Fin des Graphes et Analyse lexicographique

Eric Goubault

CEA/Saclay

Eric.Goubault@cea.fr

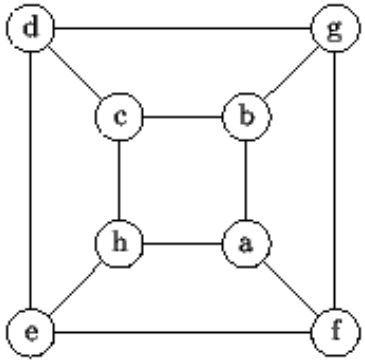
http://www.di.ens.fr/~goubault

Points d'articulation

- Soit un graphe connexe et non-orienté (X, A), sans arcs d'un sommet à lui même.
- Un point d'articulation a est un sommet tel qu'il existe deux autres sommets distincts s et t connectés et que a appartient à tous les chemins de s à t.
- Un graphe qui ne contient pas de point d'articulation est biconnexe.
- Deux arcs sont équivalents quand il sont égaux ou si existe un cycle les contenant tous deux.
- Un graphe est biconnexe quand tous ses arcs sont en relation.

Les graphes suivants sont-ils biconnexes ?

Les graphes suivants sont-ils biconnexes ?



Programme de Tarjan

```
static void findArticulations(int s) {
numOrder = 0 ; num = new int[succ.length] ;
int nfils = 0 ;
numOrder++ ; num[s] = numOrder ;
for (List p = succ[s] ; p != null ; p = p.next) {
  int n = p.val ;
  if (num[n] == 0) {
    doFindArticulation(n, s) ;
    nfils++ ; } }
if (nfils > 1)
  System.out.println("La racine " + s + "
                 est un point d'articulation") ; }
```


Questions

- Appliquer le programme au graphe de l'exercice précédent.
- Un sommet peut-il être affiché deux fois ? Si oui donner un exemple.
- Justifier la correction du programme. Le comparer à celui du poly.

Question

Montrer l'équivalence des deux définitions de graphe biconnexe.

Programme de Tarjan

```
// renvoie le numero du point d'attache
private static int doFindArticulation (int s, int pere) {
int lowpt ; boolean found = false ;
++numOrder ; lowpt = num[s] = numOrder ;
for (List p = succ[s] ; p != null ; p = p.next) {
  int n = p.val ;
  if (num[n] == 0) {
    int lowN = doFindArticulation(n, s) ;
    lowpt = Math.min(lowN,lowpt) ;
    if (lowN >= num[s]) {
      System.out.println("Articulation : " + s) ; }
  } else if (num[n] < num[s] && n != pere) {
      lowpt = Math.min(num[n],lowpt) ; } }
  return lowpt ; }
```

Composantes biconnexes

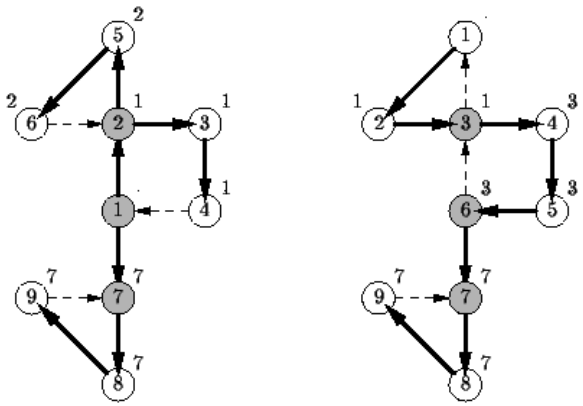
- Les composantes biconnexes sont intuitivement les composantes connexes du graphe une fois supprimés les point d'articulation.
- Plus précisément, la relation d'équivalence sur les arcs définit les classes d'équivalence A_1, A_2, ..., A_k des arcs du graphe (X, A).
- On peut alors définir les ensembles X_1, X_2, ..., X_k de sommets participant respectivement aux arcs de A_1, A_2, ..., A_k.

Il est évident que les graphes (X_i, A_i) sont biconnectés (et en un sens maximaux). Il semble logique que les points d'articulations soient les éventuels points communs des X_i (on ne tentera aucune preuve).

