

# Sujet de stage

**Titre.** Calcul de pseudospectres sur GPU

**Encadrants.** Pierre Fortin et Stef Graillat (envoyer un courriel à `stef.graillat@lip6.fr` si vous êtes intéressés)

**Laboratoire d'accueil.**

Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6), Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

**Mots clés.** pseudospectre, GPU, CUDA, OpenCL, MATLAB

**Domaine.** Le  $\varepsilon$ -pseudospectre [1] d'une matrice  $A$  est défini comme le sous-ensemble du plan complexe consistant en toutes les valeurs propres de toutes les matrices situées à une distance  $\varepsilon$  de  $A$ . C'est un outil très utilisé en théorie du contrôle et en automatique pour tester la robustesse de la stabilité d'un système.

Considérons maintenant une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Nous notons par  $\Lambda(A)$  son spectre. Étant donné  $\varepsilon > 0$ , le  $\varepsilon$ -pseudospectre de la matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est l'ensemble  $\Lambda_\varepsilon(A)$  défini par

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : z \in \Lambda(X) \text{ avec } X \in M_n(\mathbb{C}) \text{ et } \|X - A\|_2 \leq \varepsilon\}.$$

On peut montrer que

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \sigma_{\min}(A - zI) \leq \varepsilon\},$$

où  $\sigma_{\min}$  représente la plus petite valeur singulière. Cela donne un algorithme de calcul du pseudospectre connu sous le nom de **GRID**.

---

**Algorithme 1** Calcul de pseudospectres

---

**Entrée :** la matrice  $A$  et la perturbation  $\varepsilon$

**Sortie :** tracé du pseudospectre dans le plan complexe

- 1: On maille un carré contenant tout le pseudospectre
  - 2: On calcule  $f(z) := \sigma_{\min}(A - zI)$  pour tous les points  $z$  de la grille.
  - 3: On affiche la ligne de niveau  $f(z) = \varepsilon$
- 

On remarque que cet algorithme est massivement parallèle. En effet, il revient à calculer de manière indépendante une SVD (décomposition en valeurs singulières) de  $A - zI$  pour chaque point  $z$  de la grille. Un tel algorithme devrait donc pleinement tirer parti des architectures "many-cores" actuelles comme les GPU. Le but de ce stage est donc de porter cet algorithme sur GPU.

**Description détaillée du travail.** Le travail pourra se dérouler de la manière suivante.

1. L'opération la plus coûteuse étant le calcul de la SVD, on s'intéressera au portage de la SVD sur GPU en commençant par utiliser l'implantation de la SVD de CULA<sup>1</sup>.
2. On pourra ensuite étudier d'autres implantations en CUDA ou OpenCL de la SVD. Il s'agira en particulier d'implanter un algorithme (de calcul de SVD) spécifique au calcul du pseudospectre.
3. Une interface avec le logiciel MATLAB sera développée pour pouvoir utiliser la puissance des GPU dans MATLAB (et aussi utiliser l'interface EigTool<sup>2</sup>).

Si le temps le permet, on pourra aussi regarder les algorithmes de prédiction-correction pour le calcul des pseudospectres. Il s'agit là d'algorithmes de suivi de trajectoire.

**Niveau du stage.** Stage de L3 ou de master 1<sup>re</sup> année

**Durée.** 2 mois

## Références

- [1] Lloyd N. Trefethen and Mark Embree. *Spectra and pseudospectra*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. The behavior of nonnormal matrices and operators.

---

1. <http://www.culatools.com/>

2. <http://web.comlab.ox.ac.uk/pseudospectra/eigtool/>