Introduction au Calcul formel

Algorithmes et complexité

Intégration symbolique : le cas liouvillien

Frédéric Chyzak

frederic.chyzak@inria.fr

http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Frederic.Chyzak/

Intégration symbolique et classes de fonctions

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + K \qquad \in \mathbb{C}(x)$$

$$\int 2xe^{-x^2}\,dx = -e^{-x^2} + K \qquad \in \mathbb{C}(x, e^{x^2})$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + K$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln\left(1+e^x\right) + K$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+e^x} = \frac{x^2}{2} - x\ln\left(1+e^x\right) - \mathrm{Li}_2\left(-e^x\right) + K$$

$$\int e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,x}{2} + K$$

Intégration en « fonctions élémentaires » (ou liouvilliennes)

Une primitive de

$$\frac{x\left(\left(x^2e^{2x^2}-\ln^2(x+1)\right)^2+2xe^{3x^2}\left(x-(2x^2+1)(x+1)\ln(x+1)\right)\right)}{(x+1)\left(\ln^2(x+1)-x^2e^{2x^2}\right)^2}$$

est

$$x-\ln(x+1)+\frac{xe^{x^2}\ln(x+1)}{x^2e^{2x^2}-\ln(x+1)^2}$$
$$+1/2\ln\left(\ln(x+1)+xe^{x^2}\right)-1/2\ln\left(\ln(x+1)-xe^{x^2}\right).$$

Dérivations

Définition. Une *dérivation* δ sur un anneau A est une application qui vérifie $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ et $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ pour tous éléments a et b de A.

La formule sur le produit n'est autre que la règle de Leibniz.

Définition. Une *constante* $c \in A$ est un élément annulé par δ.

Les constantes forment un anneau C qui contient les entiers.

Exemple. La dérivation usuelle $P \mapsto P'$ sur l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X]$. ($C = \mathbb{C}$.)
Exemple. L'opérateur d'Euler $\theta : P \mapsto XP'$ sur $\mathbb{C}[X]$.

Corps différentiels et extensions

Définition. Un *corps différentiel* est un corps (commutatif) muni d'une dérivation.

En particulier : $\delta\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{\delta(a)}{a^2}$.

Définition. Un corps différentiel (L, δ_L) est une *extension du corps différentiel* (K, δ_K) si L est une extension du corps K et si $\delta_L|_K = \delta_K$.

Exemple. Le corps différentiel $\mathbb{C}(X)$ où $X' = 1$ admet l'extension différentielle $\mathbb{C}(X, Y)$ où $Y' = Y$. (Y représente l'exponentielle.)

Extensions liouvilliennes

Définition. Un élément θ d'une extension différentielle L de K est

- *algébrique* sur K s'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ tel que $P(\theta) = 0$ dans L ;
- *transcendant* sur K s'il n'est pas algébrique sur K ;
- *logarithmique* sur K s'il existe $u \in K$ tel que $\theta' = u'/u$;
- *exponentiel* sur K s'il existe $u \in K$ tel que $\theta'/\theta = u'$.

Définition. Une extension différentielle L de K est *liouvillienne* s'il existe une tour d'extensions $F_i = F_{i-1}(\theta_i)$, avec θ_i algébrique, logarithmique ou exponentiel sur F_{i-1} et $K = F_0$, $L = F_n$.

Non minimalité des extensions

Pour représenter $\exp(x) + \exp(2x) + \exp(x/2)$, on pourrait introduire $K = \mathbb{Q}(x)$ puis trois extension exponentielles par

$$\theta_1'/\theta_1 = x', \qquad \theta_2'/\theta_2 = (2x)', \qquad \theta_3'/\theta_3 = (x/2)'$$

pour considérer $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \in L = K(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

Par les identifications $\theta_1 = \exp(x)$, $\theta_2 = \exp(2x)$, $\theta_3 = \exp(x/2)$:

- θ_2 est (aussi) algébrique sur $K(\theta_1)$ car $\theta_2 = \theta_1^2$;
- θ_3 est (aussi) algébrique sur $K(\theta_1, \theta_2) = K(\theta_1)$ car $\theta_3^2 = \theta_2$;
- et donc $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_3 + \theta_3^2 + \theta_3^4 \in L = K(\theta_3)$.

