Parallélisme

Cours 6 - Ordonnancement en mémoire partagée

Eric Goubault
Commissariat à l'Energie Atomique & Chaire Ecole Polytechnique/Thalès
Saclay

Le 17 février 2010

Problèmes d'ordonnancement

- Revenons à la mémoire partagée... et aux PRAM (CREW)!
- Problème important: paralléliser les nids de boucle
- ou au moins comprendre ce qui est intrinsèquement séquentiel, de ce qui peut être calculé en parallèle

Loi d'Amdahl

- s pourcent séquentiel,
- sur p processeurs,
- accélération du calcul complet par rapport à un calcul séquentiel sera au maximum de,

$$\frac{1}{s + \frac{1-s}{p}}$$

(maximum de $\frac{1}{s}$)

Conséquence: même si on parallélise 80 pourcent d'un code (le reste étant séquentiel), on ne pourra jamais dépasser, quel que soit la machine cible, une accélération d'un facteur 5!

Exemple de nid de boucle

```
for (i=1;i<=N;i++) {
  for (j=i;j<=N+1;j++)
    for (k=j-i;k<=N;k++) {
      S1;
      S2;
    }
  for (r=1;r<=N;r++)
    S3;
}
```

Explication

- Ceci n'est pas un nid de boucle parfait:
- `S1` et `S2` sont englobées par les boucles `i`, `j` et `k`
- alors que `S3` est englobée par les boucles `i` et `r`

Vecteurs d'itération

- Les itérations de n boucles parfaitement imbriquées sont représentées par un vecteur de dimension n
- Par exemple, pour `S3` on a un vecteur d'itération en (i, r) dont le domaine est $1 \leq i, r \leq N$
- Pour `S1` on a un vecteur d'itération en (i, j, k) dont le domaine est $1 \leq i \leq N$, $i \leq j \leq N + 1$ et $j - i \leq k \leq N$.
- On note une instance de S à l'itération I, $S(I)$
- On suppose que les domaines d'itération forment des polyèdres.

Ordre séquentiel d'exécution

Définit l'ordre d'exécution "par défaut":

- Pour les nids de boucles non-parfaits, les domaines d'itérations sont incomparables a priori
- Il suffit de "compléter" les vecteurs d'itération de façon cohérente: $I \to \tilde{I}$
- $$S(I) <_{seq} T(J) \Leftrightarrow (\tilde{I} <_{seq} \tilde{J}) \text{ ou } (\tilde{I} = \tilde{J} \text{ et } S <_{text} T)$$

Dépendances de données

- On veut mettre en parallèle certaines instructions: une partie de l'ordre séquentiel est à respecter absolument, une autre pas (permutation possible d'actions)
- On va définir un ordre partiel (Bernstein), ordre minimal à respecter pour produire un code sémantiquement équivalent à l'ordre initial
- En fait, l'ordre séquentiel va être une *extension* de l'ordre partiel de Bernstein
- Cet ordre partiel est défini à partir de 3 types de dépendances de données: flot, anti et sortie.

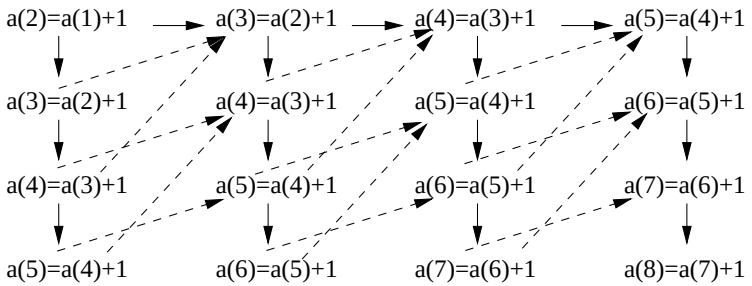
Flot, anti et sortie...

