

# Introduction au Calcul formel

## Algorithmes et complexité

Frédéric Chyzak et Éric Schost

`frederic.chyzak@inria.fr`

`http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Frederic.Chyzak/`

## Avertissement

Cette séance traite la sommation symbolique du point de vue “solutions de récurrences linéaires à coefficients polynomiaux”.

*Tout ce qui suit se transpose à l'intégration symbolique.*

À l'inverse, le point de vue “liouvillien” de l'algorithme de Risch se transpose à la sommation symbolique.

## Suites et sommes

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe une valeur à chaque entier  $n$ .

La série de terme général  $u_n$ , notée  $\sum_{k \geq 0} u_k$ , est la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des sommes partielles

$$U_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La série converge lorsque  $U_n$  a une limite  $S$ , notée alors  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ .

$U_n$  est une somme indéfinie de  $u_n$  ; elle vérifie  $U_n - U_{n-1} = u_n$ .

La somme  $S$  de la série est la somme définie des  $u_n$  sur  $\mathbb{N}$ .

## Sommation symbolique : sommes indéfinies

Si  $u_n$  est donné sous **forme close** (= dans une **classe** donnée) :

- **polynomiale**,  $u_n = P(n)$  pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,
- **rationnelle**,  $u_n = R(n)$  pour  $R \in \mathbb{C}(X)$ ,
- **hypergéométrique**,  $u_{n+1}/u_n = R(n)$  pour  $R \in \mathbb{C}(X)$ ,
- **polynomialement réursive**,

$$P_d(n)u_{n+d} + \cdots + P_0(n)u_n = 0 \quad \text{pour des } P_i \in \mathbb{C}[X],$$

- par des sommes emboîtées selon certaines contraintes (alembertienne, liouvillienne, etc),

déterminer s'il existe une **forme close**  $U_n$  telle que  $U_n - U_{n-1} = u_n$ .

*Exemple : sommation indéfinie hypergéométrique*

$$\sum_{k=0}^n \boxed{\frac{4^k}{\binom{2k}{k}}} = \frac{2(n+1)}{3} \boxed{\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}} + \frac{1}{3}.$$

$$b_{n,m} = \binom{n}{m} = \text{coefficient binomial} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\Rightarrow \frac{b_{n+1,m}}{b_{n,m}} = \frac{n+1}{n+1-m}, \quad \frac{b_{n,m+1}}{b_{n,m}} = \frac{n-m}{m+1}.$$

$$u_n = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1}.$$

*Exemple : sommation indéfinie polynomialement réursive*

$$\sum_{k=p+1}^n \boxed{\binom{k}{p} H_k} =$$

$$\frac{(n+1)^2}{(p+1)^2} \boxed{\binom{n}{p} H_n} - \frac{(n-p)(n-p+1)}{(p+1)^2} \boxed{\binom{n+1}{p} H_{n+1}}$$

$$= \binom{n}{p} \left( \frac{n+1}{p+1} H_n - \frac{n-p}{(p+1)^2} \right).$$

$$H_n = \text{nombre harmonique} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad u_n = \binom{n}{p} H_n$$

$$\Rightarrow (n+1-p)(n+2-p)u_{n+2} - (2n+3)(n+1-p)u_{n+1} + (n+1)^2 u_n = 0.$$

## Sommation symbolique : sommes définies

Constantes : difficile, peu de choses à dire (sur la sommation).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \quad \zeta(2p) \in \mathbb{Q} \pi^{2p}.$$

Sommes **paramétrées** : si  $u$  est donné sous **forme close** (**hypergéométrique**,  **$\partial$ -finie**), déterminer respectivement

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} \quad \text{ou} \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$$

sous **forme close**.

*Exemples : sommation définie hypergéométrique*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{2k}{k} \binom{4n-2k}{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \dots = \binom{2n}{n}^2.$$

*Exemple : sommation définie  $\partial$ -finie (1)*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \right)^3 = \sum_{k=0}^n \dots = n2^{3n-1} + 2^{3n} - 3n2^{n-2} \binom{2n}{n} \quad (\text{Calkin}).$$

$$v_{n,k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \Rightarrow \text{les } v_{n+i,k+j} \text{ se récrivent sur } (v_{n,k}, v_{n,k+1}) :$$

$$(k+2)v_{n,k+2} - (n+1)v_{n,k+1} + (n-k-1)v_{n,k} = 0,$$

$$(k+1)v_{n,k+1} + (n-k)v_{n+1,k} - (2n+1-k)v_{n,k} = 0.$$

$$u_{n,k} = v_{n,k}^3 \Rightarrow$$

les  $u_{n+i,k+j}$  se récrivent sur  $(u_{n,k}, u_{n+1,k}, u_{n,k+1}, u_{n,k+2})$ .

