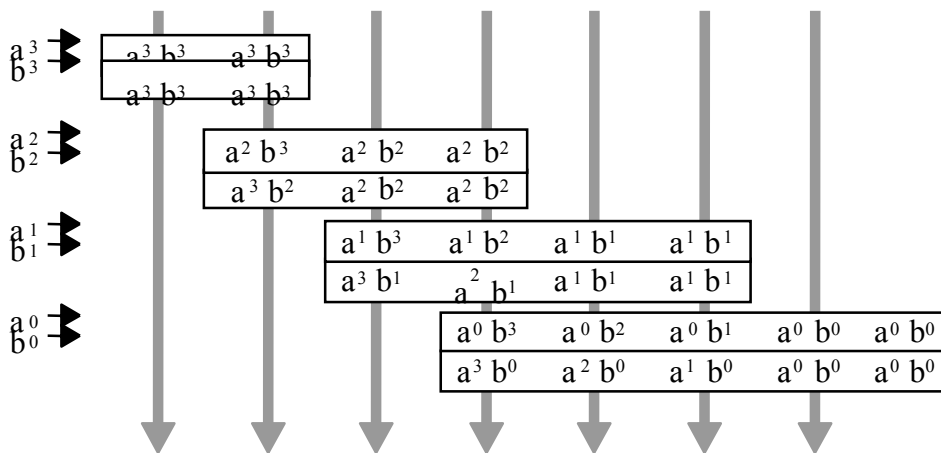
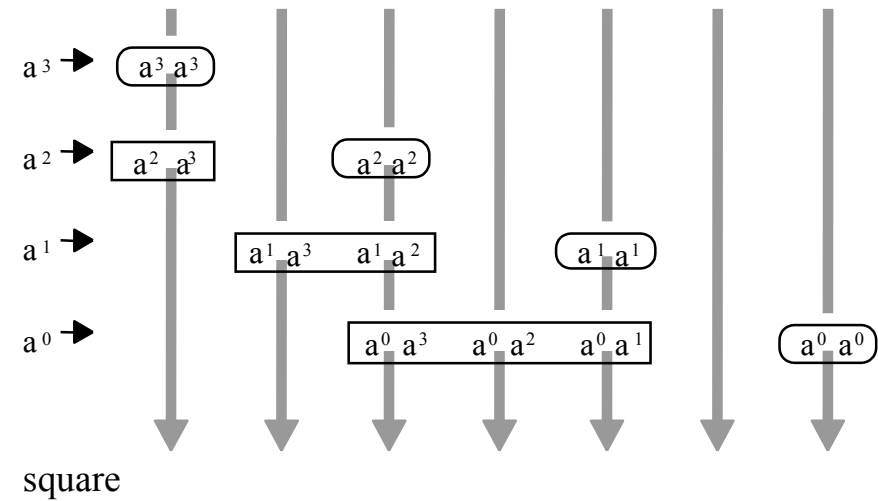
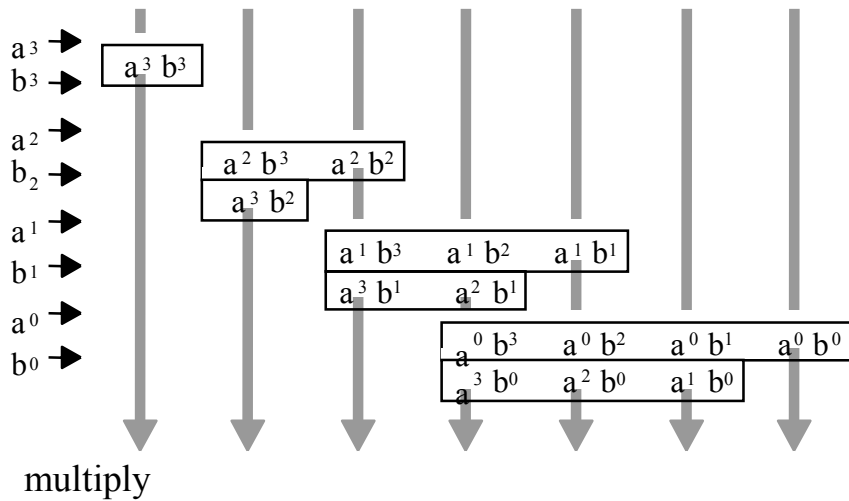
Multiplieur en-ligne poids forts en tête (5)



