

CALCUL EFFICACE DE COEFFICIENTS DE SÉRIES

FRÉDÉRIC CHYZAK, INRIA-ROCQUENCOURT

Thématique : Algorithmique et combinatoire

Institution : INRIA-Rocquencourt

Lieu : Rocquencourt (France)

Équipe/projet : Algo

Directeur de stage : Frédéric Chyzak, frederic.chyzak((at))inria.fr

Directeur du laboratoire : Antoine Petit, antoine.petit((at))inria.fr

Présentation générale du domaine :

Le besoin de calculer un coefficient d'une série formelle donnée se rencontre de manière récurrente en combinatoire. En effet, dans bien des cas, le dénombrement d'objets soumis à certaines contraintes structurelles se ramène à l'extraction d'un coefficient d'une série. Par exemple, le nombre de graphes sur n sommets tels que de tout sommet partent exactement 2 arêtes (sans orientation) est égal à $n!$ fois le coefficient de z^n dans le développement en série à l'origine de $(1 - z)^{-1/2} \exp(-z/2 - z^2/4)$. Des contextes plus élaborés font intervenir des dénombrements selon plusieurs paramètres et des séries en plusieurs variables. Il s'agit alors d'extraire le coefficient d'un monôme en plusieurs variables. Ainsi par exemple, le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en k parts est égal à $n!$ fois le coefficient de $w^k z^n$ dans le développement en série à l'origine de $\exp(w(e^z - 1))$.

Ce stage s'intéresse à des algorithmes rapides pour l'extraction de tels coefficients de classes particulières importantes de séries.

Objectifs du stage :

Dans les cas favorables, les coefficients de la série de dénombrement sont liés par un jeu de récurrences qui permettent de les calculer tous de proche en proche. Néanmoins, le calcul naïf du coefficient d'indice (N_1, \dots, N_r) revient à calculer d'abord essentiellement tous les coefficients d'indices (n_1, \dots, n_r) pour $n_1 + \dots + n_r < N = N_1 + \dots + N_r$. Le calcul d'un unique coefficient requiert donc un nombre d'opérations de l'ordre de N^r , ce qui rend rapidement les calculs impraticables.

Dans deux articles récents (références ci-dessous), Massazza et Radicioni ont donné deux algorithmes très semblables pour calculer un coefficient unique en un nombre d'opérations de l'ordre de N pour deux classes de séries : les séries qui proviennent de fractions rationnelles et les séries qui vérifient un système d'équations différentielles linéaires. Le premier objectif du stage est d'implanter ces algorithmes et de les confronter à des exemples d'application.

Si le temps le permet, on cherchera ensuite à accélérer encore ces algorithmes, des techniques classiques semblant se prêter à la situation.

Bibliographie :

- On computing the coefficients of rational formal series. (2004). In : *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Vancouver, 2004*.
- On computing the coefficients of bivariate holonomic formal series. *Theoretical Computer Science* 346 (2005), no. 2-3, 418–438.

Compétences demandées :

Le stagiaire devra avoir le goût de la programmation d'algorithmes sur des données mathématiques. Une connaissance minimale d'un système de calcul formel généraliste, si possible de Magma ou de Maple, sera un plus.