Géométrie et Synthèse d'images

Formation des images

François Sillion

2003

Formation des images

- ✓Transformations géométriques
- ✓De l'objet à l'image
- ✓Gestion de la visibilité
- ✓D'une image à l'autre

Transformations géométriques

- ✓Représentation vectorielle des points
  - Points attachés aux primitives graphiques
  - Sommets, centres,données volumiques…
- ✓Transformations sur ces données
  - Translation, rotation, changement d'échelle…
  - Projections :
    - Perspective, parallèle…
  - Notation unifiée ?

Coordonnées homogènes

- Outil géométrique très puissant :
  - Rend les transformations projectives linéaires
- Un point 2D devient un vecteur à 3 coordonnées :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Coordonnées homogènes

- Deux points sont égaux si et seulement si :

  $x'/w' = x/w$ et $y'/w' = y/w$
- $w=0$: points « à l'infini »
  - Très utile pour les projections, et pour certains types de modélisations (courbes splines)

Translations en c. homogènes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + wt_x \\ y' = y + wt_y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{w'} = \frac{x}{w} + t_x \\ \frac{y'}{w'} = \frac{y}{w} + t_y \end{cases}$$

Changement d'échelle

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{w'} = s_x \frac{x}{w} \\ \frac{y'}{w'} = s_y \frac{y}{w} \end{cases}$$

Rotation

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' = \sin\theta x + \cos\theta y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{w'} = \cos\theta \frac{x}{w} - \sin\theta \frac{y}{w} \\ \frac{y'}{w'} = \sin\theta \frac{x}{w} + \cos\theta \frac{y}{w} \end{cases}$$

Composition des transformations

- ✓Il suffit de multiplier les matrices :
  - composition d'une rotation et d'une translation: **M = RT**
- ✓Rotation autour d'un point Q:
  - Translater Q à l'origine ($\mathbf{T}_Q$),
  - Rotation autour de l'origine ($\mathbf{R}_\Theta$)
  - Translater en retour vers Q ($\mathbf{-T}_Q$).

→ $P' = (-T_Q) R_\Theta T_Q P$

Et en 3 dimensions ?

- ✓C'est pareil
- ✓On introduit une quatrième coordonnée, w
  - Deux vecteurs sont égaux si : $x/w = x'/w'$, $y/w = y'/w'$ et $z/w=z'/w'$
- ✓Toutes les transformations sont des matrices 4x4

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Rotations en 3D

- ✓Rotation : un axe et un angle
- ✓La matrice dépend de l'axe et de l'angle
- ✓Les rotations autour d'un axe de coordonnées ont une expression simple
  - Les autres rotations s'expriment comme combinaison de ces rotations simples

Rotation around *x*-axis

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x-axis is unmodified

Sanity check: a rotation of $\pi/2$ should change y in z, and z in $-y$

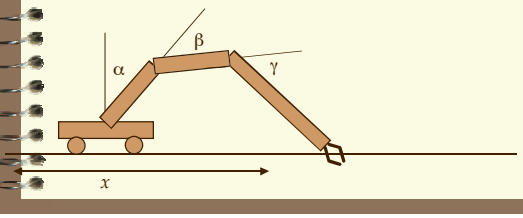
$$R_x(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Attention !

- ✓ La multiplication de matrice n'est pas commutative
- ✓ L'ordre des transformations est important
  - Rotation puis translation aura un effet très différent de translation puis rotation
  - L'ordre des angles d'Euler est un grand classique
  - Une source de bugs **très** courante

Definition d'objets complexes

Notre problème :



Definir un objet complexe

- ✓ L'objet est défini comme une combinaison d'objets plus petites
  - Exemples : robots, voiture, roue…
- ✓ On veut un comportement normal :
  - L'objet reste connecté : si je bouge le bras, la main suit
  - Utiliser les paramètres naturels : x,α,β,γ

Comment faire ?