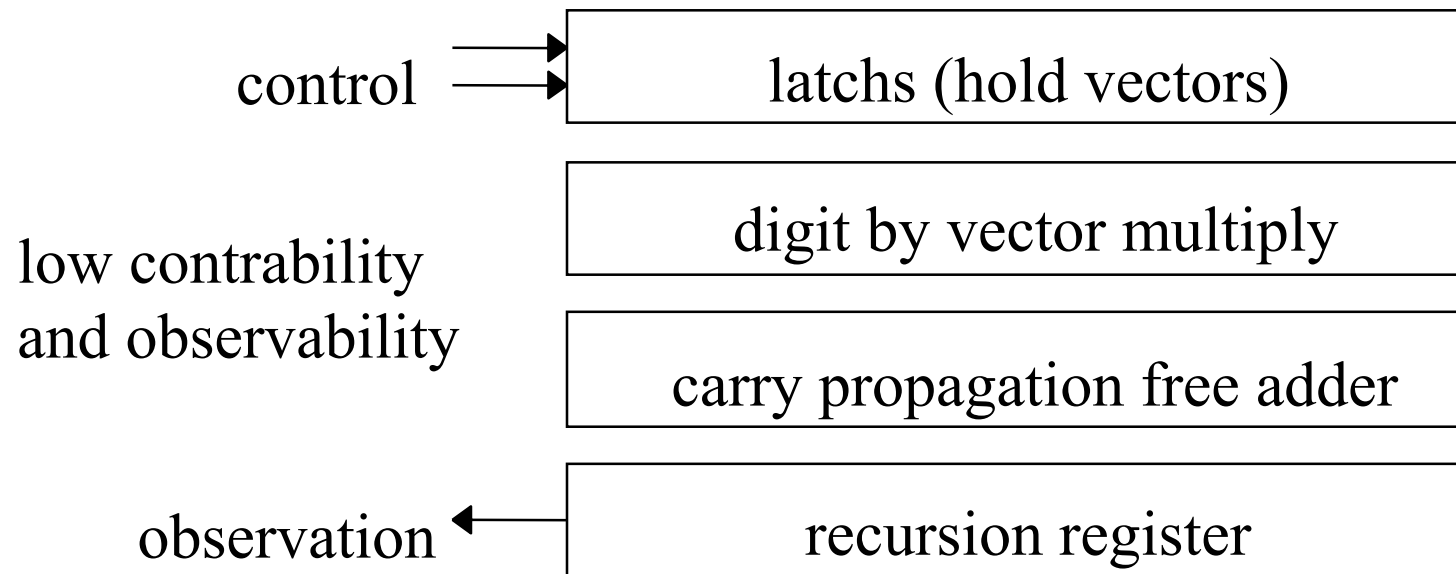
La latence vient du
sommateur en-ligne



Multiplication et carré



Test en ligne de multiplieur en ligne poids forts en tête

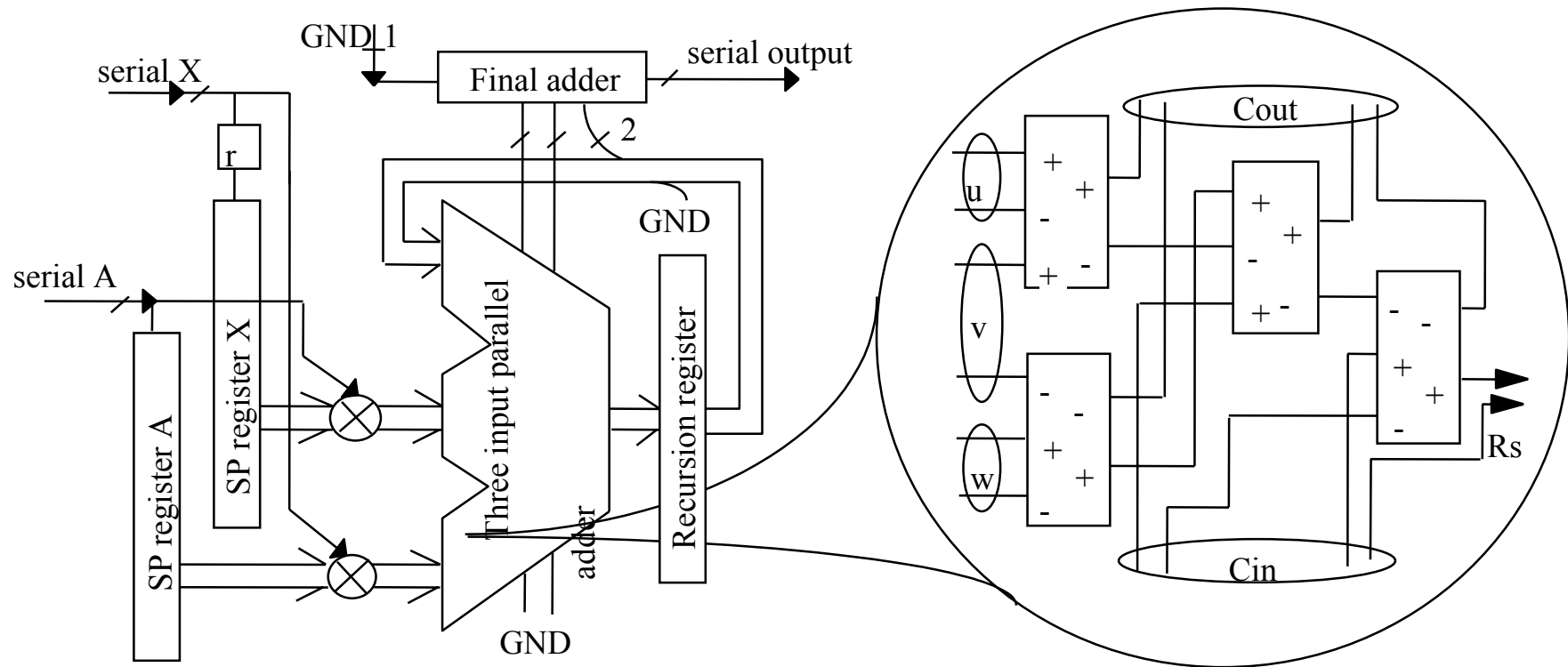


principle: exhaustive testing: no fault model

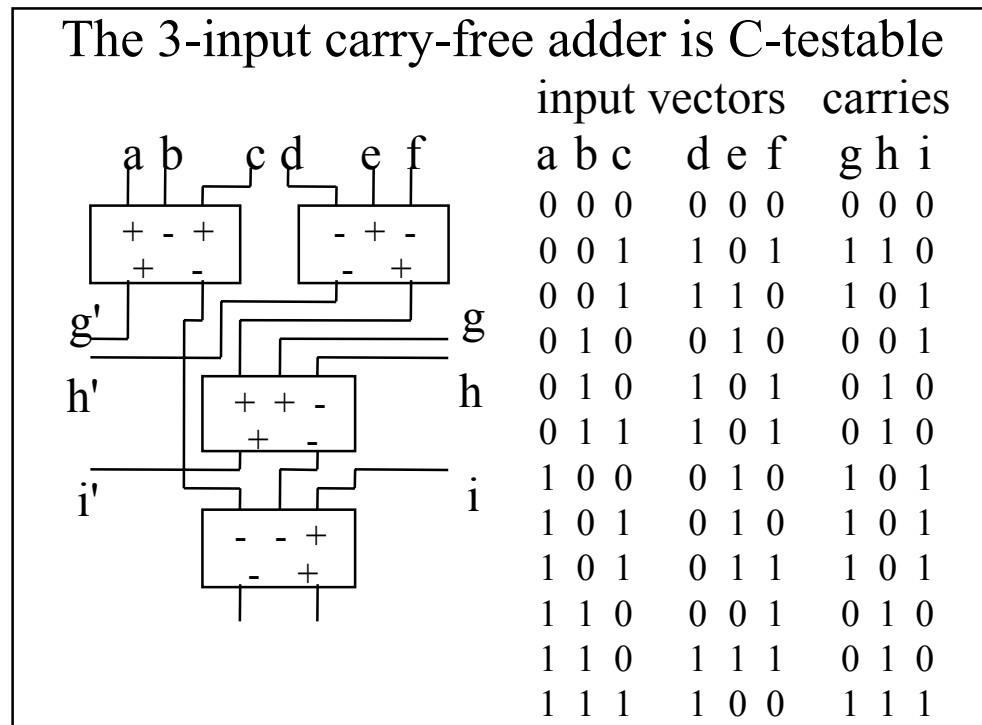
single fault : no masking

adder and recursion register to analyse the results

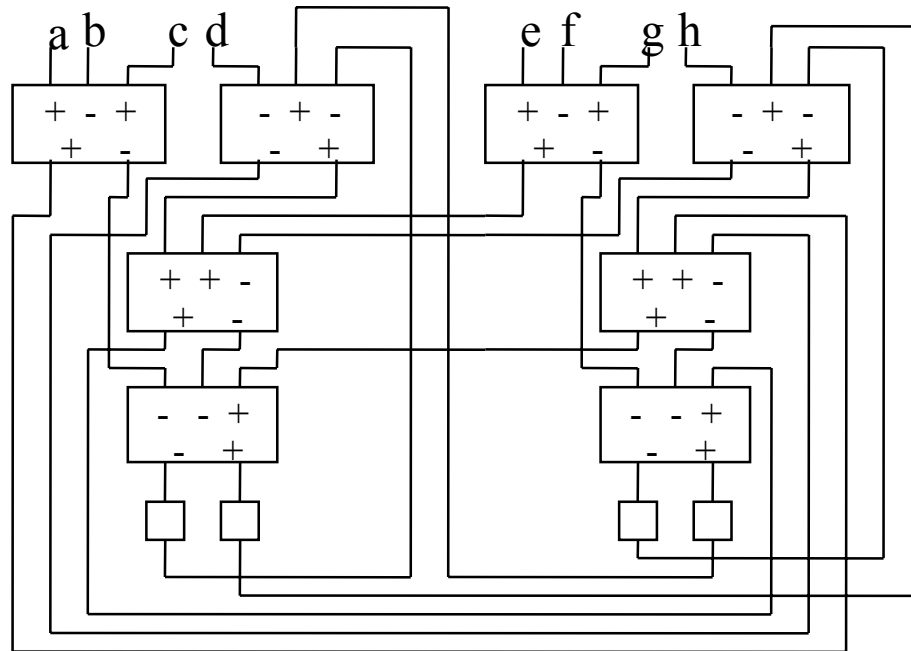
Test en ligne de multiplieur en ligne poids forts en tête (2)



Test en ligne de multiplieur en ligne poids forts en tête (3)



Test en ligne de multiplieur en ligne poids forts en tête (4)



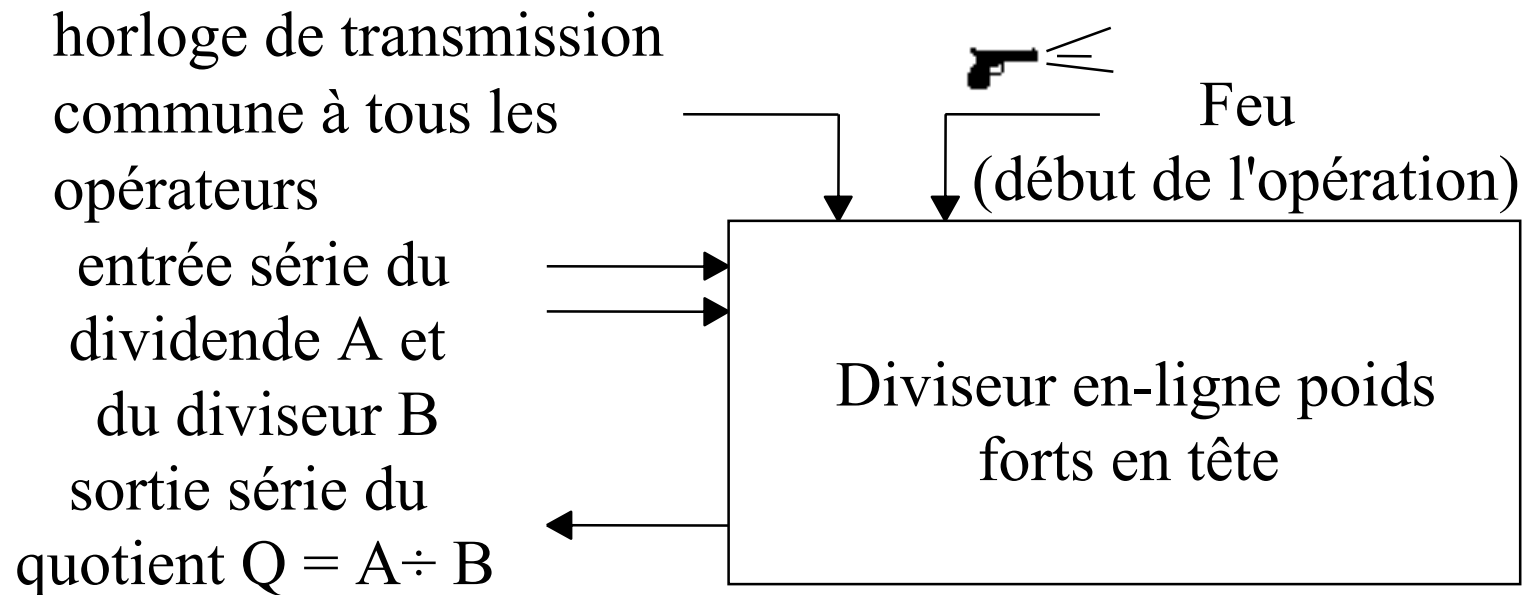
With a local feed-back loop,
more vectors are required

a	b	c	d	e	f	g	h
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0

Diviseur en-ligne

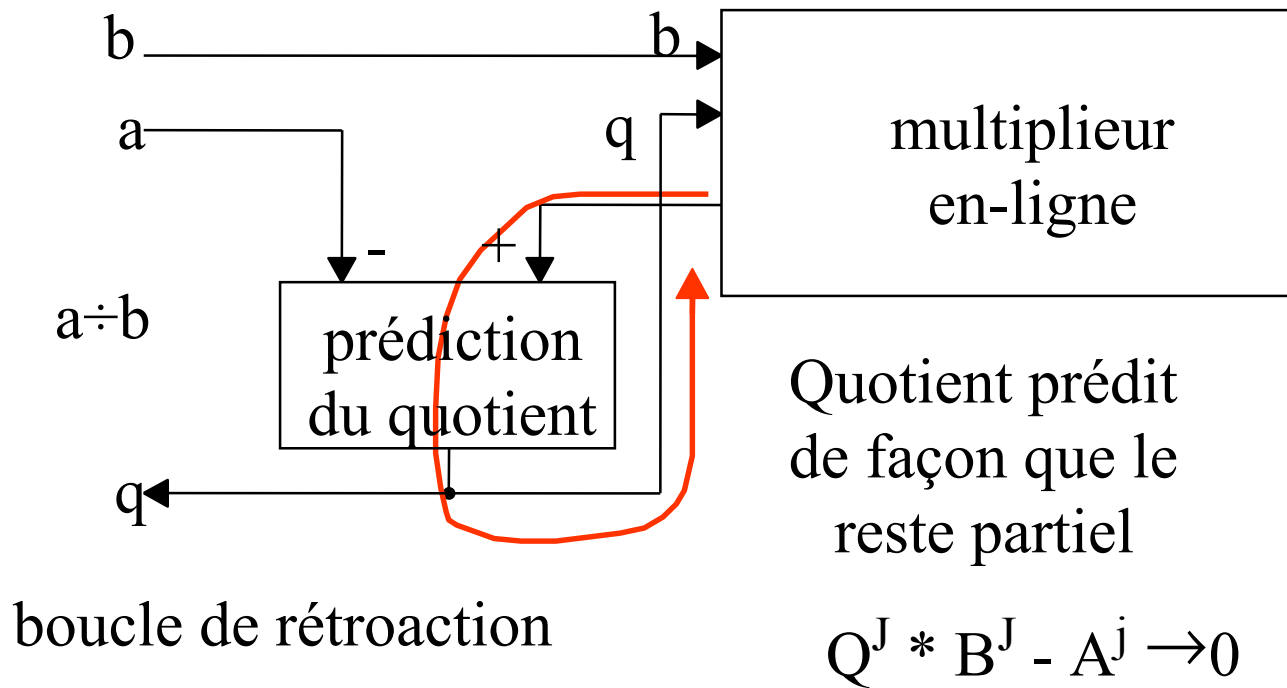
(poids forts en tête)

La division s'appuie sur la multiplication en-ligne poids forts en tête



Division en-ligne (2)

Principe

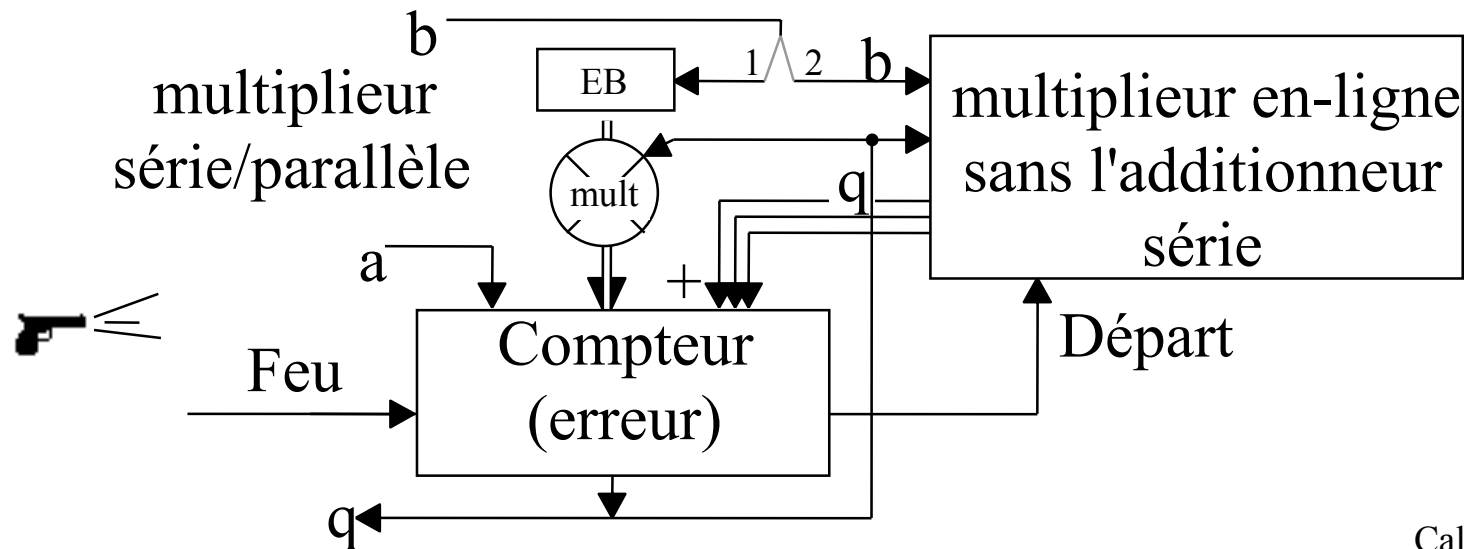


Division en-ligne (3)

Pour assurer la stabilité (ou convergence) de l'algorithme, on doit

- 1- raccourcir la boucle de rétroaction
- 2- utiliser une partie du diviseur pour prédire le quotient

La multiplication est partiellement série/parallèle (4 chiffres)
partiellement série/série (en-ligne)



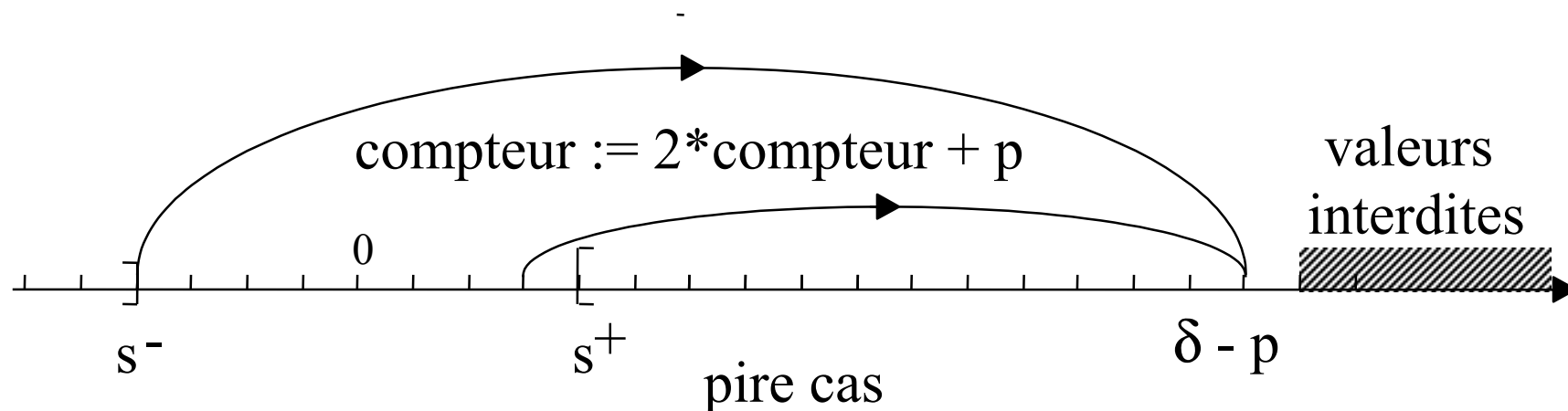
Division en-ligne (4)