*Exemple : sommation définie  $\partial$ -finie (2)*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z)^2 = 1 \quad (\text{Neumann}).$$

$$J_k(z) = \text{fonctions de Bessel} = \left(\frac{z}{2}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^n}{n!(n+k)!} \Rightarrow$$

les  $J_{k+i}^{(j)}(z)$  se récrivent sur  $(J_k(z), J'_k(z))$  ou sur  $(J_k(z), J_{k+1}(z))$ :

$$z^2 J_k''(z) + z J_k'(z) + (z^2 - k^2) J_k(z) = 0, \quad z J_k'(z) + z J_{k+1}(z) - k J_k(z) = 0,$$

$$z J_{k+2}(z) - 2(k+1) J_{k+1}(z) + z J_k(z) = 0.$$

$$u_k(z) = J_k(z)^2 \Rightarrow$$

les  $u_{k+1}^{(j)}(z)$  se récrivent sur  $(u_k(z), u_{k+1}(z), u'_k(z))$ .

# Méthodes et algorithmes principaux

## 1. Suites hypergéométriques :

- Méthode de [Fasenmyer](#) pour les sommes définies
- Algorithme de [Gosper](#) pour les sommes indéfinies
- Algorithme de [Zeilberger](#) pour les sommes définies

## 2. Suites $\partial$ -finies :

- [Bases de Gröbner](#) pour les sommes indéfinies et définies
- Algorithmes de [Chyzak](#) pour les sommes indéfinies et définies

## 3. Sommes dans des tours de corps à différences :

- Algorithme de [Karr](#) pour les sommes indéfinies

## *Creative Telescoping*

Soit à évaluer la somme

$$U_n = \sum_{k=a}^b u_{n,k} \quad a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \quad b \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}.$$

Supposons que l'on détermine une relation de la forme

$$\eta_d(n)u_{n+d,k} + \cdots + \eta_0(n)u_{n,k} = v_{n,k+1} - v_{n,k}.$$

Alors, après **sommation sur  $k$  entre  $a$  et  $b$** , on trouve

$$\eta_d(n)U_{n+d} + \cdots + \eta_0(n)U_n = v_{n,b+1} - v_{n,a}.$$

Sommation à **bornes naturelles** : quand  $v_{n,a} = v_{n,b+1}$ .

# Suites hypergéométriques

Une suite  $f = (f_{n,k})$  est dite **hypergéométrique** si

$$\frac{f_{n-1,k}}{f_{n,k}} \in \mathbb{C}(n, k) \quad \text{et} \quad \frac{f_{n,k-1}}{f_{n,k}} \in \mathbb{C}(n, k).$$

Exemples : produits et quotients de factorielle et de coefficients binomiaux et multinomiaux ; factorielles montantes et descendantes.

## La méthode de Fasenmyer

ENTRÉE : terme hypergéométrique  $f_{n,k}$ .

SORTIE : récurrence linéaire sur  $f$  à coefficients polynomiaux ne faisant pas intervenir  $k$ .

MÉTHODE :

1. Pour un ensemble de décalages  $S$  donné, on cherche à résoudre

$$\sum_{(i,j) \in S} c_{i,j}(n) f_{n-i,k-j} = 0 ;$$

2. Après division par  $f_{n,k}$  et après avoir chassé les dénominateurs, on trouve des polynômes  $p_{i,j}$  tels que

$$\sum_{(i,j) \in S} c_{i,j}(n) p_{i,j}(n, k) = 0 ;$$

3. Égaler les coefficients des  $k^l$  à 0 et résoudre le système linéaire en les  $c_{i,j}$  ainsi obtenus ;

4. On obtient

$$\sum_{(i,j) \in S} c_{i,j}(n) f_{n-i,k} = g_{n,k} - g_{n,k-1}$$

pour un  $g$  adéquat ;

5. Après sommation en  $k$  et introduction de  $F_n = \sum_{k=a}^b f_{n,k}$ ,

$$\sum_{(i,j) \in S} c_{i,j}(n) F_{n-i} = g_{n,b} - g_{n,a-1}.$$

Améliorations : optimisation de  $S$  ; **multisommes** et dépendance polynomiale des  $c_{i,j}$  en  $k$ .