- ✓ Coordonnées relatives
  - La position de la roue par rapport à la voiture
  - La position des boulons par rapport à la roue
- ✓ Personne n'utilise des coordonnées absolues dans la vie

Coordonnées relatives

- ✓ Utiliser les coordonnées relatives :
  - La position de l'avant-bras est donné en fonction du bras
- ✓ Mais il faut bien revenir aux coordonnées absolues:
  - On utilise une concaténation des transformations :
    - Translation sur la position du bras
    - Dessiner le bras
    - Translation sur la position de l'avant-bras par rapport au bras
    - Rotation
    - Dessiner l'avant-bras
  - Je veux revenir aux coordonnées du bras, ou de l'épaule
    - Que faire ?

Pile de transformations

- ✓ OpenGL:
  - `popmatrix(), pushmatrix()`
- ✓ SPHIGS:
  - `openStructure(), closeStructure()`
- ✓ Postscript:
  - `gsave, grestore`

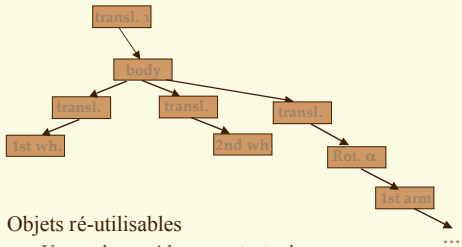
Exemple d'implémentation

- Set transformation as projection matrix
- translate by x (concatenate translation matrix with transformation matrix)
- draw car body
- save transformation matrix
  - translate+rotate
  - draw first wheel
- restore transformation matrix
- save transformation matrix
  - translate+rotate
  - draw second wheel
- restore transformation matrix

Définition hiérarchique

- ✓Comment savoir quelle est la bonne transformation ?
- ✓Comment savoir qu'il est temps de revenir à la transformation précédente ?
- ✓Définition hiérarchique des objets
- ✓Dessiner l'objet = traversée de la hiérarchie

Objet défini hiérarchiquement

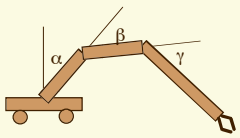


Objets ré-utilisables

- •Une seule procédure pour toutes les roues

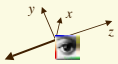
De l'objet à l'image

Coordonnées locales → Coordonnées Du monde



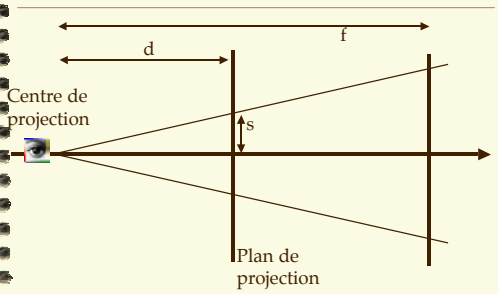
De l'objet à l'image

Coordonnées locales → Coordonnées Du monde → Coordonnées caméra



Transformation rigide
(translation + rotation)

Distance focale



Projection perspective

- Projection sur le plan $z=0$, avec le centre de projection placé à $z=-d$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix}$$

Coordonnées homogènes

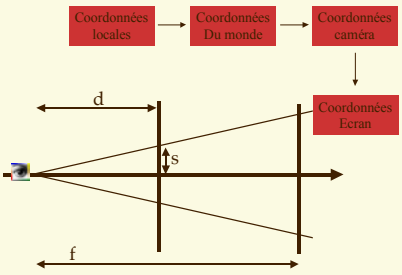
- Essentielles pour la perspective
- La rétrécissement des objets utilise w

$$w' = \frac{z}{d} + w$$

$$\frac{x'}{w'} = \frac{x}{\frac{z}{d} + w}$$

- Conserve une transformation linéaire

De l'objet à l'image

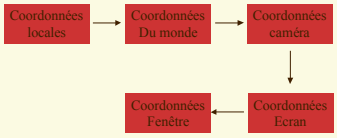


Transformation de projection

- ✓Volume « normalisé »
- ✓Conserve les équations de plans

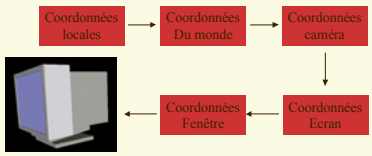
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-s}{d(1-d/f)} & \frac{s}{(1-d/f)} \\ 0 & 0 & s/d & 0 \end{bmatrix}$$