A chaque cycle le compteur de prédiction du quotient reçoit

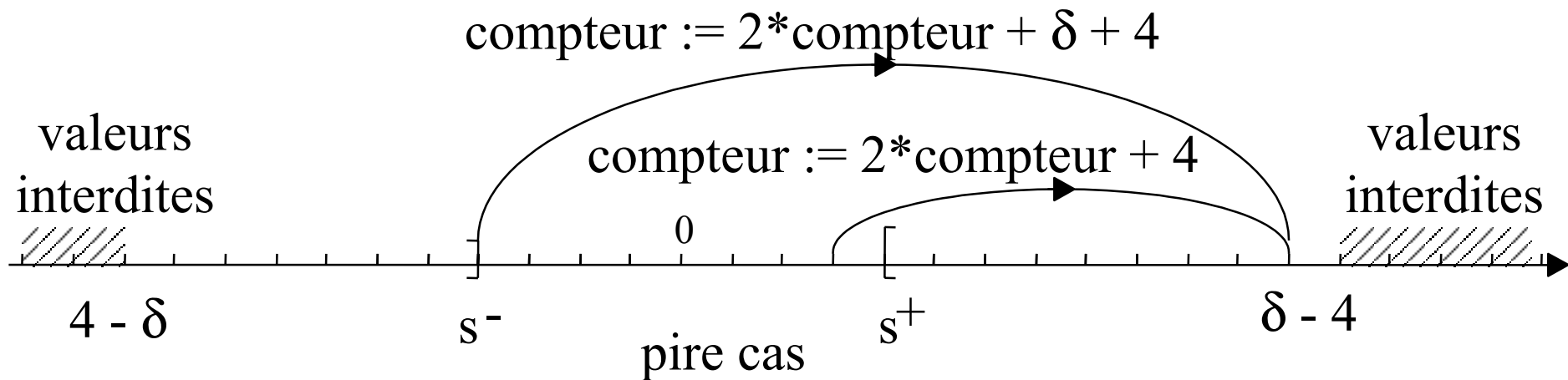
- deux fois son ancienne valeur (connue)
- plus une valeur inconnue p ($-4 \leq p \leq +4$)

On rend le compteur petit en lui ajoutant ou soustrayant une valeur inconnue EB ($\delta \leq |EB| \leq 2*\delta - 1$) en comparant son ancienne valeur à 2 seuils s^+ et s^-

Les seuils s^+ et s^- et δ doivent être faciles à comparer

$$\text{compteur} := 2*\text{compteur} - \delta + p$$


Division en-ligne (5)



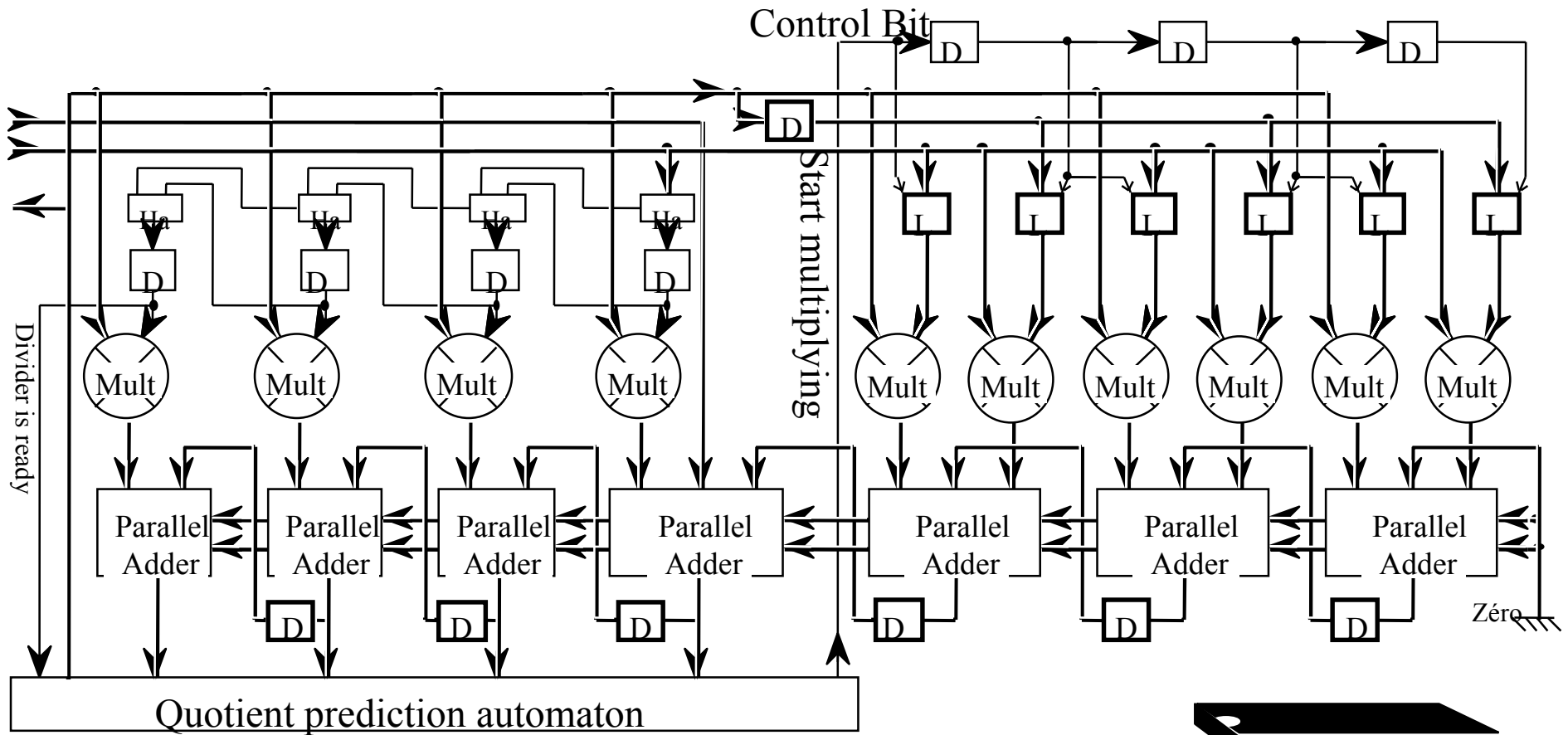
$$2*(s^+ - 1) + 4 \leq \delta - 4$$

$$2*s^- + \delta + 4 \leq \delta - 4$$

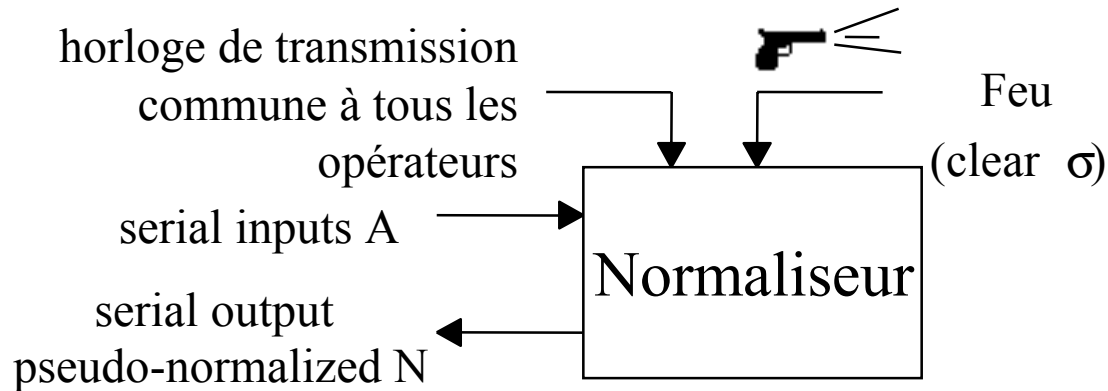
$$2*(s^- + 1) - 4 \geq 4 - \delta$$

$$2*s^+ - \delta - 4 \geq 4 - \delta$$

Diviseur en-ligne (6)

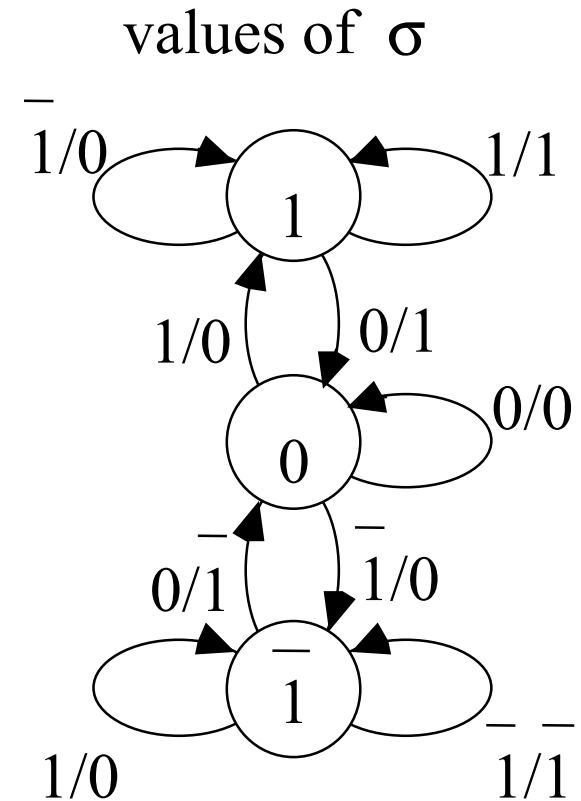


Normaliseur en ligne



```

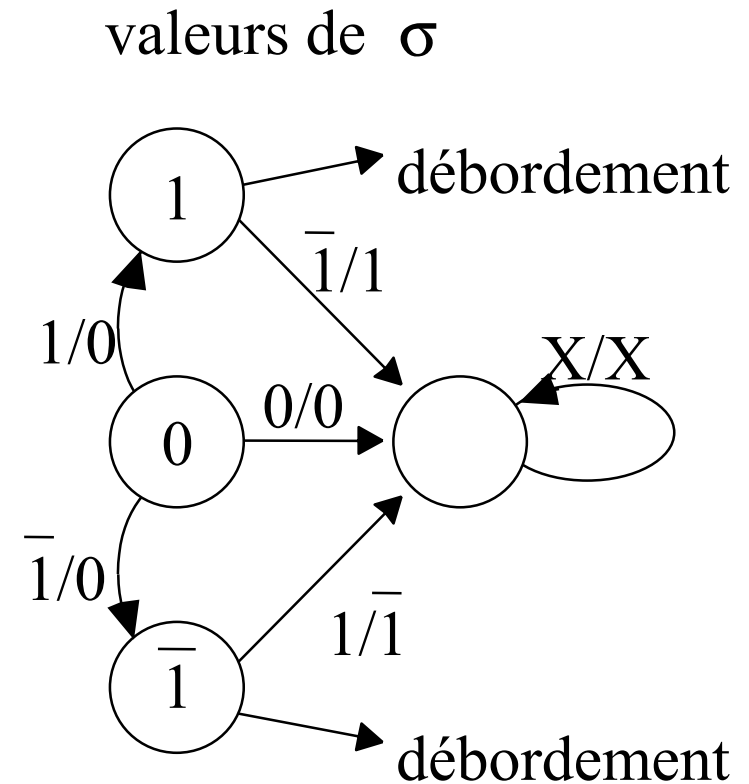
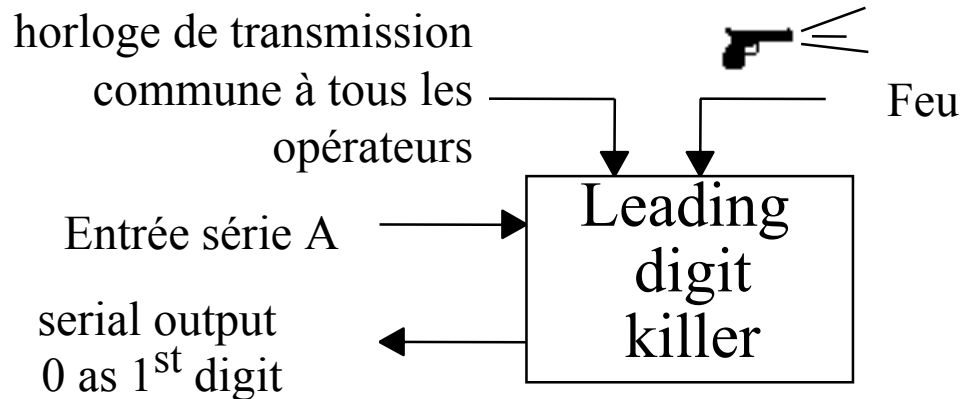
procedure normalize ( $a_i, n_i : \text{SBD}$ ) ;
var  $\sigma : \text{SBD}$  ;
begin
     $\sigma := 2 * \sigma + a_i$ ;
    if  $\sigma \geq 2$  then  $n_i := 1$ 
    else if  $\sigma \leq -2$  then  $n_i := -1$ 
    else  $n_i := 0$  ;
     $\sigma := \sigma - 2 * n_i$ ;
end .
    
```