- Toujours dirigées par l'ordre séquentiel
- Dépendance de flot de $S(I)$ vers $T(J)$: si un emplacement mémoire commun est en écriture pour $S(I)$ et en lecture pour $T(J)$
- Dépendance anti de $S(I)$ vers $T(J)$: si un emplacement mémoire commun est en lecture pour $S(I)$ et en écriture pour $T(J)$
- Dépendance de sortie de $S(I)$ vers $T(J)$: si un emplacement mémoire commun est en écriture pour $S(I)$ et en écriture pour $T(J)$

Exemple

```
for (i=1;i<=N;i++)
  for (j=1;j<=N;j++)
    a(i+j) = a(i+j-1)+1;
```


Dépendances



Calcul des dépendances

- Supposons que $S(I)$ et $T(J)$ accèdent au même tableau a (S en écriture, T en lecture)
- $S(I) : a(f(I)) = ...$ et $T(J) : ... = a(g(J))$;
- L'accès au tableau est commun si $f(I) = g(J)$
- Si f et g sont des fonctions affines à coefficients entier: peut se tester en temps polynomial

Calcul des dépendances

- Chercher une dépendance de flot par exemple revient à prouver en plus $S(I) <_{seq} T(J)$
- Encore une fois: en général résolution de systèmes d'égalités et d'inégalités affines
- Chercher les dépendances *directes*: plus compliqué (par programmation linéaire, problèmes d'optimisation dans les entiers $\rightarrow$ algorithme de Fourier-Motzkin, omega-test de B. Pugh utilisé dans `petit`)

Exemple

- $f(I) = i + j$ et $g(J) = i + j - 1$
- On cherche dépendance entre écriture $S(i', j')$ et lecture $S(i, j)$
- $f(I) = g(J) \Leftrightarrow i' + j' = i + j - 1$
- $S(i', j') <_{seq} S(i, j) \Leftrightarrow \big((i' \leq i - 1)$ ou $(i = i'$ et $j' \leq j - 1)\big)$

Exemple

- Dépendance de flot directe implique résoudre:
  $max_{<_{seq}}\{(i', j') \mid (i', j') <_{seq} (i, j), i'+j' = i+j-1, 1 \leq i, i', j, j' \leq$
- Solution:
  $$(i, j-1) \text{ si } j \geq 2$$
  $$(i-1, j) \text{ si } j = 1$$
- Antidépendance directe de $S(i, j)$ vers $S(i', j')$ implique résoudre:
  $min_{<_{seq}}\{(i', j') \mid (i, j) <_{seq} (i', j'), i'+j' = i+j-1, 1 \leq i, i', j, j' \leq$
- Solution (pour $j \geq 3$, $i \leq N - 1$):
  $$(i+1, j-2)$$

Approximation des dépendances

Graphe de Dépendance Etendu (GDE):

- Sommets: instances $S_i(I)$, $1 \leq i \leq s$ et $I \in D_{S_i}$
- Arcs: $S(I) \rightarrow T(J)$ pour chaque dépendance

Quelques définitions

- Ensemble des paires de dépendances entre S et T:

$$\{(I, J) \mid S(I) \rightarrow T(J)\} \subseteq \mathbb{Z}\!\!\mathbb{Z}^{n_S} \times \mathbb{Z}\!\!\mathbb{Z}^{n_T}$$

- Ensemble de distance de ces dépendances:

$$\{(\tilde{J} - \tilde{I}) \mid S(I) \rightarrow T(J)\} \subseteq \mathbb{Z}\!\!\mathbb{Z}^{n_{S,T}}$$

- Problème: on ne peut calculer le GDE à la compilation! (de toutes façons, est trop gros!)

Graphe de Dépendance Réduit

...ou GDR:

- Sommets: instructions S_i $(1 \leq i \leq s)$
- Arcs: $e : S \rightarrow T$ si il existe au moins un arc $S(I) \rightarrow T(J)$ dans le GDE
- Etiquette: $w(e)$ décrivant un sous-ensemble D_e de $\mathbb{Z}\!\!\mathbb{Z}^{n_{S,T}}$

Le tri topologique du GDR permet d'avoir une idée des portions séquentielles, et des portions parallélisables.