De l'objet à l'image



- purement 2D
- Translation et mise à l'échelle
- Coordonnées en « pixels »

« pipeline graphique »



- ✓Composition des transformations
- ✓Positionnement des opérations
  - *Clipping*
  - *Vecteur normal, calculs d 'éclairage*

Autres positions de la caméra

- ✓ Position de la caméra ultra-simple
  - Plan image sur $z=0$, vision suivant z
- ✓ Comment passer à un modèle général ?
  - Point de vue quelconque, direction quelconque…
- ✓ Translations, rotations
  - On est ramené au cas précédent

Élimination des parties cachées

- ✓ Espace image contre espace objet
- ✓ Algorithmes « objet »:
  - Backface culling
  - Tri par la profondeur
  - BSP-trees
- ✓ Algorithmes « image » :
  - Scan-line algorithm
  - Z-buffer

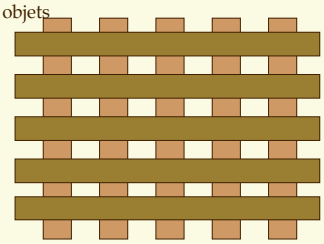
Élimination des parties cachées

- ✓ Détermination des surfaces visibles
- ✓ Complexité : équivalente au tri
  - $O(n \log n)$
- ✓ Résolution dans l'espace image ou dans l'espace objet
  - Espace image : précision limitée, $O(np)$ (p = nombre de pixels, 10^6)
  - Espace objet : précision infinie, $O(n^2)$

Résolution dans l'espace objet

- ✓Parfois nécessaire, mais complexité la pire :

n objets



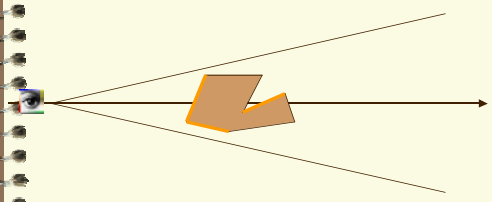
n^2 après la visibilité

Résolution dans l'espace image

- ✓Permet d'utiliser la cohérence:
  - L'objet visible à un pixel sera sans doute visible sur les pixels voisins
- ✓Plus rapide en moyenne
- ✓Cas le pire : O(*np*)

Back Face Culling

- ✓Éliminer tous les polygones qui ne sont pas tournés vers la caméra :



Back Face Culling : algorithme

- ✓Si le point de vue n'est pas devant le polygone, on n'affiche pas le polygone
- ✓Produit scalaire :
  - (Sommet-PointDeVue)*normale
  - > 0 : on garde le polygone
  - < 0 : on l'élimine

Back Face Culling

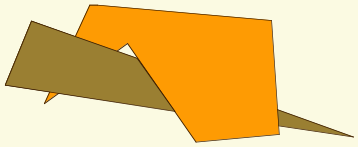
- ✓Économise 50 % du temps de calcul
  - En moyenne
- ✓Faible coût par polygone
- ✓Étape préliminaire pour les autres algorithmes
- ✓Suffisant pour un seul objet convexe

Tri par la profondeur

- ✓Dit aussi « algorithme du peintre »
- ✓On dessine d'abord les polygones les plus lointains, puis les polygones proches de l'œil
- ✓Les polygones plus proches cachent les polygones lointains
- ✓Comme un peintre dessine d'abord l'horizon, puis l'arrière-plan, puis le premier plan
- ✓Problème : définir un ordre sur les polygones
  - Complet, non ambigu

Algorithme simplifié

- ✓Trier les polygones en fonction de la distance à l'œil
- ✓Ordre incomplet
- ✓Ambiguïtés à résoudre :



Algorithme complet

- ✓Trier les polygones en fonction de leur plus grande coordonnée en z
  - z distance à la caméra suivant la direction de visée
- ✓Si deux polygones ont des étendues en z qui se recouvrent :
  - On teste :
    - Si les boites englobantes de leurs projections sont séparées
    - Si l'un est complètement derrière l'autre
    - Si leurs projections sont séparées
  - Si rien ne marche, on coupe l'un des polygones par le plan de l'autre