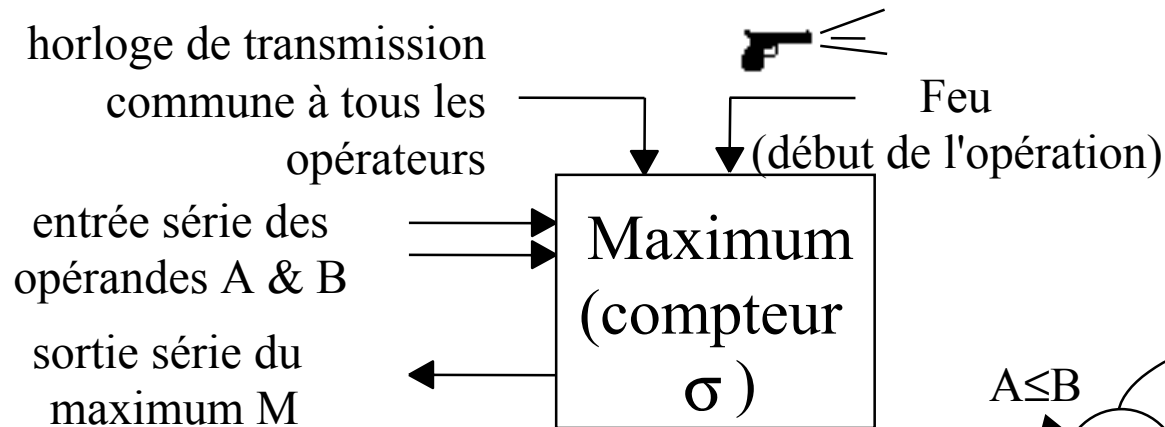
Détection de débordement

$$|A| < 2^n$$

Force a_n à 0



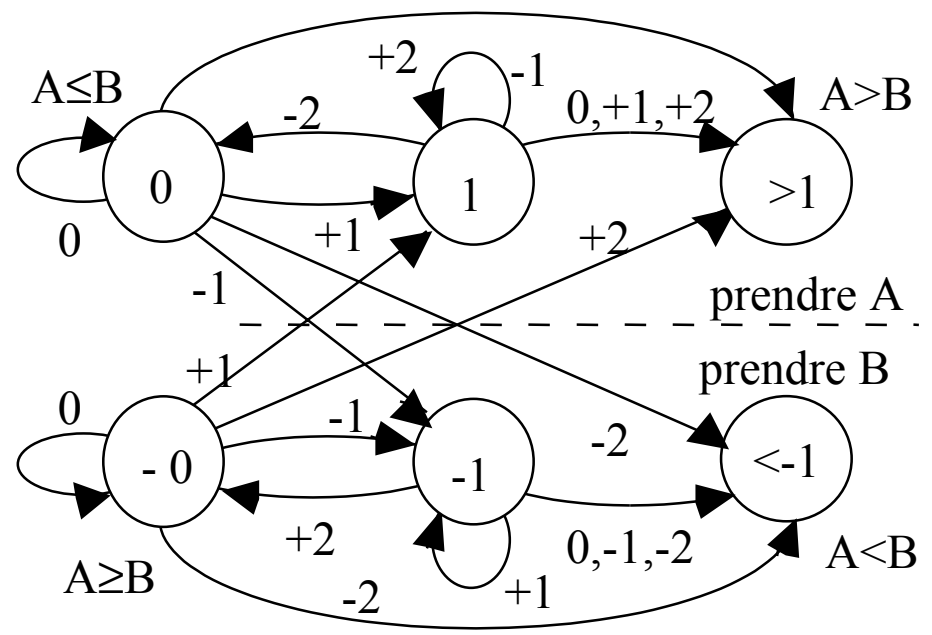
Maximum en-ligne de nombres redondants



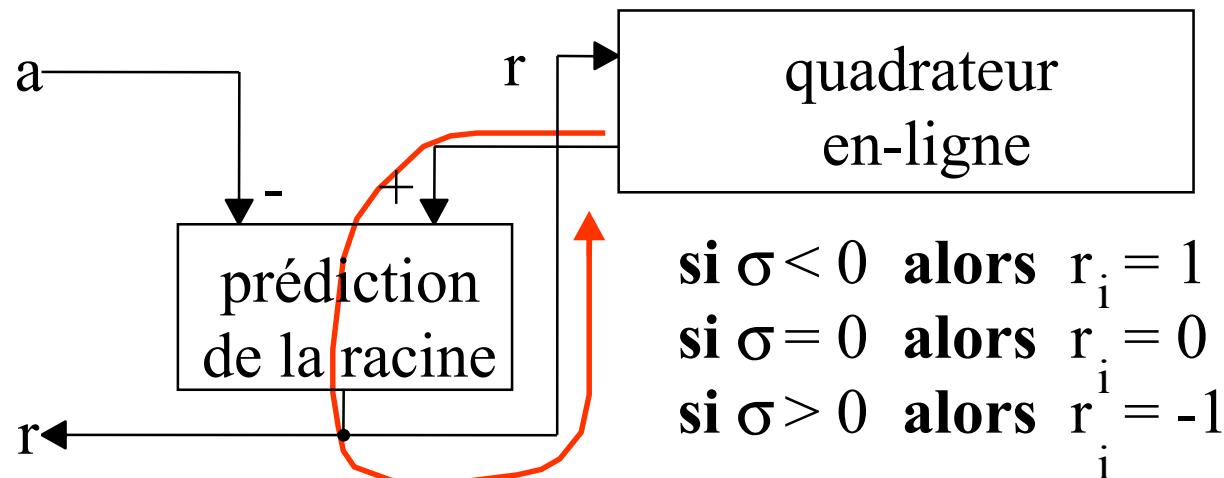
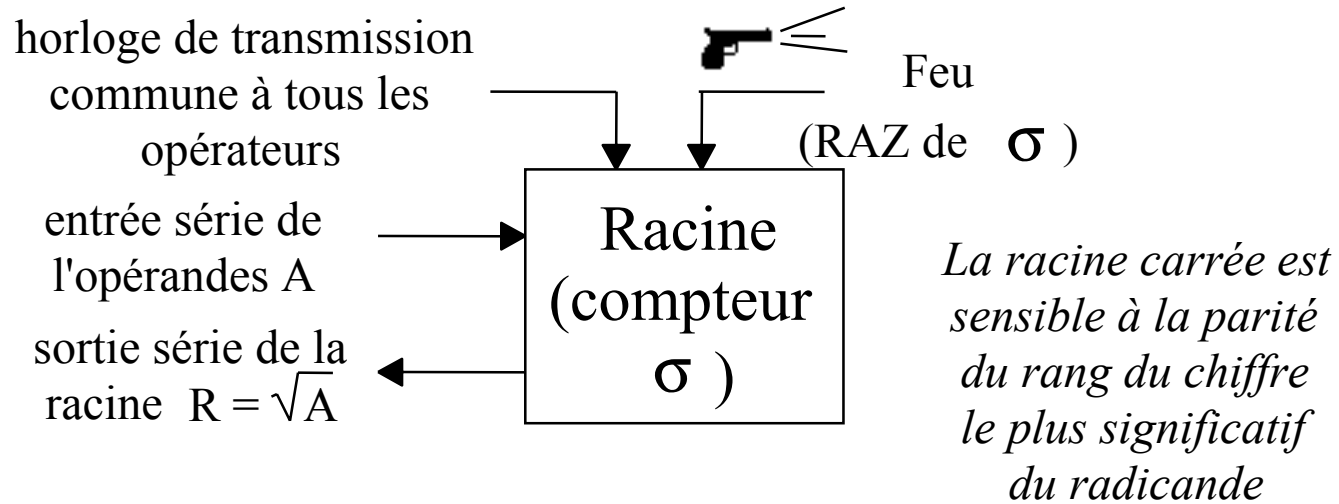
```

if  $\sigma_{j-1}$  in  $\{-1,0,+1\}$ 
  then  $\sigma_j = 2 * \sigma_{j-1} + (a_j - b_j)$  else  $\sigma_j = \sigma_{j-1}$ ;
if  $\sigma_j > 0$  then up = true;
if  $\sigma_j < 0$  then up = false ;
if up then  $m_j = a_j$  else  $m_j = b_j$  ;
    
```

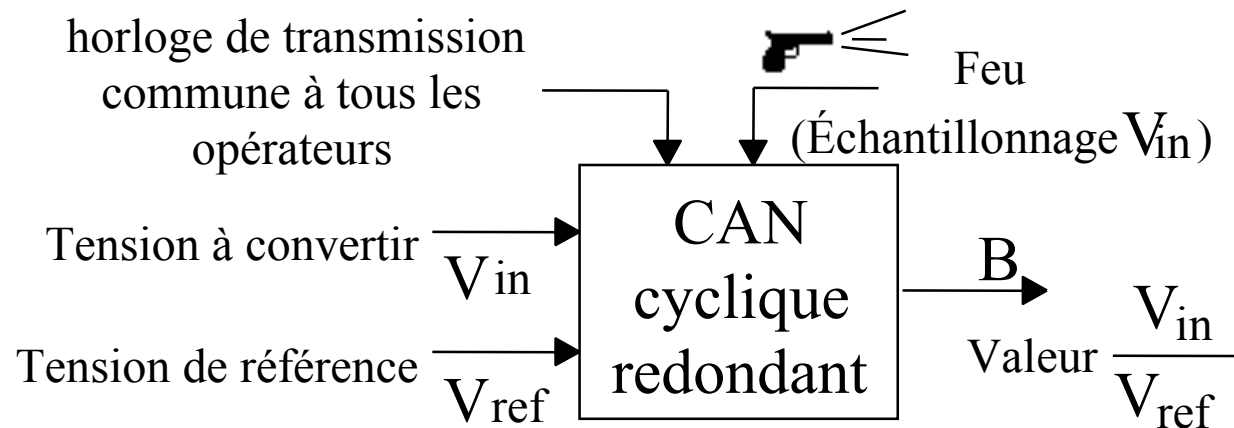
valeurs de σ



Racine carrée en-ligne de nombres redondants



Convertisseur analogique-numérique redondant



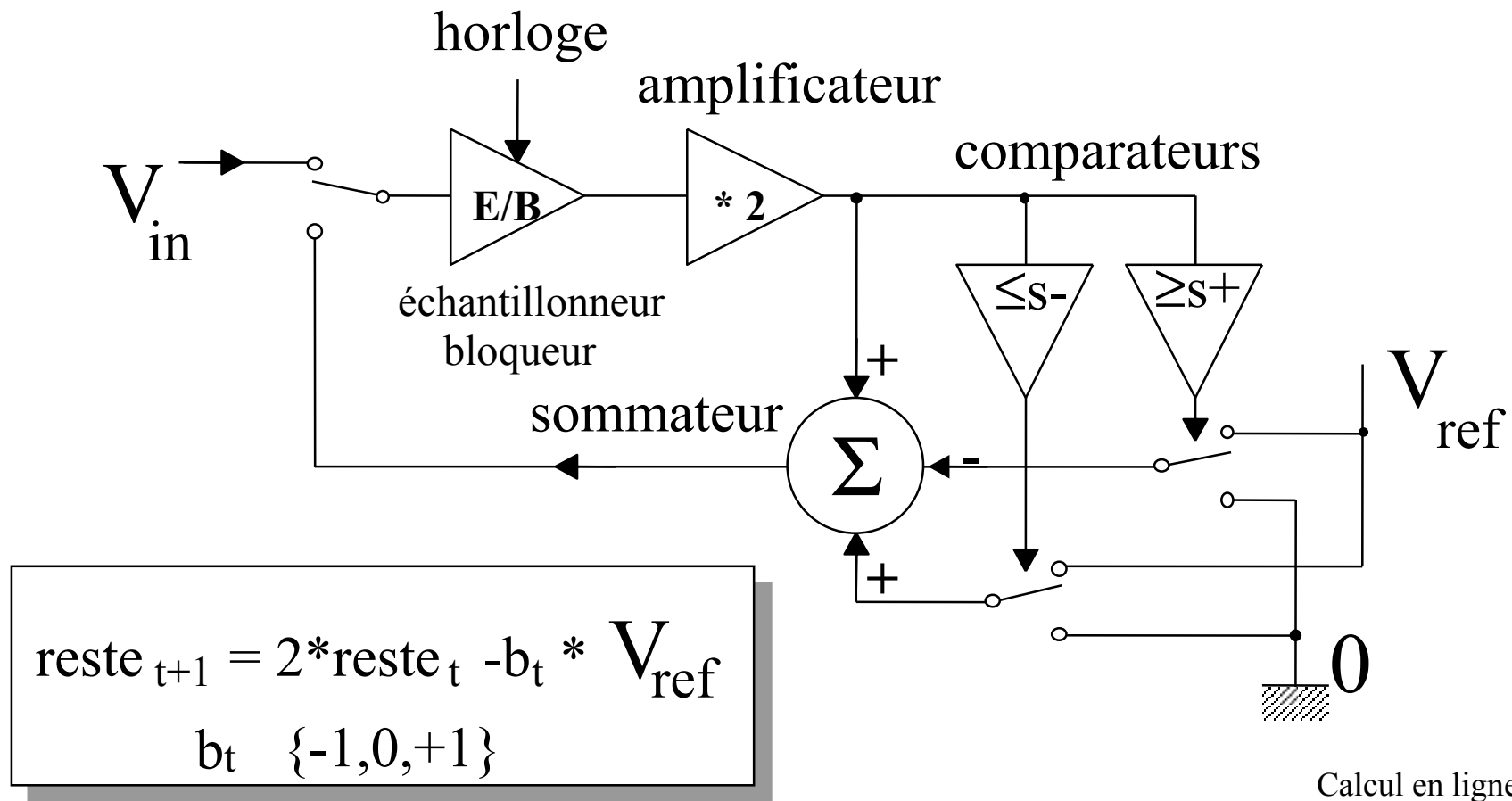
$reste_0 := V_{in}$;