Autre exemple : $\exp\big(\ln(x)/2\big) = x^{1/2}$.

Extensions monomiales

Définition. Un élément θ d'une extension L de K est *monomial* s'il est logarithmique ou exponentiel sur K, simultanément transcendant sur K et si $K(\theta)$ n'a pas plus de constantes que K.
Dans ce cas, $K(\theta)$ est une *extension monomiale* de K.

Théorème (de structure, Risch)**.** *Soient* $K = C(x)$*, pour* $i \leq n$*,* $F_i = K(\theta_1, \ldots, \theta_i)$*, et* $L = F_n$ *ayant* C *comme corps de constantes. Supposons qu'en outre chaque* θ_i *est au choix :*

- *algébrique sur* F_{i-1} *;*
- *le logarithme* $w_i = \ln u_i$ *d'un élément de* F_{i-1} *;*
- *l'exponentielle* $u_i = \exp w_i$ *d'un élément de* F_{i-1}*.*

Alors :

- *le logarithme* $\ln h$ *d'un élément* $h \in L \setminus C$ *est monomial sur* L *si et seulement si aucun produit de la forme*

$$h^k \prod_j u_j^{k_j}$$

n'est dans C *pour* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *et des* $k_j \in \mathbb{Z}$ *;*

- *l'exponentielle* $\exp h$ *d'un élément* $h \in L \setminus C$ *est monomiale sur* L *si et seulement si aucune combinaison linéaire de la forme*

$$kh + \sum_j k_j w_j$$

n'est dans C *pour* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *et des* $k_j \in \mathbb{Z}$.

Exemple. $\exp(x^2)$ est monomial sur $L = K = C(x)$.

Exemple. $\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ n'est pas monomial sur $L = C\left(x, \sqrt{x^2+1}, \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\right)$.

Intégration des fonctions liouvilliennes

Pour une fonction f élément d'une extension liouvillienne

$$L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)(x, \theta_1, \ldots, \theta_n)$$

de $K = \mathbb{Q}(x)$, avec des constantes α_i algébriques sur $\mathbb{Q}$, il s'agit :

1. de déterminer une nouvelle extension liouvillienne

   $$L' = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+h})(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n+m})$$

   nécessaire pour pouvoir écrire une primitive $g = \int f$;
2. d'expliciter g ou de prouver qu'il n'existe pas de telle fonction.

Nécessité de comprendre le comportement de la dérivation dans une extension liouvillienne, en commençant par une unique extension.

Dérivation des polynômes logarithmiques

Théorème. *Soit K un corps différentiel, C son corps de constantes et θ monomial et logarithmique sur K, avec $\theta' = u'/u$ pour $u \in K$. Alors pour tout polynôme non constant $a \in K[X]$ de coefficient dominant c :*

1. $a(\theta)' \in K[\theta]$;
2. *si* $c \in C$, *alors* $\deg\big(a(\theta)'\big) = \deg\big(a(\theta)\big) - 1$;
3. *si* $c \notin C$, *alors* $\deg\big(a(\theta)'\big) = \deg\big(a(\theta)\big)$.

Preuve. Écrire $a = c_d X^d + \cdots + c_0$, avec $c_d \neq 0$, puis dériver :

$$a(\theta)' = c_d' \theta^d + (d c_d \theta' + c_{d-1}') \theta^{d-1} + \cdots \in K[\theta].$$

Si $c_d' = d c_d \theta' + c_{d-1}' = 0$, alors $d c_d \theta + c_{d-1} \in C$, d'où $\theta \in K$. $\square$

Dérivation des polynômes exponentiels

Théorème. *Soit K un corps différentiel, C son corps de constantes et θ monomial et exponentiel sur K, avec $\theta'/\theta = u'$ pour $u \in K$. Alors pour tout polynôme non constant $a \in K[X]$:*

1. *pour tout $h \in K$ et $n \in \mathbb{Z}$ avec $nh \neq 0$, on a $(h\theta^n)' = \bar{h}\theta^n$ pour un $\bar{h} \in K$ non nul ;*
2. *$a(\theta)' \in K[\theta]$ avec $\deg\big(a(\theta)'\big) = \deg\big(a(\theta)\big)$;*
3. *$a(\theta)$ divise $a(\theta)'$ si et seulement si $a = hX^n$ pour $h \in K$.*