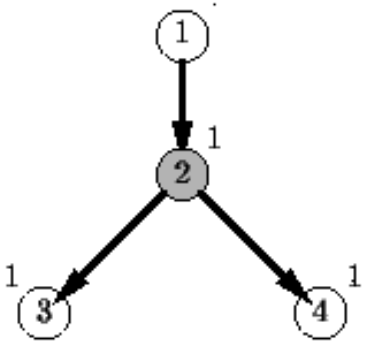
Questions

- Trouver les composantes biconnexes des graphes non-biconnexes déjà vus.
- Concevoir, en utilisant une pile d'arcs, un programme qui affiche les (arcs des) composantes biconnexes, à raison d'une ligne par composante biconnexe.

Solution...



Solution...



Calcul naïf des composantes fortement connexes

- Rappeler la définition des composantes fortement connexes dans un graphe orienté.
- Caractériser la composante fortement connexe d'un sommet à l'aide du graphe des prédécesseurs (ou graphe inverse).
- Concevoir un algorithme simple pour afficher les composantes fortement connexes. Indication : on utilisera le graphe des prédécesseurs, et deux méthodes d'exploration partageant un tableau de marques.
- Trouver un exemple d'exécution qui montre que l'algorithme est au moins quadratique (en le nombre de sommet).
- Programmer.

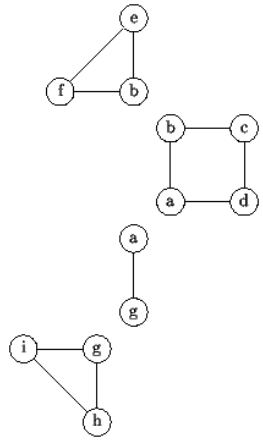
Mots, langages etc.

Notions de:

- Alphabet
- Mots (concaténation de lettres dans l'alphabet)
- Langages (ensembles de mots)
- Automates/langages réguliers, grammaires etc. (description de langages)

Solution...

Solution...



Application typique

- `lettre=a|b|...|z|A|B|...|Z`
- `chiffre=0|1|...|9`
- `identification=lettre(lettre|chiffre)*` (autre notation pour $+$ et *)
- on oublie tout ce qui est tabulation, espaces etc.

Exercice

En utilisant une pile, simuler une petite calculatrice HP (notation polonaise inverse), pour évaluer des expressions arithmétiques simples

Expressions régulières

- A partir d'un alphabet A
- Plus petit langage formé du mot vide, de l'alphabet A (vu comme mots) et stable par les opérations:
  - produit: $L.L' = \{w.w' \mid w \in L, w' \in L'\}$
  - somme: $L + L' = L \cup L'$
  - étoile: $L^* = \sum_{i \in N} L^i$ où $L^0 = \{\epsilon\}$ (le mot vide), $L^{n+1} = L.L^n$

Notations

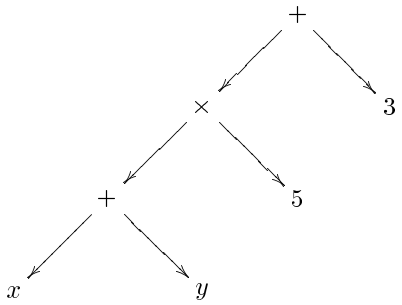
- $(a+b)^*c = \{c, ac, bc, aac, abc, bac, bbc, \ldots\}$
- utilisation sous Unix (filtres pour fichiers): `ls *.java` etc.
- notion d'algèbre de Kleene
- permet en général de définir la notion de lexème (séparant le flot continu des lettres)

Arbre de syntaxe abstraite - ex. expressions arithmétiques

Les termes sont transformés en arbres, dont les noeuds sont les opérations ($+$, $\times$ etc.), et dont les feuilles sont les constantes et les variables

Exemple

$(x + y) * 5 + 3$ est représenté par:



Grammaires

Composées de :

- A: alphabet terminal (tous les mots construits par la grammaires sont constitués de lettres de A)
- V_N: alphabet non-terminal; $S \in V_N$ joue un rôle particulier "axiome"
- des règles de la forme: $S \to u$ où $S \in V_N$ et u mot de $A \cup V_N$

Exemple

- $A = \{a, b\}$
- $V_N = \{S, T, U\}$, l'axiome est S
- règles (de "production"):
  - $S \to aTbS$
  - $S \to bUaS$
  - $S \to \epsilon$
  - $T \to aTbT$
  - $T \to \epsilon$
  - $U \to bUaU$
  - $U \to \epsilon$

Exercices

- Donner une grammaire pour les expressions régulières

Analyse syntaxique

- But: déterminer si un mot f appartient au langage d'une grammaire
- Pour ce faire, trouver une dérivation amenant à f
- S'il existe plusieurs dérivation pour le même mot, la grammaire est ambigüe

Utilisation des rgles de production

On forme des "dérivations":

- On part de S, à partir de $S \to u$
- Si u contient des non-terminaux, on écrit $u = u_1 T u_2$
- On choisit ensuite $T \to v$ et on obtient $u_1 v u_2$
- etc.