## Identité de Dixon

Sous la forme :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^3 = \begin{cases} (-1)^p \binom{3p}{p,p,p} & \text{si } n = 2p, \\ 0 & \text{si } n = 2p + 1. \end{cases}$$

Pour  $S = \{0, 1, 2, 3\}^2$ , la méthode de Fasenmyer renvoie (rapidement) un résultat positif, conduisant à la relation

$$3(3n - 2)(3n - 4)F_{n-2} + n^2 F_n = 0.$$

L'équation obtenue est :

$$\begin{aligned} & n^2(3n - 5)f_{n,k} + (9n^3 - 24n^2 + 17n - 4)f_{n-1,k-1} \\ & + (3n - 4)(21n^2 - 49n + 24)f_{n-2,k-1} + (3n - 4)(3n^2 - 7n + 3)f_{n-2,k-2} \\ & \quad + 3(3n - 2)(n - 2)^2 f_{n-3,k-1} - 3(3n - 2)(n - 2)^2 f_{n-3,k-2} \\ & + (3n - 2)(n - 2)^2 f_{n-3,k-3} + (-9n^3 + 24n^2 - 17n + 4)f_{n-1,k} \\ & + (3n - 4)(3n^2 - 7n + 3)f_{n-2,k} - (3n - 2)(n - 2)^2 f_{n-3,k} = 0. \end{aligned}$$

## Autres exemples typiques par cette méthode

$$\sum_{i,j} \binom{i+j}{i}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1) \binom{2n}{n}^2 \quad (\text{Andrews-Paule})$$

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} (-1)^{j+k} \binom{j+k}{k+l} \binom{r}{j} \binom{n}{k} \binom{s+n-j-k}{m-j} \\ = (-1)^l \binom{n+r}{n+l} \binom{s-r}{m-n-l} \end{aligned}$$

(Graham-Knuth-Patashnik)

$$\sum_{r,s} (-a)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \binom{n+s}{s} \binom{n+r}{r} \binom{2n-r-s}{n} = \sum_k \binom{n}{k}^4$$

(Petkovšek-Wilf-Zeilberger)

# Algorithme de Gosper

ENTRÉE : terme hypergéométrique  $f_k$ .

SORTIE : fraction rationnelle  $R(k)$  telle que  $Rf$  soit une somme indéfinie en  $k$  de  $f$ , ou une preuve qu'aucune telle  $R$  n'existe.

VISION SIMPLIFIÉE DE L'ALGORITHME : L'équation

$$f_k = R(k+1)f_{k+1} - R(k)f_k$$

en une fraction rationnelle  $R$  s'écrit encore

$$1 = R(k+1)\rho(k) - R(k),$$

équation qui se résout par l'algorithme de décision d'Abramov : si aucune  $R$  n'est trouvée, on a une preuve qu'aucune n'existe.

ALGORITHME ORIGINAL :

1. Calculer le rapport  $\rho(k) = f_{k+1}/f_k$  et le représenter sous la forme (unique)

$$\rho(k) = \frac{p(k+1)}{p(k)} \frac{q(k)}{r(k+1)}$$

de façon que  $\text{pgcd}(p, q) = \text{pgcd}(p, r) = \text{pgcd}(q(k), r(k+h)) = 1$  pour tout entier  $h > 0$ .

2. Le changement de variable  $R = rS/p$  ramène l'équation en la fraction rationnelle  $R$  en une équation en un polynôme  $S$  :

$$p(k) = q(k)S(k+1) - r(k)S(k).$$

3. Résoudre (des bornes sur le degré existent). Si un  $S$  est trouvé, renvoyer  $R = rS/p$  ; sinon, on a une preuve qu'aucune  $R$  n'existe.