si $reste_t \geq (V_{ref}/2 \pm V_{ref}/2)$ **alors** $reste_{t+1} := 2*(reste_t - V_{ref})$

sinon si $reste_t \leq -(V_{ref}/2 \pm V_{ref}/2)$ **alors** $reste_{t+1} := 2*(reste_t + V_{ref})$

sinon $reste_{t+1} := 2*(reste_t)$

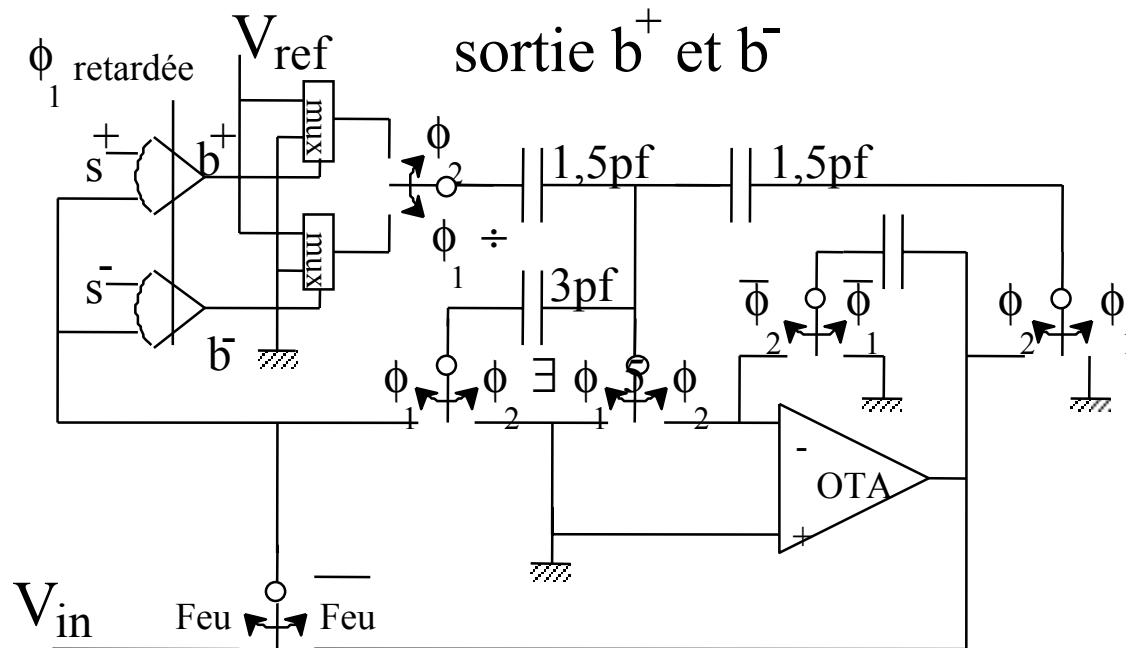
Convertisseur analogique-numérique redondant (2)



Convertisseur analogique-numérique redondant

(3)

(4)



$$\phi_1 \wedge \phi_2 = 0$$

Les phases ϕ_1 et ϕ_2 ne se recouvrent pas

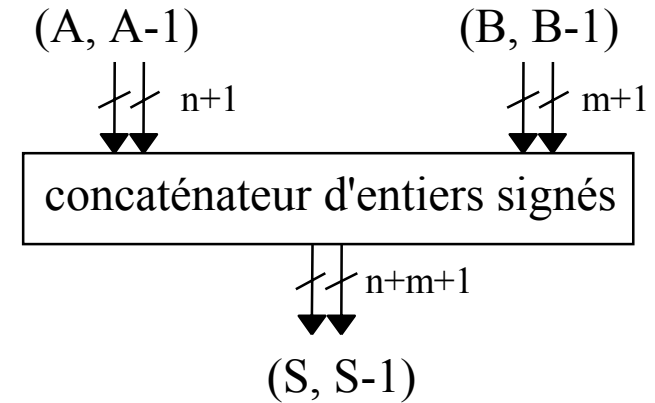
Calcul en ligne 42

Conversion "à la volée" du redondant

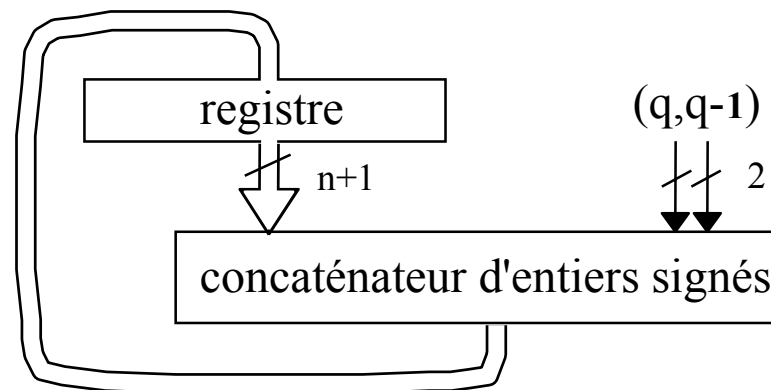
Concaténation de A et B $(A, A-1)$
 $S := A * 2^m + B$

$(B, B-1)$

si $B \geq 0$ **alors** $S := A \& B$
sinon $S := (A-1) \& B;$
si $(B-1) \geq 0$ **alors** $(S-1) := A \& (B-1)$
sinon $(S-1) := (A-1) \& (B-1);$
(le bit de signe de B est omis dans la concaténation &)



q	q-1	bits
1	01	01
0	0	00
-1	-1	11
	-2	10

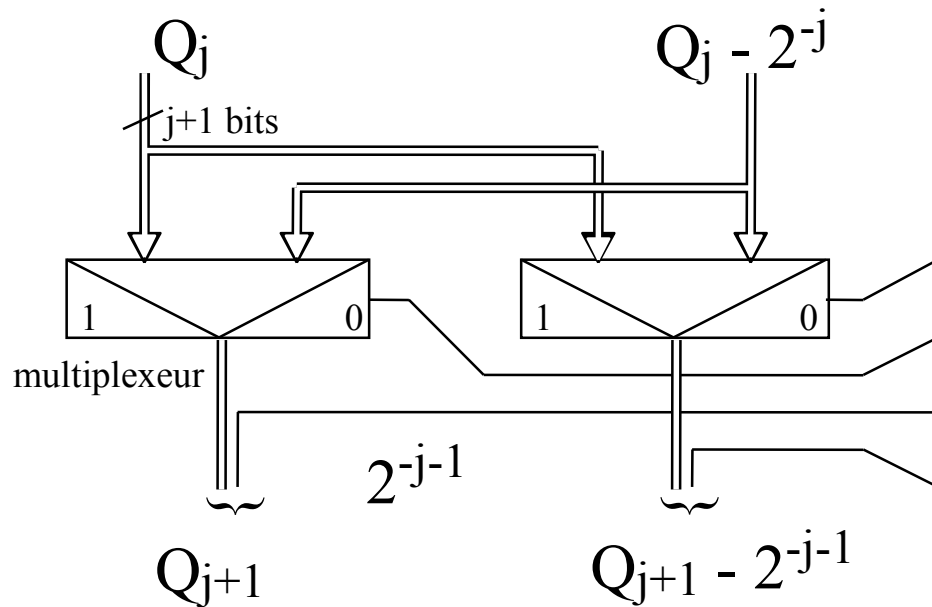


Conversion "à la volée" du redondant (2)

premier → dernier
 suite $q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ $q_i \in \{-1, 0, +1\}$

$$Q_j = \sum_{i=0}^j p_i 2^{-i} \quad p_i \in \{0, 1\}$$

$$Q_0 = q_0, \quad Q_0 - 1 = \overline{q_0} \quad q_0 \neq 0$$



$$q_{j+1} 2^{-j-1} - 2^{-j-1} = -2^{-j} + 2^{-j-1}$$

$q_{j+1} = 1$
 $q_{j+1} \neq 0$
 $q_{j+1} \neq 0$
 $q_{j+1} = 0$

Combinaisons d'opérateurs en-ligne

Certains opérateurs en-ligne parallélisent implicitement leur(s) opérande(s) ou leur résultat.

Cette propriété peut être exploitée pour construire des opérateurs complexes avec

- un coût moindre
- une latence moindre (mais une période supérieure)

Par exemple :



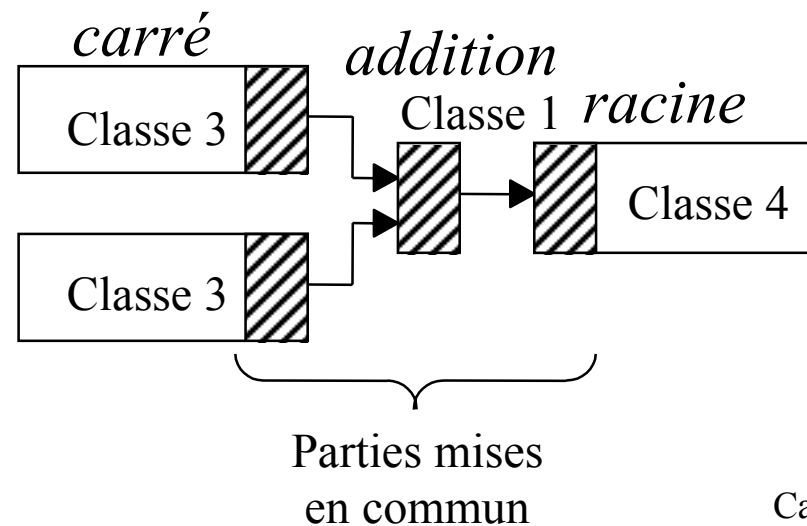
Opérateur	coût par chiffre	latence
$C = A^2$	76	3
$S = A + B$	0	2
$R = \sqrt{A}$	76	1
$D = \sqrt{A^2 + B^2}$	126	1



Classes d'opérateurs en-ligne

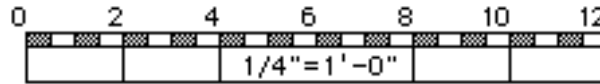
Opérateur	
Abs/max/min	1
Add/Sous $S = A \pm B$	2
Multiplication $P = A * B$	3
Carré $C = A^2$	
Division $Q = A \div B$	4
Racine carrée $R = \sqrt{A}$	

Classement des opérateurs en-ligne en fonction de leur affinité (possibilité de partage)



Opérateur	# classe	# variante	Opérandes A et B		résultat en série	résultat en parallèle	opérande en parallèle SP register	coût matériel de l'opérateur en nombre de :				
								Parallél input register	vector/digit multiply \otimes	2-input adder	Recursion register	
Abs/max/min	1	/	ser	ser	M	na	na	0	0	0	0	0
Add/Sous $S = A \pm B$	2	1	par	par	na	S	A,B	0	0	0	1	0
		2	ser	ser	S	na	na	0	0	0	0	0
Multiplication $P = A * B$	3	1	par	ser	P	na	/	0	1	1	1	1
		2	ser	ser	P	na	A,B	2	0	2	2	1
Carré $C = A^2$		1	ser		C	na	A	1	0	1	1	1
		2	par/ser		C	na	/	0	1	1	1	1
Division $Q = A \div B$	4	1	par	par	Q	na	/	0	0	1	1	1
		2	par	ser	Q	Q	B	2	0	2	2	1
		3	ser	par	Q	na	/	0	0	1	1	1
		4	ser	ser	Q	Q	B	2	0	2	2	1
Racine carrée $R = \sqrt{A}$		1	par		R	na	/	1	0	1	1	1
		2	ser		R	R	na	0	1	1	1	1

Règles de combinaison d'opérateurs



Règle 1 : Deux opérateurs de classe 3 partageant la même entrée peuvent partager le même SP-registre.