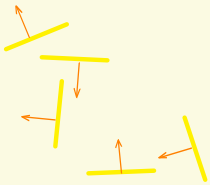
Pour ou contre

- ✓Le plus intuitif des algorithmes
- ✓Coût en mémoire :
  - Affichage direct à l'écran : $O(p)$
  - Il faut trier les polygones : $O(n \log n)$
- ✓Temps de calcul :
  - On affiche toute la scène
  - Efficace surtout sur des petites scènes

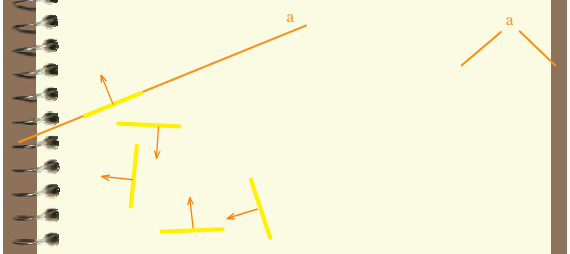
BSP-Trees

- On construit un BSP-Tree 3D pour toute la scène
  - En subdivisant les polygones qui sont intersectés par le plan du nœud
- Affichage des polygones par un parcours de l'arbre:
  - En premier les polygones qui sont derrière le nœud courant (par rapport à la caméra)
  - Puis le nœud courant
  - Puis, les polygones qui sont devant le nœud courant
- Sorte d'algorithme du peintre
  - Avec un ordre partiel
  - Mais suffisant

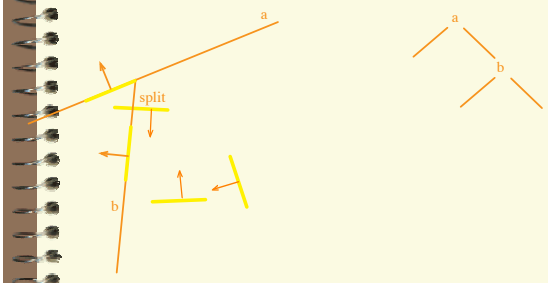
Construire un BSP-Tree (1)



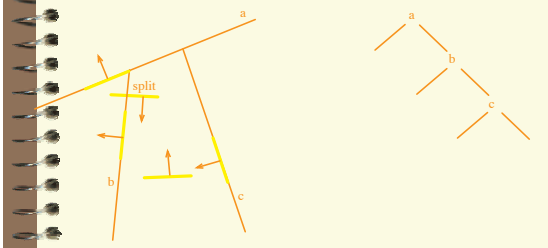
Construire un BSP-Tree (2)



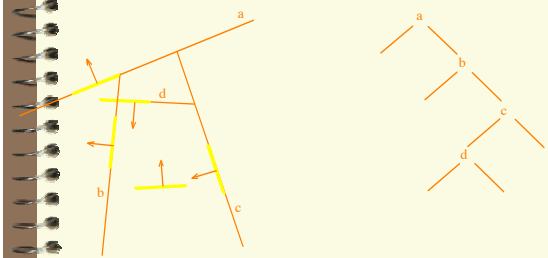
Construire un BSP-Tree (3)



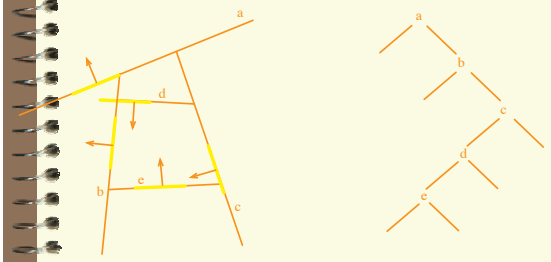
Construire un BSP-Tree (4)