Preuve. $(h\theta^n)' \neq 0$, donc $h'\theta^n + nh\theta^{n-1}\theta' = (h' + nhu')\theta^n = \bar{h}\theta^n \neq 0$. Si $a = h_nX^n + h_mX^m + \cdots$ avec $a(\theta)$ qui divise $a(\theta)'$, on montre $(h_n/h_m)\theta^{n-m} \in C$, donc que θ n'est pas transcendant. $\square$

Dérivation des fonctions algébriques

Théorème. *Soit K un corps différentiel et θ algébrique sur K, de polynôme minimal $a = X^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$. Alors :*

$$\theta' = -\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i' \theta^i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (i+1) a_{i+1} \theta^i} \in K(\theta) = K[\theta].$$

Preuve. Écrire $a(\theta) = 0$, dériver et isoler θ'. □

Remarque importante : l'inversion modulo un polynôme se fait par l'algorithme d'Euclide étendu (recherche d'une relation de Bézout).

Principe de Liouville

Théorème. *Soit K un corps différentiel, C son corps de constantes. Étant donnée $f \in K$, on suppose qu'une primitive g existe dans une extension liouvillienne L de K de même corps de constantes. Alors il existe des v_i dans K et des constantes c_i telles que*

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i},$$

ou en autre termes, telles que

$$g = \int f = v_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln v_i.$$

Preuve (Résumé de ce qui va suivre). Récurrence sur le nombre d'extensions élémentaires nécessaires pour représenter la primitive : cas $K = L$ trivial, sinon :

Par les trois théorèmes qui précèdent sur la dérivation :

- Si g faisait intervenir une exponentielle monomiale, la dérivation ne pourrait la faire disparaître dans f.
- Si g fait intervenir un logarithmique monomial, la dérivation ne peut le faire disparaître que s'il apparaît sans exposant et avec un coefficient constant.
- Si g fait intervenir une algébrique, alors il est possible de rexprimer l'intégrale sans elle.

$\square$

Preuve par récurrence, cas monomial

Si $L = K(\theta)(\theta_1, \dots, \theta_n)$ pour θ monomial sur K, on utilise l'hypothèse de récurrence sur f vue dans $K(\theta)$:

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i} \qquad \text{pour} \qquad v_i \in K(\theta),\ c_i \in C \setminus \{0\}.$$

Sans perte de généralité, les v_i sont deux à deux distincts, avec soit $v_i \in K$, soit v_i irréductible dans $K[\theta]$.

On décompose v_0 en éléments simples dans $K(\theta)$:

$$v_0 = \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{i,j}(\theta)}{b_i(\theta)^j} \quad \text{pour des } b_i \text{ irréductibles unitaires.}$$

Par dérivation :

$$f = a_0(\theta)' + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a_{i,j}(\theta)'}{b_i(\theta)^j} - \frac{j a_{i,j}(\theta) b_i(\theta)'}{b_i(\theta)^{j+1}} \right) + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i} \in K.$$

- Si θ est logarithmique avec $\theta' = u'/u$ pour $u \in K$:

1. $b_i(\theta)$ ne peut diviser $b_i(\theta)'$, donc la somme double disparaît ;
2. la somme simple se réduit aux $v_i \in K$;
3. comme $a_0(\theta)'$ ne peut pas dépendre de θ,

$$a_0(\theta) = c\theta + v \quad \text{pour} \quad c \in C,\ v \in K\ ;$$

4. finalement,

$$f = v' + c\frac{u'}{u} + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}, \qquad u, v, v_i \in K.$$

- Si θ est exponentiel avec $\theta'/\theta = u'$:

1. si $b_i(\theta)$ divise $b_i(\theta)'$, c'est un monôme et donc $b_i(\theta) = \theta$; v_0 se réduit donc à une somme simple
$$v_0 = \sum_{j=-k}^{\ell} h_j \theta^j \ ;$$
2. seuls $v_i \in K$ et $v_i = \theta$ sont donc possibles, mais $c\theta'/\theta = (cu)'$ s'intègre à v_0' sans perte de généralité : restent les $v_i \in K$;
3. $(h_j\theta^j)' = \bar{h}_j\theta^j$ avec $\bar{h}_j \neq 0$ dès que $h_j \neq 0$, d'où en réalité $v_0 = h_0 \in K$;
4. finalement,
$$f = h_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}, \qquad h_0, v_i \in K.$$

Preuve par récurrence, cas algébrique

Si $L = K(\theta)(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ pour θ algébrique sur K, on utilise l'hypothèse de récurrence sur f vue dans $K(\theta) = K[\theta]$:

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i} \qquad \text{pour} \qquad v_i \in K(\theta),\ c_i \in C \setminus \{0\}.$$

Si le polynôme minimal de θ a degré $d+1 > 1$, il existe des polynômes V_i de degré au plus d tels que $v_i = V_i(\theta)$.

Soient $\theta^{(0)} = \theta$, $\theta^{(1)}$, ..., $\theta^{(d)}$ les $d+1$ conjugués de θ : pour chaque j,

$$f = V_0\big(\theta^{(j)}\big)' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{V_i\big(\theta^{(j)}\big)'}{V_i\big(\theta^{(j)}\big)}.$$

En moyennant par la conjugaison (prise de “traces”) :

$$f = w_0' + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{d+1} \frac{w_i'}{w_i},$$

où

$$w_0 = \frac{V_0\bigl(\theta^{(0)}\bigr) + \cdots + V_0\bigl(\theta^{(d)}\bigr)}{d+1},$$
$$w_i = V_i\bigl(\theta^{(0)}\bigr) \cdots V_i\bigl(\theta^{(d)}\bigr), \qquad 1 \leq i \leq d.$$

Les w_i sont symmétriques en les $\theta^{(j)}$, donc sont dans K.

Simplification des extensions

On vérifie aisément par dérivation :

$$F = \int \frac{2x^3 - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} e^{x^2}\, dx = \frac{e^{x^2 + \ln(x)/2}}{2\big(\sqrt{x} - 1\big)} + \frac{e^{x^2 + \ln(x)/2}}{2\big(\sqrt{x} + 1\big)}.$$

Puis on tente plusieurs voies de simplification :

$$F = \frac{\sqrt{x}e^{x^2 + \ln(x)/2}}{x - 1} \qquad \text{(échec) ;}$$

$$F = \frac{e^{x^2} e^{\ln(x)/2}}{2\big(\sqrt{x} - 1\big)} + \frac{e^{x^2} e^{\ln(x)/2}}{2\big(\sqrt{x} + 1\big)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}e^{x^2}}{2\big(\sqrt{x} - 1\big)} + \frac{\sqrt{x}e^{x^2}}{2\big(\sqrt{x} + 1\big)} = \frac{xe^{x^2}}{x - 1} \qquad \text{(réussite).}$$

Algorithme de Risch : cadre monomial

On se restreint à une tour d'extensions monomiales $F_i = F_{i-1}(\theta_i)$ avec $F_0 = K = C(x)$ et $F_n = L$. On note $\theta = \theta_n$ et $F = F_{n-1}$.

Algorithme récursif : pour intégrer $f \in F_i$, recours à intégrations dans F_{i-1}.

En réalité, le corps des constantes $C \subset \bar{\mathbb{Q}}$ sera élargi dynamiquement au gré des besoins.

On sépare deux parties « polynomiale » et « rationnelle » par :

$$f \in L = F(\theta) \implies f = \frac{p(\theta)}{q(\theta)} = s(\theta) + \frac{r(\theta)}{q(\theta)},$$

pour p, q, r et s dans $F[X]$, avec q unitaire, premier avec p et $\deg r < \deg q$.

Polynômes sans carrés

Lemme. *Soit θ monomiale sur F. Soit $a \in F[X]$ avec $a(0) \neq 0$ dans le cas exponentiel. Si a et $\frac{da}{dX}$ ont un p. g. c. d. égal à 1 dans $F[X]$ (a est « sans facteur carré »), alors $a(\theta)$ et*

$$a(\theta)' = \frac{da}{dX}(\theta)\theta' + a'(\theta)$$

ont un p. g. c. d. égal à 1 dans $F[\theta]$.