Règle 2 : Si la sortie d'un opérateur de classe 4 est reliée à l'entrée d'un opérateur de classe 3 alors ils peuvent partager un SP-registre.

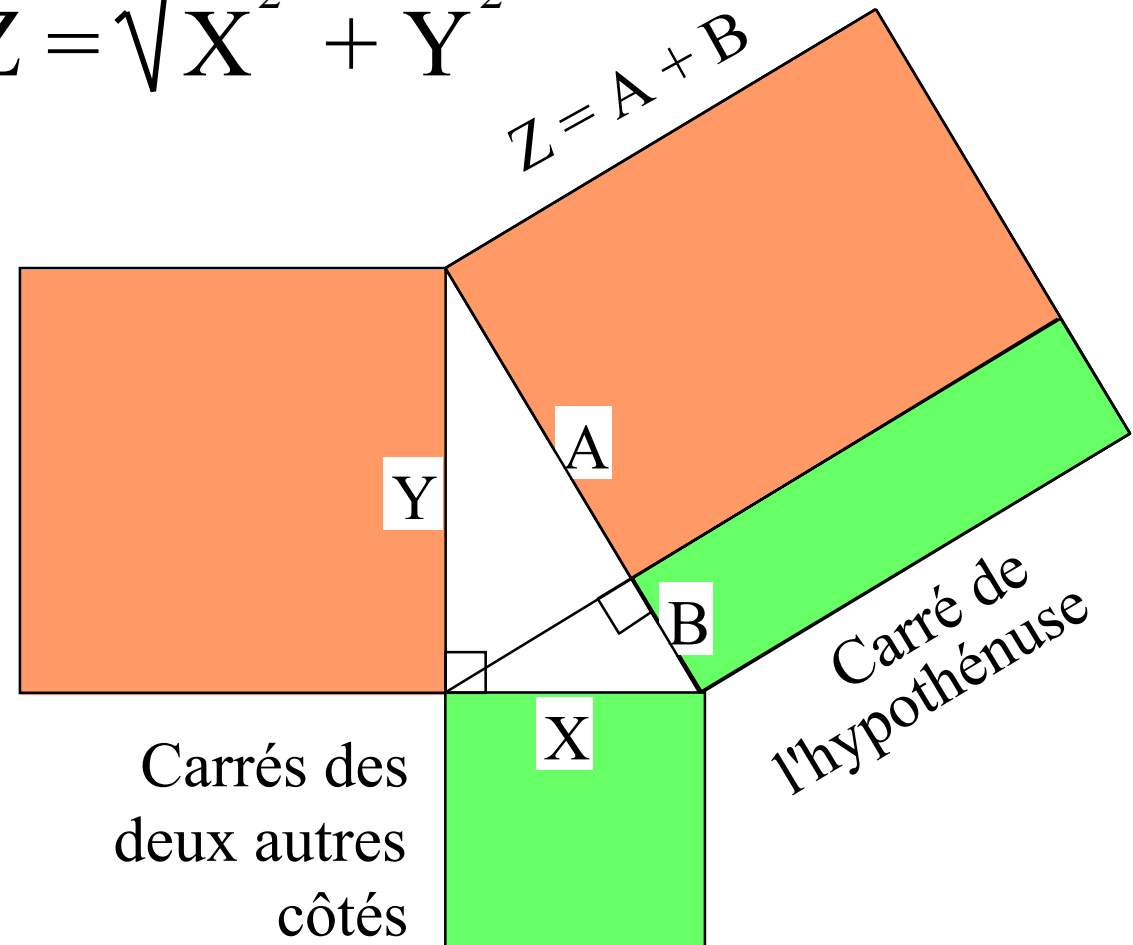
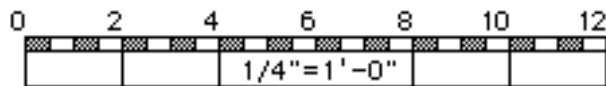
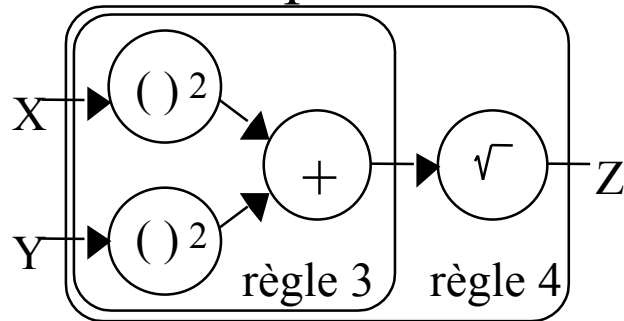
Règle 3 : Si les sorties d'opérateurs de classe 3 sont ajoutées (ou soustraites) alors ils peuvent partager leur registre de récursion. Le résultat de cette fusion est de classe 3.

Règle 4 : Si la sortie d'un opérateur de classe 3 est reliée à l'entrée d'un opérateur de classe 4 ils peuvent partager leur registre de récursion.

Exemple 1: processeur Euclidien

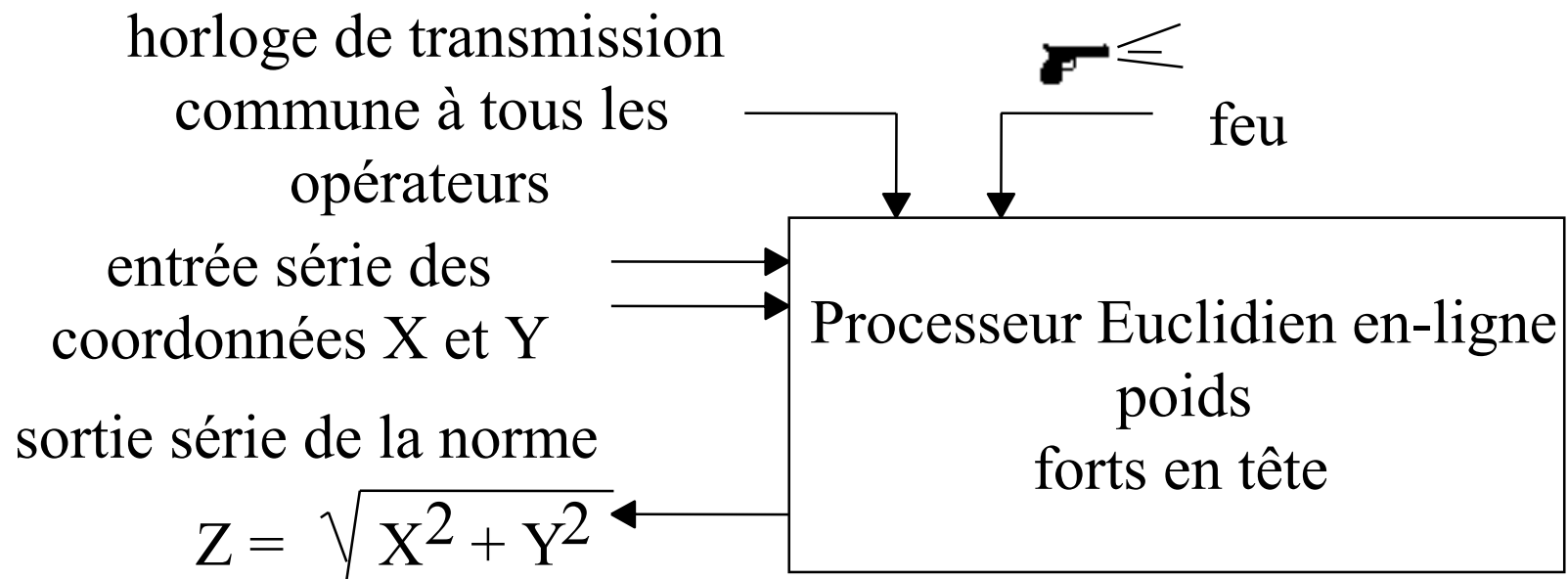
$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Règles d'assemblage
des opérateurs



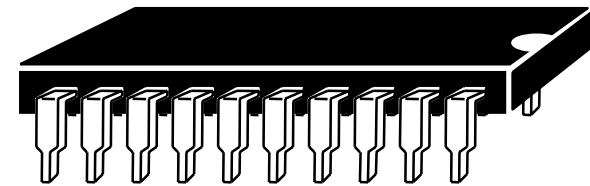
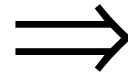
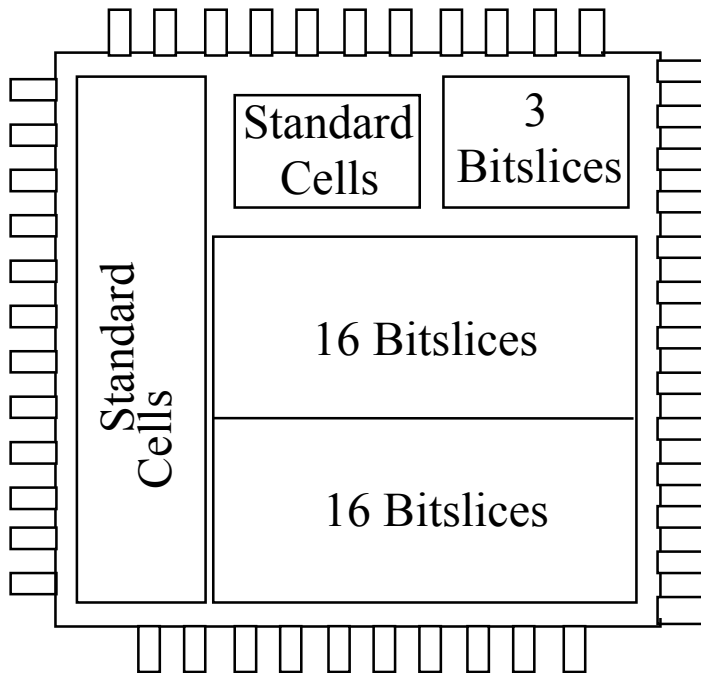
Norme Euclidienne en-ligne

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

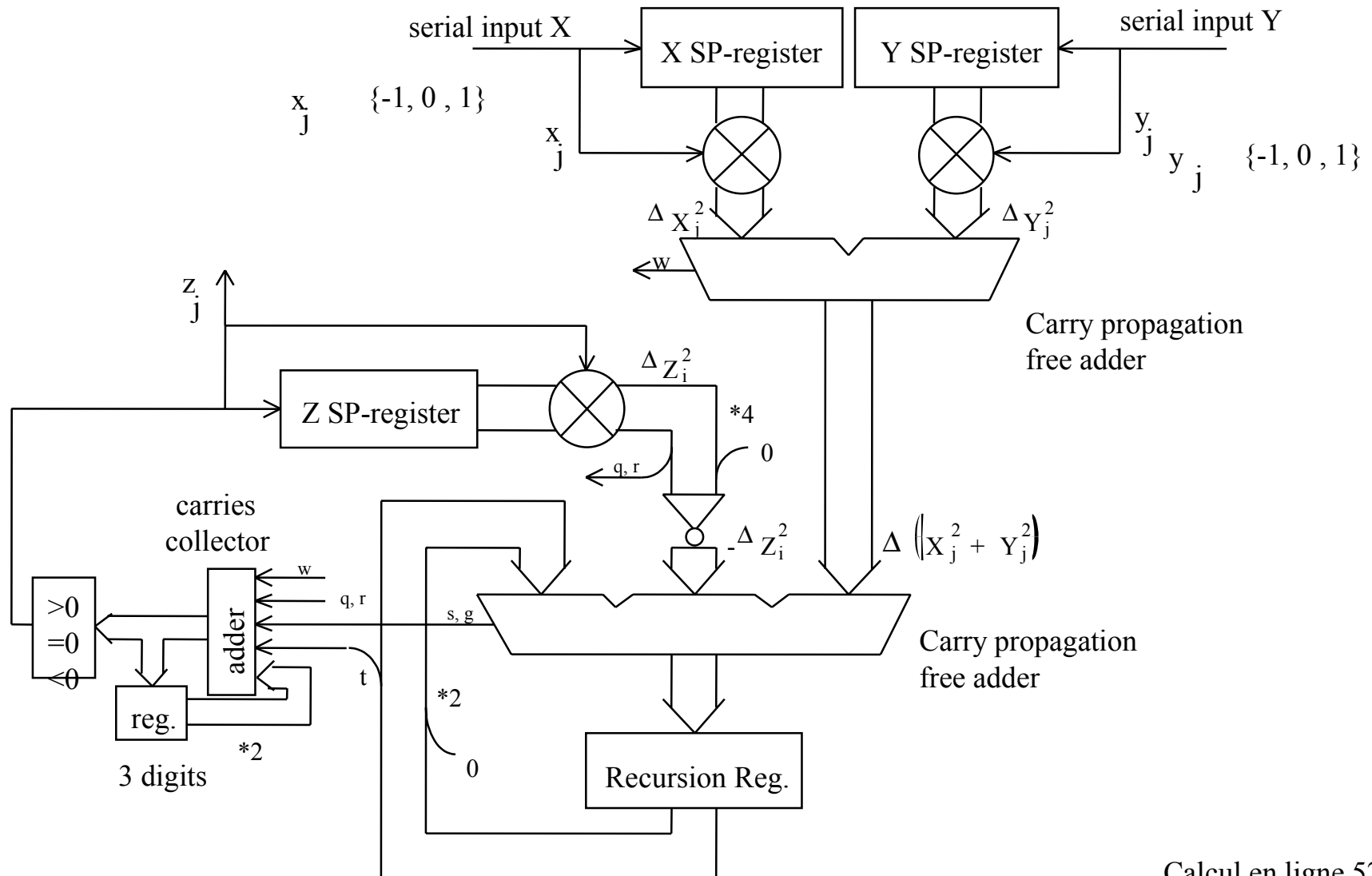


Norme Euclidienne en-ligne (2)

