TD 7 : Algorithmes de sommation hypergéométrique

Frédéric Chyzak

Le 30 novembre 2005

Notre objectif est d'implanter l'algorithme de Gosper pour la sommation hypergéométrique indéfinie, algorithme à la base de l'algorithme de Zeilberger pour la sommation hypergéométrique définie. Le sujet procède pas à pas, en introduisant petit à petit les algorithmes remplissant les sous-tâches nécessaires. Rapelons qu'en magma, on introduit un morphisme d'évaluation d'un anneau `P1` de polynômes de rang n dans un autre anneau `P2` de polynômes par

`h := hom< P1->P2 |` p_1`,`p_2`,...,`p_n `>;`,

où les p_i sont les valeurs désirées dans `P2` pour `h(P1.`i`)`. Par exemple, l'une des inclusions de

```
P1 := PolynomialRing(Q,1);
```

dans

```
P2 := PolynomialRing(Q,2);
```

s'obtient par

`h := hom< P1->P2 | P2.1 >;`.

1 Formes de Gosper–Petkovšek

Q1. Implanter une fonction qui retourne une séquence contenant toutes les racines entières positives ou nulles d'un polynôme d'une indéterminée donné en entrée.

Q2. Donner une fonction qui calcule l'ensemble des dispersions d'une paire (a, b) de polynômes, à savoir l'ensemble des entiers naturels h tels que $a(X)$ et $b(X - h)$ aient un p. g. c. d. non trivial. On pourra utiliser un résultant bien choisi.

Q3. La forme de Gosper–Petkovšek d'une paire de polynômes (p, q) est un triplet (a, b, c) de polynômes tels que

$$\frac{p(X)}{q(X)} = \frac{a(X)}{b(X)} \frac{c(X+1)}{c(X)},$$

et tels que a et c aient un p. g. c. d. trivial, de même que $b(X-1)$ et $c(X)$, ainsi que $a(X)$ et $b(X+h)$ pour tout entier naturel h. Un algorithme pour calculer une forme de Gosper–Petkovšek est le suivant. Partant de $(a,b,c)=(p,q,1)$, on détermine d'abord l'ensemble des dispersions h de (b,a). Puis, pour chaque h, on détermine le p. g. c. d. g de $a(X)$ et de $b(X+h)$, avant de diviser a par g et b par $g(X-h)$, et de multiplier c par $g(X-1)\cdots g(X-h)$. Écrire une fonction qui retourne les polynômes a, b, c donnant la forme de Gosper–Petkovšek d'une paire de polynômes (p,q).

2 Solutions polynomiales de récurrences

Q4. Une borne sur le degré d'une solution polynomiale de l'équation de récurrence $a(k)S(k+1)-b(k)S(k)=c(k)$ s'obtient comme suit. On introduit d'abord β comme le maximum de $\deg(a)-1$ et de $\deg(a-b)$. Si ce nombre est négatif, on prend α égal à 0, sinon, on détermine α comme l'opposé du rapport entre le coefficient de x^β dans $a+b$ et de $x^{\beta+1}$ dans a. Si ce rapport n'est pas entier ou n'est pas défini, on maintient α à 0. Enfin, le maximum de 0, α et de $\deg(c)-\beta$ est une borne sur le degré des solutions polynomiales. Écrire une fonction qui retourne cette borne.
Q5. Écrire une fonction qui, étant donné un triplet (a,b,c) de polynômes, calcule une base des solutions polynomiales de la récurrence de l'algorithme de Gosper, $a(k)S(k+1)-b(k)S(k)=c(k)$. On pourra introduire un anneau de polynômes en k à coefficients dans un anneau de polynômes en des variables jouant le rôle de coefficients indéterminés $c_0, \dots, c_N$, où N est une borne sur le degré, et y récrire la récurrence de Gosper avant de passer à de l'algèbre linéaire.

3 Sommation hypergéométrique

Q6. Réutiliser les fonctions des questions précédentes pour implanter l'algorithme de Gosper : partant de $f_{k+1}/f_k=p/q$, on calcule d'abord la forme de Gosper–Petkovšek de (q,p) (attention à l'ordre), puis les solutions polynomiales $S(k)$ de $a(k)S(k+1)-b(k-1)S(k)=c(k)$ (attention au décalage), avant de renvoyer $b(k+1)S(k)/c(k)$. On testera (au moins) sur les exemples suivants :

- $f_k=(-1)^k\binom{10}{k}$, qui donne le rapport $f_{k+1}/f_k=(k-10)/(k+1)$ et la somme indéfinie $-kf_k/10$;
- $f_k=\binom{10}{k}$, qui donne le rapport $f_{k+1}/f_k=(10-k)/(k+1)$ et n'a pas de somme indéfinie dans $\mathbb{Q}(k)f$;
- l'exemple du cours, $f_k=(-1)^k\binom{2k+1}{k}(4k+1)/4^k/(4k^2-1)$, qui donne le rapport $f_{k+1}/f_k=-(4k+5)(2k-1)/2/(4k+1)/(k+2)$ et la somme indéfinie $-2(k+1)f_k/(4k+1)$.

Q7. Question subsidiaire : généraliser à l'algorithme de Gosper paramétré et à l'algorithme de Zeilberger.