Par contre, dans le cas exponentiel $\theta \wedge \theta' = \theta \neq 1$. On modifie en conséquence la décomposition

$$f \in L = F(\theta) \implies f = \frac{p(\theta)}{q(\theta)} = s(\theta) + \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$$

pour avoir $q(0) \neq 0$ et $s \in F[X, X^{-1}]$.

Méthode de Hermite pour la partie rationnelle

Décomposition « sans carré » (dans $F[X]$) :

$$\frac{r}{q} = \frac{r}{q_1^1 \cdots q_k^k} = \sum_{1\leq j\leq i\leq k} \frac{r_{i,j}}{q_i^j} \qquad \text{avec} \qquad \deg r_{i,j} < \deg q_i,$$

pour des q_i deux à deux premiers entre eux et sans facteur carré.

Comme q_i est sans facteur carré dans $F[X]$, $q_i(\theta)$ et $q_i(\theta)'$ ont un p. g. c. d. égal à 1 dans $F[\theta]$, donc il existe une relation de Bézout

$$r_{i,j}(\theta) = s(\theta)q_i(\theta) + t(\theta)q_i(\theta)'.$$

Remarque importante : se calcule par l'algorithme d'Euclide étendu.

Après intégration par parties :

$$\int \frac{r_{i,j}(\theta)}{q_i(\theta)^j} = \int \frac{s(\theta) + t(\theta)'/(j-1)}{q_i(\theta)^{j-1}} - \frac{t(\theta)/(j-1)}{q_i(\theta)^{j-1}}.$$

On itère le procédé et obtient :

$$\int \frac{r(\theta)}{q(\theta)} = \frac{c(\theta)}{d(\theta)} + \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$$

avec $\deg a < \deg b$, $\deg c < \deg d$, $q = bd$ et où d est le p. g. c. d. de q et de sa dérivée en θ.

(Ici, la méthode d'Horowitz du cas $\mathbb{C}(\theta)$ ne suffit pas.)

Le cas logarithmique, explication

Pour $\deg a < \deg b$ et b sans carré, supposons

$$\int \frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{m} c_i \ln v_i \qquad \text{où} \qquad c_i \in C \quad \text{et} \quad b = v_1 \cdots v_m$$

pour des v_i irréductibles et deux à deux premiers entre eux.

Alors

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i},$$

d'où

$$a = c_1 v_1' v_2 \cdots v_m + \left(\sum_{i=2}^{m} c_i v_i' \right) b.$$

Ainsi, v_1 divise $a - c_1 v_1' v_2 \cdots v_m$, et donc $a - c_1 b'$.

Méthode de Rothstein–Trager : cas logarithmique

Théorème. *Considérons le résultant* $R = \mathrm{res}_\theta\big(a(\theta) - X b(\theta)', b(\theta)\big)$ *et* $\bar{R}$ *son multiple unitaire dans* $F[X]$*. Alors :*

1. $\displaystyle\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ *est liouvillienne si et seulement si* $\bar{R} \in C[X]$ *;*
2. *dans ce cas, soient* c_1*, …,* c_m *les racines distinctes de* $\bar{R}$ *et*
$$v_i(\theta) = \text{p. g. c. d.}\big(a(\theta) - c_i b(\theta)', b(\theta)\big) \in F(c_1, \ldots, c_m)[\theta] \ ;$$
on a
$$\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \sum_{i=1}^{m} c_i \ln\big(v_i(\theta)\big) \ ;$$
3. *l'extension des constantes qui précède est minimale.*

Exemple : la grosse intégrale de l'introduction

Après avoir posé $\theta_1 = e^{x^2}$ et $\theta_2 = \ln(x+1)$, on a à intégrer

$$f = \frac{x\left(\left(x^2\theta_1^2 - \theta_2^2\right)^2 + 2x\theta_1^3\left(x - (2x^2+1)(x+1)\theta_2\right)\right)}{(x+1)\left(\theta_2^2 - x^2\theta_1^2\right)^2}$$

qui vaut

$$\frac{x}{x+1} + \frac{\frac{2x^2}{x+1}\theta_1^3\big(x - (2x^2+1)(x+1)\theta_2\big)}{(\theta_2^2 - x^2\theta_1^2)^2} := p(\theta_2) + \frac{r_{2,2}(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2}.$$

Partie polynomiale p_2 facile, de primitive $x - \ln(x+1) = x - \theta_1$.