$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ en-ligne
avec 32 chiffres de précision
Application des règles : gain 19%



Norme Euclidienne en-ligne (3)

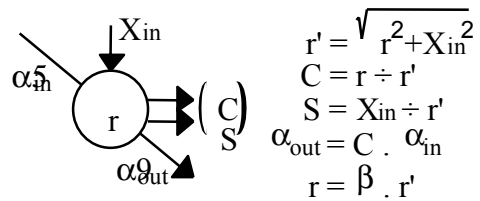


Exemple 2: filtre de Kalman

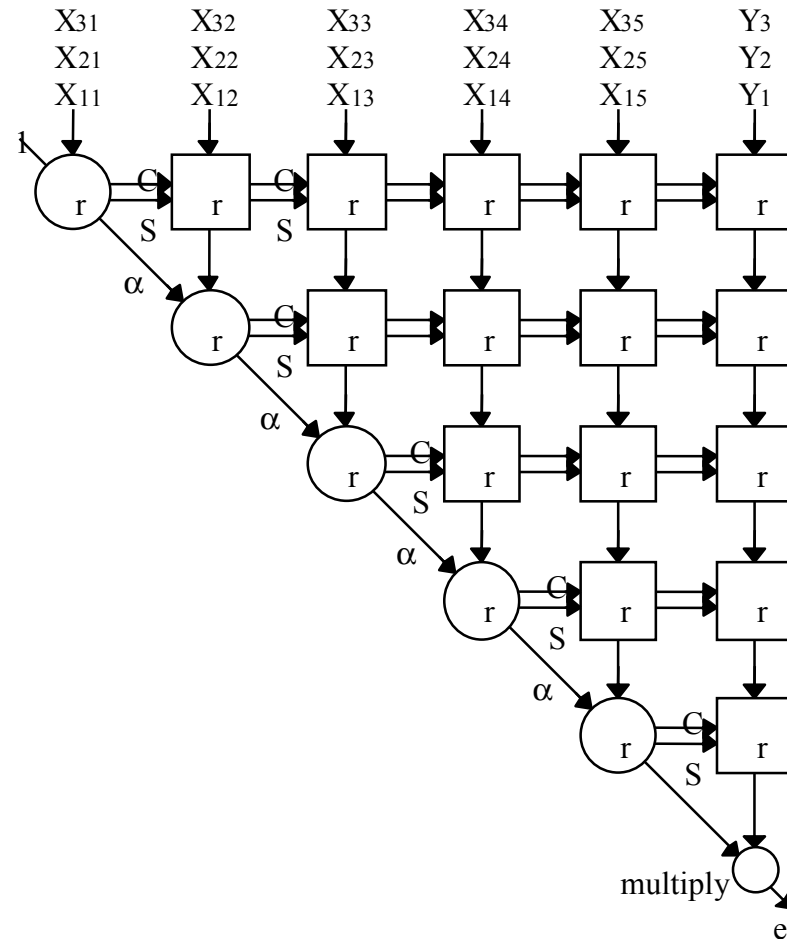
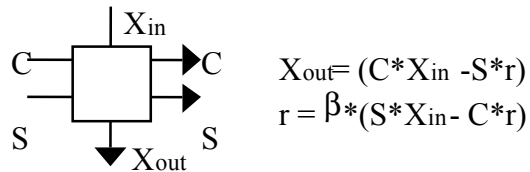
avec Jin Zian MOU ENST-Paris

β est le carré du facteur d'oubli.
 Le circuit ci-contre n'est pas systolique, il n'y a pas de retard horizontal. Il est "pipeliné" au niveau du chiffre. Toutes les entrées se font en série.

Description fonctionnelle de la cellule ronde

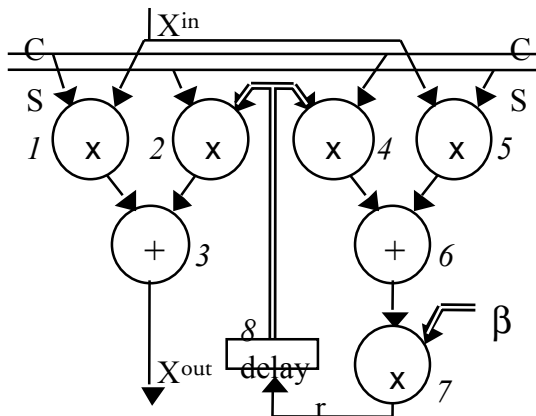


Description fonctionnelle de la cellule carrée



Filtre de Kalman (2)

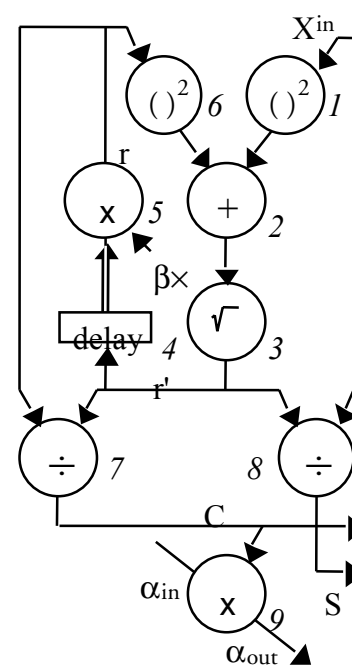
cellule carrée



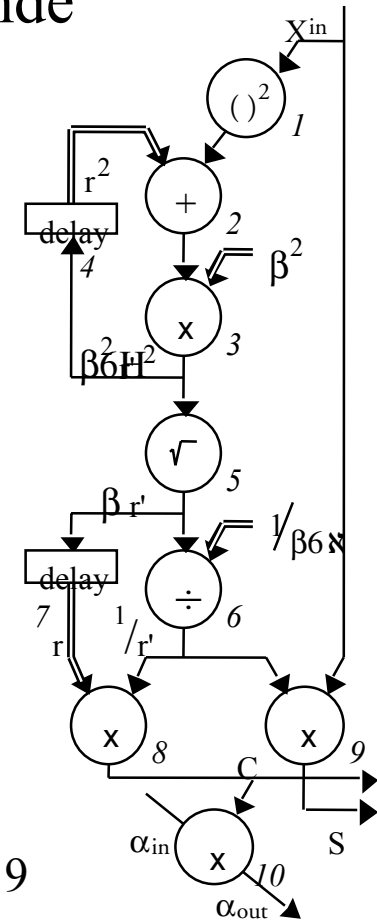
Règle 1 sur 1 & 4
règle 3 sur 1,2,3,4,5 & 6
gain de 19%