Exemple

- Par $S \to aTbS$ puis $T \to \epsilon$:

$$S \to aTbS \to abS$$

- Puis $S \to bUaS$:

$$S \to aTbS \to abS \to abbUaS \to abbbUaUaS \ldots$$

En fait, ici, le langage engendré par cette grammaire est constitué des mots avec autant de a que de b

Exemple de grammaire ambigüe

- $A = \{+, \times, (,), id, nombre\}$, $V_N = \{E\}$, l'axiome est E, et les règles sont:
  - $E \to E + E$
  - $E \to E \times E$
  - $E \to id$
  - $E \to nombre$
  - $E \to (E)$

Exercice

- Trouver un mot f qui comporte plusieurs dérivations dans cette grammaire
- Y a t-il une grammaire équivalente (reconnaissant le même langage) qui soit non-ambigüe?

Grammaire désambiguée

Par exemple, priorité de $\times$ sur $+$:

- $A = \{+, \times, (,), id, nombre\}$, $V_N = \{F, P, E\}$, l'axiome est E, les règles sont:
  - $E \to P$
  - $E \to P + E$
  - $P \to F$
  - $P \to F \times P$
  - $F \to id$
  - $F \to nombre$
  - $F \to (E)$

Analyses

Etant donné f et la grammaire, trouver une dérivation finie (si elle existe):

$$S \to u_1 \to u_2 \ldots \to u_n = f$$

- analyse descendante: on essaie de trouver u_1 puis u_2 etc.
- analyse ascendante: on essaie de trouver u_{n-1} puis u_{n-2} etc.

Analyse LL

Pour éviter les retours en arrière:

- Deviner la règle à appliquer en regardant les premières lettres de u
- On écrit $u = gSv$, $f = gh$ et les premières lettres de h doivent permettre de retrouver la règle à appliquer à S
- Exemple: $S \to (+SS)$, $S \to (*SS)$ et $S \to a$ est une grammaire $LL(2)$
- L'analyse syntaxique d'une grammaire $LL(k)$ se fait en O(longueur du mot)

Exemple

- Prouver que la grammaire des expressions arithmétiques (infixe) n'est pas $LL(k)$ (quelque soit k)
- Construire une grammaire $LL(1)$ équivalente

Analyse descendante récursive

- Possible dans des certains cas: toute lettre détermine de façon unique, pour un non-terminal donné, la règle à appliquer
- Impossible dans les cas de récursivité à gauche
- On écrit une fonction par non-terminal
- On traduit "mot pour mot" la grammaire

Analyse récursive descendante avec retours en arrière

- On construit les mots u dont on espère qu'ils vont se dériver en f
- On écrit $u = gyv$, $f = gxh$, $x \neq y$
  - si $y \in A$ (alphabet terminal): on ne peut atteindre f et on repart en arrière dans les arborescences des choix
  - si $y \in V_N$ (non-terminal): on recherche toutes les règles dont y est le membre gauche et on applique à u successivement toutes ces règles

Ne marche pas mieux avec les grammaires récursives à gauche, et est bien plus coûteuse!

Exemple

- $S \to aSbS$, $S \to aSb$, $S \to abS$, $S \to ab$
- Réduire $F = ababab$
- En déduire un algorithme $LR(1)$

Exemple d'utilisation

- Ecrire un programme, qui, à partir de l'arbre de syntaxe abstrait d'une expression arithmétique, calcule sa dérivée par rapport à un des identificateurs
- Proposer des règles de simplification

Réponse

- Les règles $E \to P$ et $E \to P + E$ posent un problème (P peut être aussi long que l'on veut, avant de voir $+$ ou pas)
- On peut "factoriser à gauche", donnant ainsi une grammaire $LL(1)$:
  - $E \to PE'$
  - $E' \to \epsilon$, $E' \to +PE'$
  - $P \to FP'$
  - $P' \to \epsilon$, $P' \to \times FP'$
  - $F \to a$, $F \to (E)$

Analyse ascendante

- Plus général (voir `yacc`)
- On fait des "réductions": on remplace un membre droit d'une règle par le membre gauche correspondant