Méthode de Hermite : on résoud

$$r_{2,2}(\theta_2) = s(\theta_2)\left(\theta_2^2 - x^2\theta_1^2\right) + t(\theta_2)\left(\frac{2\theta_2}{x+1} - 2x(2x^2+1)\theta_1^2\right)$$

pour trouver

$$s(\theta_2) = \frac{-2x\theta_1}{x+1}, \qquad t(\theta_2) = x\theta_1\theta_2.$$

Il vient

$$\int f = x - \theta_1 - \frac{x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \int \frac{(2x^2+1)\theta_1\theta_2 - \frac{x}{x+1}\theta_1}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2}.$$

Méthode de Rothstein–Trager sur la dernière intégrale :

$$\begin{aligned}
a(\theta_2) &= (2x^2+1)\theta_1\theta_2 - \frac{x}{x+1}\theta_1,\\
b(\theta_2) &= \theta_2^2 - x^2\theta_1^2,\\
b(\theta_2)' &= \frac{2}{x+1}\theta_2 - 2x(2x^2+1)\theta_1^2.
\end{aligned}$$

Le résultant $\operatorname{res}_\theta\big(a(\theta) - Xb(\theta)', b(\theta)\big)$ est proportionnel à $4X^2 - 1$.

Pour $\varepsilon^2 = 1$, on trouve

$$c_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad v_\varepsilon(\theta_2) = \text{p. g. c. d.}\big(a(\theta) - c_\varepsilon b(\theta)', b(\theta)\big) = \theta_2 + \varepsilon x\theta_1.$$

Finalement :

$$\int f = x - \theta_1 - \frac{x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \frac{1}{2}\ln(\theta_2 + x\theta_1) - \frac{1}{2}\ln(\theta_2 - x\theta_1).$$

Le cas exponentiel, explication

Pour v unitaire (ou même à coefficient dominant constant) :

$$\deg\bigl(v(\theta)'\bigr) = \begin{cases} \deg\bigl(v(\theta)\bigr) - 1 & \text{si } \theta \text{ logarithmique,} \\ \deg\bigl(v(\theta)\bigr) & \text{si } \theta \text{ exponentiel.} \end{cases}$$

Et même, dans le cas exponentiel,
$(\theta^d + \alpha\theta^{d-1} + \cdots)' = d\theta^{d-1}\theta' + \beta\theta^{d-2}\theta' + \cdots = d\theta^d u' + \gamma\theta^{d-1}u' + \cdots$.

En remplaçant $\ln\bigl(v(\theta)\bigr)$ par $\ln\bigl(v(\theta)\bigr) - (\deg v)u$, où $u' = \frac{\theta'}{\theta}$:

$$\Bigl(\ln\bigl(v(\theta)\bigr) - (\deg v)u\Bigr)' = \frac{v(\theta)' - (\deg v)u'v(\theta)}{v(\theta)} = \frac{\delta\theta^{(\deg v)-1} + \cdots}{v(\theta)}.$$

Méthode de Rothstein–Trager : cas exponentiel

Théorème. *Considérons le résultant* $R = \mathrm{res}_\theta\big(a(\theta) - Xb(\theta)', b(\theta)\big)$ *et* $\bar{R}$ *son multiple unitaire dans* $F[X]$. *Alors :*

1. $\displaystyle\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ *est liouvillienne si et seulement si* $\bar{R} \in C[X]$;
2. *dans ce cas, soient* $c_1, \ldots, c_m$ *les racines distinctes de* $\bar{R}$ *et*

$$v_i(\theta) = \text{p. g. c. d.}\big(a(\theta) - c_i b(\theta)', b(\theta)\big) \in F(c_1, \ldots, c_m)[\theta] \ ;$$

on a, en posant $u' = \theta'/\theta$,

$$\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \sum_{i=1}^{m} c_i \ln\big(v_i(\theta)\big) - \Big(\sum_{i=1}^{m} c_i \deg v_i\Big) u \ ;$$

3. *l'extension des constantes qui précède est minimale.*

Intégration de la partie polynomiale

Soit à intégrer :

- $p(\theta) = p_l \theta^l + \cdots + p_0$ dans le cas logarithmique, $\theta' = u'/u$;
- $p(\theta) = p_l \theta^l + \cdots + p_{-k} \theta^{-k}$ dans le cas exponentiel, $\theta'/\theta = u'$.