## Exemple d'exécution de l'algorithme de Gosper

$$\sum_{k=0}^{n-1} \boxed{\frac{(-1)^k (4k+1) \binom{2k+1}{k}}{4^k (4k^2-1)}} = -\frac{2(n+1)}{4n+1} \boxed{\frac{(-1)^n (4n+1) \binom{2n+1}{n}}{4^n (4n^2-1)}} - 2.$$

Le sommant hypergéométrique est donné par :

$$\rho = -\frac{1}{2} \frac{(4k+5)(2k-1)}{(4k+1)(k+2)},$$
$$p(k) = 4k+1, \quad q(k) = \frac{1}{2} - k, \quad r(k) = k+2.$$

## Algorithme de Gosper paramétré

ENTRÉE : un terme hypergéométrique  $f_k$  et des fractions rationnelles  $s_0(k), \dots, s_m(k)$ .

SORTIE : une fraction rationnelle  $R(k)$  et des constantes  $\eta_0, \dots, \eta_m$  telles que  $Rf$  soit une **somme indéfinie** en  $k$  de

$$(\eta_0 s_0(k) + \dots + \eta_m s_m(k)) f_k,$$

ou une preuve qu'aucune telle  $R$  n'existe pour aucune famille  $\{\eta_i\}$ .

IDÉE DE L'ALGORITHME : Les **paramètres**  $\eta_i$  n'interviennent que de façon **linéaire** et **au second membre** de l'équation polynomiale en  $S(k)$ . Le calcul de  $S$  se résume à la résolution d'un système linéaire lors de laquelle on peut prendre en compte les inconnues additionnelles  $\eta_0, \dots, \eta_m$ .

# Algorithme de Zeilberger

ENTRÉE : terme hypergéométrique  $f_{n,k}$ .

SORTIE : fractions rationnelles  $\eta_0(n), \dots, \eta_d(n), \phi(n, k)$  pour  $d$  minimal telles que

$$\eta_d(n) f_{n+d,k} + \dots + \eta_0(n) f_{n,k} = \phi(n, k+1) f_{n,k+1} - \phi(n, k) f_{n,k}.$$

*Terminaison non garantie en général ; l'est dans le cas "holonome".*

*Critère explicite récent dû à Abramov.*

ALGORITHME : Calculer les fractions rationnelles  $s_i(n, k)$  telles que  $f_{n+i,k} = s_i(n, k) f_{n,k}$  et utiliser l'algorithme de Gosper paramétré.

## Exemple d'exécution de l'algorithme de Zeilberger

Les **polynômes orthogonaux** de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  s'expriment en termes de la **fonction hypergéométrique** de Gauss  ${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix} \middle| z\right)$  :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1 - x}{2}\right),$$

pour

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$$

où

$$(u)_k = u(u + 1) \cdots (u + k - 1).$$

L'algorithme fournit la **réurrence en  $n$**  sur  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ,

$$\begin{aligned} 0 = & 2(n+2)(n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n+2}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ & - \left( (2n+\alpha+\beta+2)_3 x + (2n+\alpha+\beta+3)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \right) P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ & + 2(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+4)P_n^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned}$$

Il fournirait aussi des relations de réurrence en  $\alpha$  ou en  $\beta$  (relations de contiguïté).

Le sommant est

$$f_k = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{(\alpha + 1)_k k!} \frac{(1 - x)^k}{2^k}.$$

Le rapport  $f_{k+1}/f_k$  est

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{(n - k)(n + \alpha + \beta + 1 + k)(-1 + x)}{(k + 1)(\alpha + 1 + k)}.$$

La récurrence paramétrée à résoudre en solutions rationnelles est

$$\begin{aligned}
 & (n + 2 - k)(n + 1 - k)(n - k)(n + 2 + \alpha + \beta) \\
 & \quad (n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1 + k)(-1 + x)R(k + 1) \\
 & - 2(k + 1)(\alpha + 1 + k)(n + \alpha + \beta + 1) \\
 & \quad (n + 1 - k)(n + 2 - k)(n + 2 + \alpha + \beta)R(k) \\
 & = 2\eta_0(k + 1)(\alpha + 1 + k)(n + \alpha + \beta + 1) \\
 & \quad (n + 1 - k)(n + 2 - k)(n + 2 + \alpha + \beta) \\
 & + 2\eta_1(n + \alpha + \beta + 1 + k)(\alpha + 1 + n)(k + 1) \\
 & \quad (\alpha + 1 + k)(n + 2 - k)(n + 2 + \alpha + \beta) \\
 & + 2\eta_2(\alpha + 2 + n)(\alpha + 1 + n)(n + \alpha + \beta + 2 + k) \\
 & \quad (n + \alpha + \beta + 1 + k)(k + 1)(\alpha + 1 + k).
 \end{aligned}$$

# Algorithme d'Abramov

ENTRÉE : récurrence linéaire de la forme

$a_d(k)f_{k+d} + \cdots + a_0(k)f_k = b(k)$  pour des polynômes  $a_i$  et  $b$ .