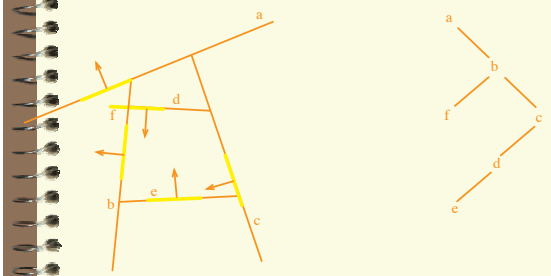
Construire un BSP-Tree (5)



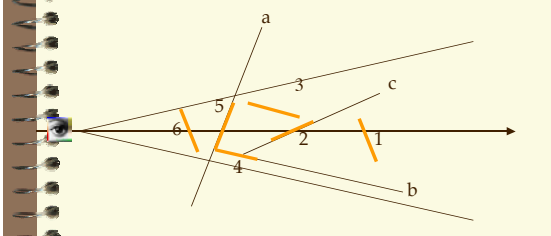
Construire un BSP-Tree (6)



Construire un BSP-Tree (7)



Utiliser un BSP-Tree



BSP Tree contre algorithme du peintre

- ✓ Le BSP-Tree fait plus de divisions de polygones
- ✓ Mais l'affichage est plus direct
- ✓ BSP-Tree:
  - Pré-traitement plus long
  - Coût mémoire plus élevé
  - Temps par requête (position de la caméra) plus petit
- ✓ Algorithme du peintre:
  - Pas de pré-traitement
  - Temps par requête plus long
- ✓ Dans les deux cas : on affiche toute la scène

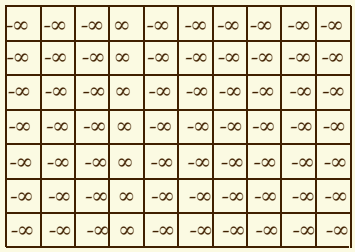
Z-Buffer

- ✓ Un tableau, de la taille de l'écran
- ✓ On stocke la valeur maximale de z pour chaque pixel
  - z = direction de visée, exprime la distance à l'oeil
- ✓ Initialisation : tous les pixels à $-\infty$
- ✓ Projection de tous les polygones
  - On met à jour les pixels de la projection du polygone

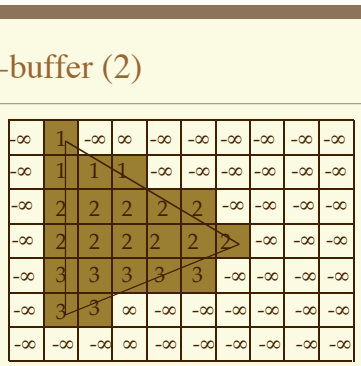
Z-buffer : algorithme

- ✓ Pour chaque polygone :
  - Projeter le polygone sur le plan image
  - Pour chaque pixel dans la projection du polygone
    - Calculer la valeur de z pour ce pixel
    - Si z est supérieur à la valeur courant de z max
      - Changer z maximal
      - Afficher le pixel à l'écran, de la couleur du polygone

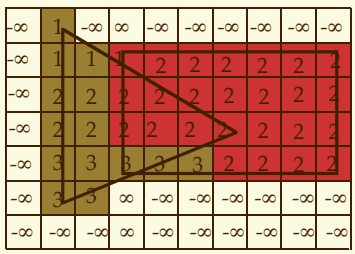
Z-buffer (1)



Z-buffer (2)



Z-buffer (3)



Z-Buffer : pour ou contre

- ✓Pour :
  - Facile à implémenter
  - Travaille dans l'espace image
    - Rapide
- ✓Contre :
  - Coût en mémoire
  - Travaille dans l'espace image
    - aliasing
    - artefacts

Z-Buffer

- ✓Combien d'information ?
  - Combien de bits pour z max ?
  - Limité par la mémoire :
    - 8 bits, 1024x1280: 1.25 Mb
    - 16 bits, 1024x1280: 2.5 Mb
  - Nécessaire pour la séparation des objets proches :
    - 8 bits, distance minimale entre objets de 0.4 % (4mm pour 1m)
    - 16 bits, distance minimale de 0.001 % (1mm pour 1km)
    - Que se passe t-il en dessous de cette limite ?