Par le principe de Liouville, si $\int p(\theta)$ est liouvillienne,

$$p(\theta) = v_0(\theta)' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i(\theta)'}{v_i(\theta)} \qquad \text{avec} \qquad c_i \in C,\ v_i \in F(\theta).$$

Comme pour le principe de Liouville, on obtient $v_0 \in F[\theta]$ dans le cas logarithmique, $v_0(\theta) \in F[\theta, \theta^{-1}]$ dans le cas exponentiel, et $v_i(\theta) \in F$.

Ainsi :

- $v_0(\theta) = q_{l+1} \theta^{l+1} + \cdots + q_0$ dans le cas logarithmique ;
- $v_0(\theta) = q_l \theta^l + \cdots + q_{-k} \theta^{-k}$ dans le cas exponentiel.

Mise en équations différentielles, cas logarithmique

À p_i donnés dans F, résoudre

$$\begin{aligned} 0 &= q'_{l+1}, \\ p_i &= (i+1)q_{i+1}\theta' + q'_i \qquad \text{pour } 2 \le i \le l, \\ p_0 &= q_1\theta' + q'_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \ln v_i\right)'. \end{aligned}$$

Quitte à étendre C et les constantes de F, on cherche : $c_i \in C$, $q_i \in F$, $q_{l+1} \in C$, $m \in \mathbb{N}$, $v_i \in F$.

(En termes plus savants : on passe de C à C_1 et de F à $C_1 \otimes_C F$.)

Résolution : ayant trouvé $q_{i+1} = d_{i+1} + b_{i+1}$ pour $d_{i+1} \in F$ déterminé et $b_{i+1} \in C$ à déterminer, on écrit

$$(i+1)b_{i+1}\theta' + q_i' = p_i - (i+1)d_{i+1}\theta'$$

et on calcule récursivement

$$(i+1)b_{i+1}\theta + q_i = \int \left(p_i - (i+1)d_{i+1}\frac{u'}{u}\right),$$

qui doit être liouvillienne, sous la forme $(c_i\theta + d_i) + b_i$ pour

- $c_i \in C$ qui fixe b_{i+1} à $c_i/(i+1)$,
- $d_i \in F$ déterminé,
- et $b_i \in C$ à déterminer.

Le cas final, $i = 0$, est moins contraint.

Mise en équations différentielles, cas exponentiel

À p_i donnés dans F, résoudre

$$p_i = q_i' + iu'q_i \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq l \text{ ou } -k \leq i \leq -1,$$

$$p_0 = q_0' + \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \ln v_i\right)'.$$

Quitte à étendre C et les constantes de F, on cherche : $c_i \in C$, $q_i \in F$, $q_{l+1} \in C$, $m \in \mathbb{N}$, $v_i \in F$.

(En termes plus savants : on passe de C à C_1 et de F à $C_1 \otimes_C F$.)

Résolution :

- on intégre récursivement p_0 pour déterminer q_0 et les v_i en vérifiant qu'on obtient une primitive liouvillienne ;
- l'intégration, à a et b donnés de F, de l'« équation de Risch »

$$y' + ay = b$$

  en l'inconnue $y \in F$ se fait par un (autre) algorithme de décision de Risch (et amélioré par d'autres).

Extensions algébriques, quelques pointeurs

- Algorithme de Trager pour l'intégration d'une fonction algébrique sur $\mathbb{C}(x)$: s'inspire de la méthode de Rothstein–Trager, mais demande de calculer une clôture intégrale.
- Extensions transcendantes suivie d'une extension algébrique : résolue complètement par Bronstein.
- Extension algébrique suivie d'une extension transcendante : demande de résoudre l'équation de Risch sur une extension algébrique.