SORTIE : solutions rationnelles de la récurrence, ou une preuve qu'il n'en existe pas.

ALGORITHME :

1. calculer le plus grand entier positif  $N$  tel que  $a_0(k + N)$  et  $a_d(k - d)$  ont un p. g. c. d. non trivial ;
2. si aucun tel  $N$  n'existe, poser  $v = 1$ , sinon poser

$$v = \text{p. g. c. d.} \left( \prod_{i=0}^N a_0(k + i), \prod_{i=0}^N a_d(k - d - i) \right) ;$$

3. après avoir posé  $f_k = u(k)/v(k)$ , on est ramené à rechercher les **solutions polynomiales**  $u(k)$  d'une nouvelle équation de récurrence linéaire de même ordre  $d$  ;
4. on sait borner explicitement le degré d'une solution polynomiale, puis on résoud, par exemple par coefficients indéterminés.

Remarque : très souvent, il suffit d'injecter  $\lambda x^\delta$  dans une récurrence linéaire pour trouver le degré de ses solutions polynomiales.

## Retour à l'exemple des polynômes de Jacobi

Un multiple du dénominateur de toute solution sous forme réduite est

$$(n + 2 - k)(n + 1 - k).$$

La récurrence prend la nouvelle forme

$$\begin{aligned} & \left( -(n + 2 + \alpha + \beta)(n + \alpha + \beta + 1)(-1 + x)k^2 + \dots \right) S(k + 1) \\ & + \left( -2(n + 2 + \alpha + \beta)(n + \alpha + \beta + 1)k^2 + \dots \right) S(k) \\ & = (c_0 k^4 + \dots) \eta_0 + (c_1 k^4 + \dots) \eta_1 + (c_2 k^4 + \dots) \eta_2. \end{aligned}$$

Ainsi, toute solution  $S(k)$  est de degré au plus 2 en  $k$ .

Après résolution, on obtient  $P(n, k) = Q(n, k + 1) - Q(n, k)$  pour

$$\begin{aligned}
 P(n, k) &= 2(\beta + n + 1)(\alpha + 1 + n)(\alpha + 2n + 4 + \beta)u(n, k) \\
 &\quad - (3 + \alpha + \beta + 2n)(\alpha^2 + \alpha^2 x + 4\alpha x n + 2\alpha\beta x + 6\alpha x + 12x n \\
 &\quad \quad + \beta^2 x + 4x n \beta + 4x n^2 + 6\beta x + 8x - \beta^2)u(n + 1, k) \\
 &\quad \quad + 2(n + 2)(n + 2 + \alpha + \beta)(\alpha + 2 + 2n + \beta)u(n + 2, k), \\
 Q(n, k) &= -2k(3 + \alpha + \beta + 2n)(\alpha + 2 + 2n + \beta)(\alpha + 1 + n)(\alpha + k) \\
 &\quad (\alpha + 2n + 4 + \beta)u(n, k)/(n + 1 - k)/(n + 2 - k)/(n + \alpha + \beta + 1).
 \end{aligned}$$

D'où la récurrence annoncée par *creative telescoping*.

## Suites $\partial$ -finies

Généralisation des suites polynomialement récurrentes à un indice.

Un terme  $u_{n,k}$  est dit  $\partial$ -fini lorsque l'ensemble de ses décalés  $u_{n+i,k+j}$  engendre un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}(n, k)$ .

Un terme  $u_k(z)$  est dit  $\partial$ -fini lorsque l'ensemble de ses dérivées et décalés  $u_{k+j}^{(i)}(z)$  engendre un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}(k, z)$ .

*Exemple* : familles de polynômes orthogonaux classiques, fonctions de Bessel, fonctions hypergéométriques et généralisations, sommes indéfinies de suites hypergéométriques, etc, l'algèbre de ces familles.

