TD 4

Résolution de systèmes linéaires (C/PVM)

Au cours d'une résolution numérique de l'équation des ondes par un schéma implicite, on a à trouver la solution d'un système d'équations linéaires $Ax = b$. Après un algorithme de type pivot de Gauss que l'on n'étudiera pas ici, on se retrouve avec un système triangulaire supérieur $Ux = b$. On se propose ici de programmer la résolution parallèle de ce dernier système.

Soit donc à résoudre le système triangulaire supérieur

$$Ux = b$$

avec,

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & \cdots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & \cdots & U_{2,n} \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

et $U_{i,i} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

On procède par "remontée" c'est à dire que l'on calcule successivement,

$$\begin{array}{rcl} x_n & = & \frac{b_n}{U_{n,n}} \\ x_i & = & b_i - \frac{\sum_{j=i+1}^{n} U_{i,j} x_j}{U_{i,i}} \end{array}$$

pour $i = n-1, n-2, \cdots, 1$.

On écrit les équations précédentes en pseudo-code C de la façon suivante:

```
x[n]=b[n]/U[n,n];
for (i=n-1;i>=1;i--)
   {
      x[i]=0;
      for (j=i+1;j<=n;j++)
         L: x[i]=x[i]+U[i,j]*x[j];
      x[i]=b[i]-x[i]/U[i,i];
   }
```

où `n` est la taille de la matrice U représentée par le tableau `U[i,j]`, où `x[i]` (`i` entre 1 et `n`) représente le vecteur "inconnu" x et `b[i]`, le vecteur second membre du système d'équations linéaires.

Programmer le code de remontée correspondant en PVM. On supposera que P_n est le maître qui contient au début tout le tableau `U` et le tableau `b` et crée ses esclaves $P_1,\cdots,P_{n-1}$. On pourra comme dans le cas séquentiel commencer par calculer `x[n]`. Ensuite, l'idée sera de placer chacune des composantes des tableaux rentrant en compte pour le calcul de la ième équation linéaire $(1 \leq i \leq n-1)$ [1] sur le ième processeur P_i. On pourra donc propager les valeurs déjà résolues des `x[j]`, `j`$\geq$`i`$+1$ aux processeurs P_k, $k \leq$`i`, qui effectueront une même étape de sommation élémentaire. A la fin il doit attendre le résultat de tous ses esclaves.

1. C'est celle qui sert à déterminer `x[i]` à partir des `x[j]` (`j`$\geq$`i`$+1$) lors de la remontée.