Méthodes de décomposition de domaine en dimension 1 d'espace

On considère l'équation de Poisson sur l'ouvert $\Omega =]0, L[$,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\
&u(0) = g_0 \\
&u(L) = g_L
\end{aligned}
$$

avec g_O, $g_L \in \mathbb{R}$ et f est une fonction à valeurs réelles.
On considère un schéma aux différences finies. On introduit une grille de discrétisation $x_j = (j-1)\Delta x$, $j = 1, \ldots, N$ avec $\Delta x = L/(N-1)$. On approche $u(x_j)$ par u_j. Le vecteur des inconnues $U = (u_j)_{1 \le j \le N}$ doit satisfaire

$$
\begin{aligned}
&-\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2} = f \\
&u_1 = g_0 \\
&u_N = g_L.
\end{aligned}
$$

On souhaite résoudre ce système linéaire par un algorithme de Schwarz avec des conditions d'interface de Dirichlet ou Robin. On suppose disposer de M processeurs.

- Comment peut on découper la grille en sous-domaines à faire calculer par chacun des processeurs
- Comment les processeurs vont ils communiquer entre eux?
- Ecrire un programme PVM gérant les communications entre les processeurs
- Proposer plusieurs critères d'arrêt de la méthode itérative de décomposition de domaine.
- Ecrire le schéma entièrement pour des conditions d'interface de Dirichlet.
- Ecrire le schéma entièrement pour des conditions d'interface de Robin $(\partial_n + \alpha)$. Tester la vitesse de convergence en fonction du paramètre α.