## Algorithme de Gosper étendu

ENTRÉE : un espace vectoriel  $V$  de base  $(b_1(k), \dots, b_r(k))$  stable par décalage en  $k$  ; un terme  $\partial$ -fini  $f_k$  de  $V$ .

SORTIE : des fractions rationnelles  $\phi_1(k), \dots, \phi_r(k)$  telles que  $\phi_1 b_1 + \dots + \phi_r b_r$  soit une somme indéfinie en  $k$  de  $f$ , ou une preuve que de telles  $\phi_i$  n'existent pas.

ALGORITHME :

1. Poser  $F_k = \phi_1(k)b_1(k) + \dots + \phi_r(k)b_r(k)$  pour  $\phi_i \in \mathbb{C}(k)$ .
2. Extraire les coefficients de  $F_{k+1} - F_k - f_k$  sur les  $b_i$  et obtenir un système de relations de récurrences du premier ordre en les  $\phi_i$ .
3. Résoudre en les solutions rationnelles (**algorithme de décision**).
4. Si des  $\phi_i$  sont trouvées, les renvoyer ; sinon, on a une **preuve** que de telles  $\phi_i$  n'existent pas.

## Exemples typiques par cette méthode

$$\sum_{k=0}^n (\pm 1)^k (k + \alpha) C_k^{(\alpha)}(x)$$

$$= \frac{(\pm 1)^n}{2(1 \mp x)} \left( (n + 2\alpha) C_n^{(\alpha)}(x) \mp (n + 1) C_{n+1}^{(\alpha)}(x) \right)$$

$(C_k^{(\alpha)}(x)) = \text{polynômes ultrasphériques},$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\binom{m}{k}} H_k = \frac{(-1)^n}{\binom{m}{n}} \left( \frac{n+1}{m+2} H_n + \frac{m+1-n}{(m+2)^2} \right) - \frac{m+1}{(m+2)^2},$$

$$\sum_{k=1}^n H_k^3 = (n+1)H_n^3 - \frac{3}{2}(2n+1)H_n^2 + 3(2n+1)H_n + \frac{1}{2}H_n^{(2)} - 6n$$

$$(H_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}).$$

## Algorithme de Zeilberger étendu

ENTRÉE : un espace vectoriel  $V$  de base  $(b_1(n, k), \dots, b_r(n, k))$  stable par les décalages en  $n$  et  $k$  ; un terme  $\partial$ -fini  $f_{n,k}$  de  $V$ .

SORTIE : des fractions rationnelles  $\eta_0(n), \dots, \eta_d(n), \phi_1(n, k), \dots, \phi_r(n, k)$  pour  $d$  minimal telles que

$$\eta_d(n) f_{n+d,k} + \dots + \eta_0(n) f_{n,k} = g_{n,k+1} - g_{n,k},$$

pour

$$g_{n,k} = \phi_1(n, k) b_1(n, k) + \dots + \phi_r(n, k) b_r(n, k).$$

*Terminaison non garantie en général ; l'est dans le cas "holonome".*

ALGORITHME : Se ramener à une variante paramétrée de l'algorithme de Gosper étendu.

## Exemples typiques par cette méthode

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1/2}(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} dt$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^3 \quad (\text{van der Poorten})$$

$$\sum_{k=0}^n \left( \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \right)^3 = \frac{n}{2} 8^n + 8^n - \frac{3n}{4} 2^n \binom{2n}{n} \quad (\text{Calkin})$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n+1-k} \frac{l}{n+1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+l} = \binom{2n}{n} \quad (\text{Essam et Guttmann})$$

## Non minimalité des opérateurs calculés

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{pk}{n} = (-p)^n \quad (\text{ordre } p - 1 \text{ au lieu de } 1),$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{pk + 1} \binom{pk + 1}{k} \binom{p(n - k)}{n - k} = \binom{pn + 1}{n}$$

(ordre 2 au lieu de 1 pour  $p = 3$ ).

$$\eta_d(n)u_{n+d,k} + \cdots + \eta_0(n)u_{n,k} = v_{n,k+1} - v_{n,k}$$

L'existence de  $v$  est une contrainte sur  $d$  !

Cette relation ne tient pas compte du lieu de sommation !