Règle 3 puis 4 sur 1,2,3 & 6
règle 2 sur 3,4,7 & 8
gain de 20%

cellule ronde

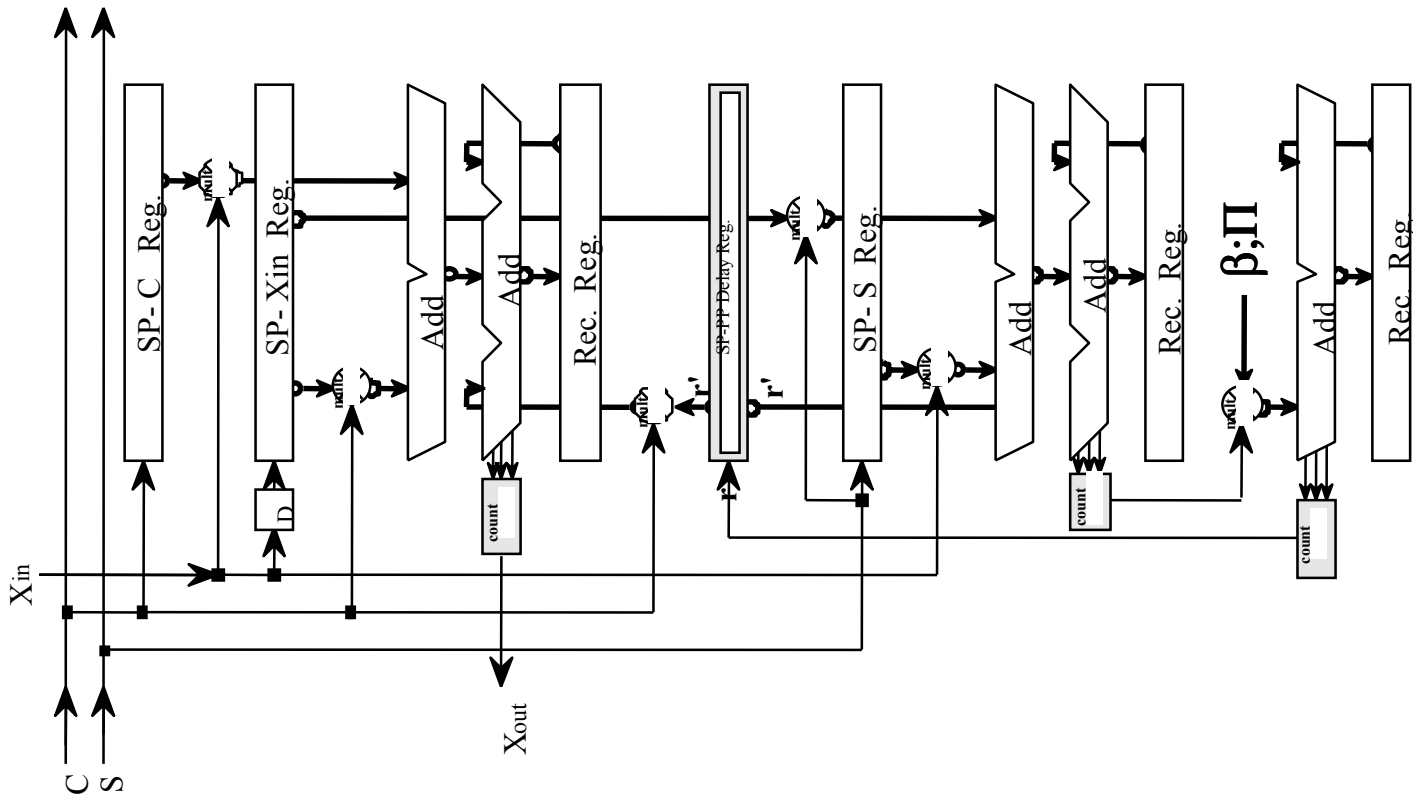


Règle 1 sur 1 & 2 puis 1 & 9
règle 2 sur 5,6 & 7 puis 6,8 & 9
gain de 21%

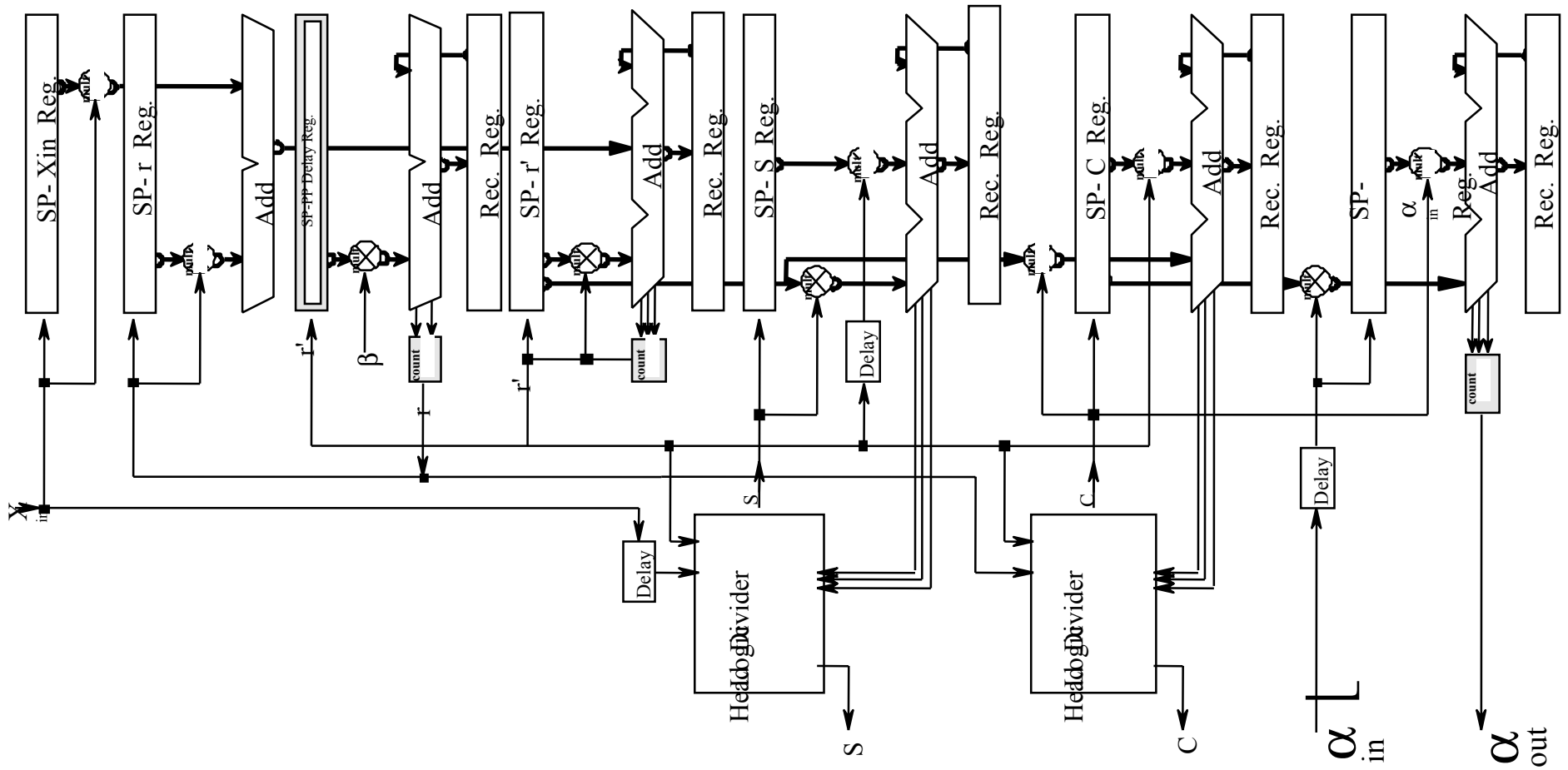


Calcul en ligne 54

Cellule carrée



Cellule ronde

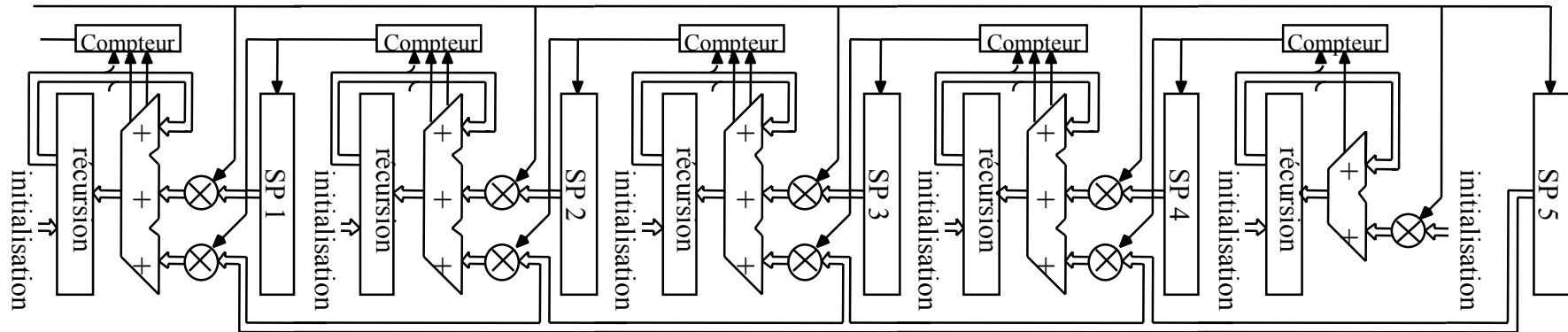


Calcul en ligne 56

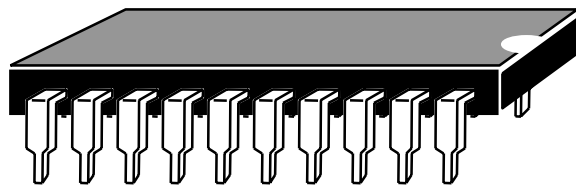
Polynôme en ligne

$$e^X = \sum_{i=0}^n \frac{X^i}{i!} \text{ en-ligne}$$

application des règles: gain 19%



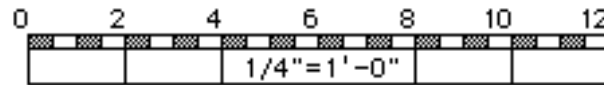
$$a_0 + X * (a_1 + X * (a_2 + X * (a_3 + X * (a_4 + X * a_5)))))$$



Polynôme en ligne (2)

$$e^X = \sum_{i=0}^n \frac{X^i}{i!} \text{ en-ligne}$$

Règle : Si une constante est à ajouter à la sortie d'un opérateur de type 3 ou à l'entrée d'un opérateur de type 4 alors son coût est nul (initialisation du registre de récursion) sa latence d'addition est nulle

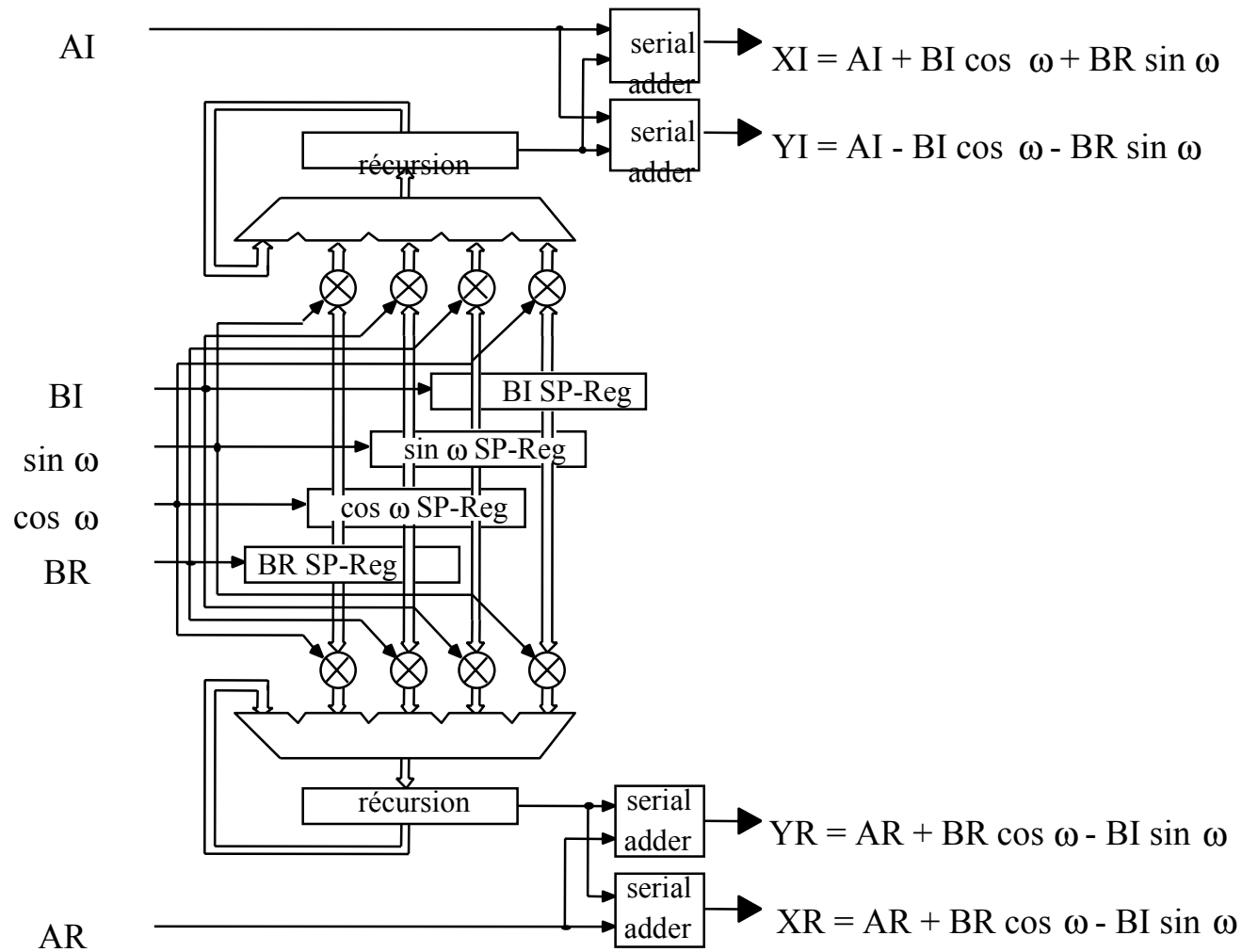


$$a_0 + \underbrace{x * (a_1 + x * (a_2 + x * (a_3 + x * (a_4 + x * a_5))))}_{\text{latence 3}}$$

Diagram illustrating the latency of the nested multiplication expression. The expression is $a_0 + x * (a_1 + x * (a_2 + x * (a_3 + x * (a_4 + x * a_5))))$. The latency of each multiplication step is 3, as indicated by the arrows and labels below the expression.

Latence indépendante du polynôme si $\exists k \text{ tq. } \forall n \geq k \frac{a_{n+1}X}{a_n} \leq 2^{-3}$

Papillon FFT en ligne



Références

- " *Design of an on-line Euclidean Processor* "
R. Bouraoui, A. Guyot and G. Walker
International Conference on Microelectronics 1992 (ICM'92), Monastir, Tunisia, Décembre 1992
- " *On-line approximation of real functions using polynomials* "
A. Skaf, J.C. Bajard*, A. Guyot and J.M. Muller* (* LIP-ENS Lyon)
International Conference on Microelectronics 1992 (ICM'92), Monastir, Tunisia, Décembre 1992
- " *Design of an on-line Euclidean processor* "
R. Bouraoui, A. Guyot and G. Walker
6th International Conference on VLSI design, Bombay, India, Janvier 1993
- " *On-line operator for Euclidean distance* "
R. Bouraoui, A. Guyot and G. Walker
EDAC-EUROASIC Conference, Paris, France, 22-25 Février 1993
- " *A VLSI Circuit for on-line polynomial computing: application to exponential, trigonometric and hyperbolic functions* "
A. Skaf, J.C. Bajard*, A. Guyot and J.M. Muller* (* LIP-ENS Lyon)
VLSI 93, Grenoble, France, Septembre 1993
- " *VLSI design of on-line add/multiply algorithms* "
A. Skaf and A. Guyot
ICCD 93, Cambridge, Massasusett, USA, Octobre 1993

" *A VLSI implementation of Parallel Fast Fourier Transform* "

A. Vacher, M. Benkhebbab, A. Guyot, T. Rousseau and A. Skaf

EDAC (European Design Automation Conference) , Paris, Février-Mars 1994

" *Error-Speed trade-off for FFT VLSI* "

A. Vacher and A. Guyot

26th IEEE Southeastern Symposium on System Theory, Athens, Ohio, Mars 1994

" *A VLSI implementation of Fast Fourier Transform for Large Sample Number* "

A. Vacher and A. Guyot

International Symposium on Signal Processing and Neural Network, Lille, Avril 1994

" *Design for testability of an on-line multiplier* "

H. Bederr*, M. Nicolaïdis* and A. Guyot (* Reliable Integrated System)

VLSI Test Symposium, Cherry Hill, New Jersey, Avril 1994

" *SAGA: The first general purpose on-line arithmetic co-processor* "

A. Skaf and A. Guyot

8 th International Conference on VLSI design (VLSI Design 95) New Delhi, India, Janvier 1995

" *On-line Hardware Implementation for Complex Exponential and Logarithm* "

A. Skaf, J.M. Muller* and A. Guyot (* LIP/ENSL Lyon)

20th European Solid-State CIRcuits Conference (ESSCIRC), Ulm, Germany, Septembre 1994