Quelques abstractions

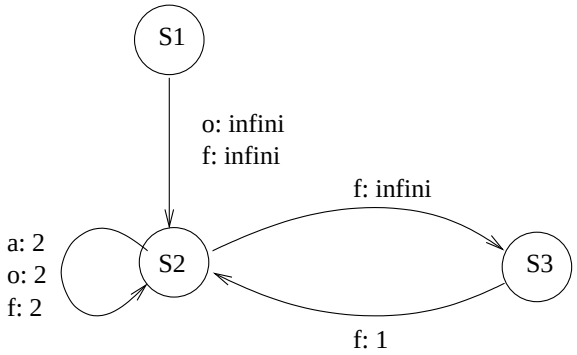
...des étiquettes du GDR. Par exemple, niveaux de dépendance (GDRN):

- Une dépendance entre $S(I)$ et $T(J)$ est boucle indépendante si elle a lieu au cours d'une même itération des boucles englobant S et T
- Sinon elle est portée par la boucle...
- Etiquetage en conséquence, de $e : S \rightarrow T$ du GDR:
  - $l(e) = \infty$ si $S(I) \rightarrow T(J)$ avec $\tilde{J} - \tilde{I} = 0$
  - $l(e) \in [1, n_{S,T}]$ si $S(I) \rightarrow T(J)$, et la première composante non nulle de $\tilde{J} - \tilde{I}$ est la $l(e)^{ieme}$ composante

Exemple

```
for (i=2;i<=N;i++) {
  S1: s(i) = 0;
  for (j=1;j<i-1;j++)
    S2: s(i) = s(i)+a(j,i)*b(j);
  b(i) = b(i)-s(i);
}
```

GDRN



Vecteurs de direction

Dans notre exemple:

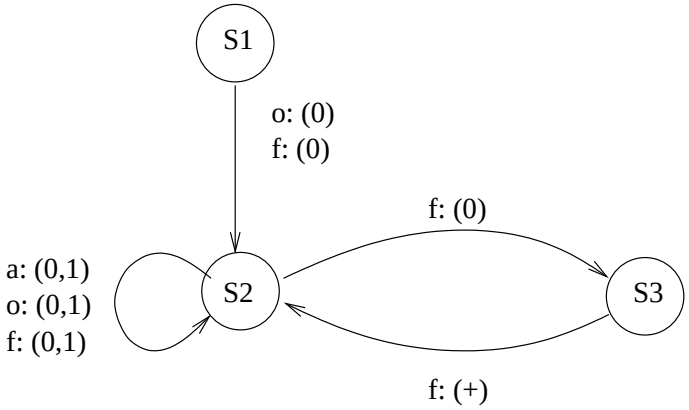
- lecture $a(i+j-2)$-écriture $a(i+j)$: ensemble de distance $\{(1,-2)\}$
- écriture $a(i+j)$-lecture $a(i+j-1)$: ensemble de distance $\{(1,0),(0,1)\}$
- écriture $a(i+j)$-écriture $a(i+j)$: ensemble de distance $\{(1,-1)\}$

Vecteurs de direction

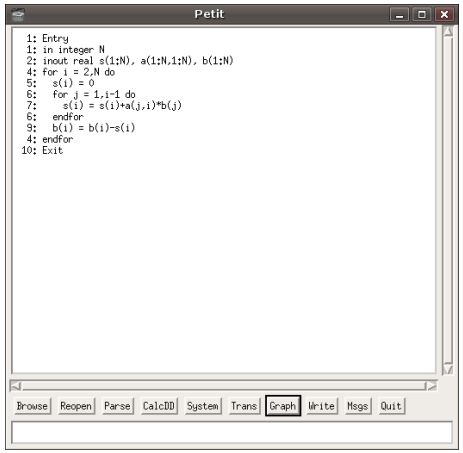
Sont des abstractions de ces ensembles de distance:

- on note $z+$ pour une composante si toutes les distances sur cette composante ont au moins la valeur z
- on note $z-$ pour une composante si toutes les distances sur cette composante ont au plus la valeur z
- on note $+$ à la place de $1+$, $-$ à la place de $-1-$
- on note $*$ si la composante peut prendre n'importe quelle valeur
- on note z si la composante a toujours la valeur z

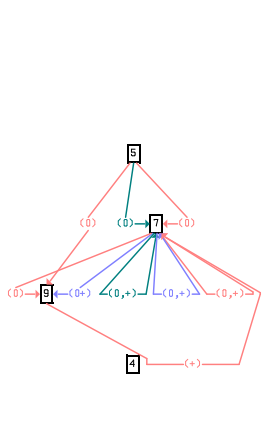
GDRV



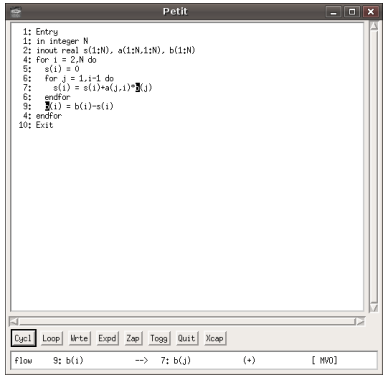
Démo petit



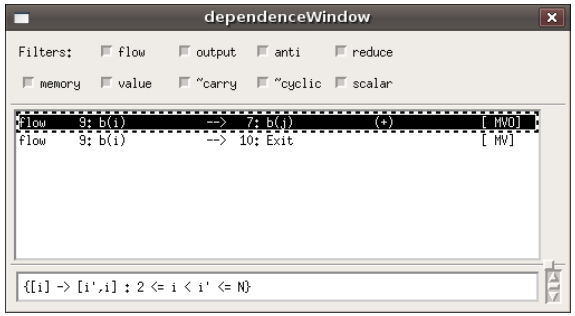
Graphe de dépendances sous petit



Dépendances sous petit



Informations sur les dépendances sous petit



Transformations de boucles

- Distribution de boucle
- Torsion de boucle
- Inversion de boucle
- Permutation de boucle
- etc.

Algorithmes de parallélisation de boucles

- Allen et Kennedy (basé sur le GDRN) : distribution de boucles
- Lamport - transformations unimodulaires (basé sur le GDRV) : torsion, inversion, permutation de boucles

Distribution de boucles

- Toute instance d'une instruction S peut être exécutée avant toute instance de T si on n'a jamais $T(J) \rightarrow S(I)$ dans le GDE
- Code:

```
for (i=...) {
  S1;
  S2;
}
```


Transformation

Si on n'a pas de dépendance de $S2$ vers $S1$ ni de $S1$ vers $S2$, alors on peut transformer le code en:

```
for (i=...)
  S1;
for (i=...)
  S2;
```

Fusion de boucles

```
forall (i=1;i<=N;i++)
 D[i]=E[i]+F[i];
forall (j=1;j<=N;j++)
 E[j]=D[j]*F[j];
```

devient:

```
forall (i=1;i<=N;i++)
 {
  D[i]=E[i]+F[i];
  E[j]=D[j]*F[j];
 }
```

Cela permet une vectorisation et donc une réduction du coût des boucles parallèles.

Composition de boucles

```
forall (j=1;j<=N;j++)
 forall (k=1;k<=N;k++)
  ...
```

devient,

```
forall (i=1;i<=N*N;i++)
 ...
```

Cela permet de changer l'espace d'itérations (afin d'effectuer éventuellement d'autres transformations).

Echange de boucles

```
for (i=2;i<=N;i++)
 for (j=2;j<=M;j++)
  A[i,j]=A[i,j-1]+1;
```

devient,

```
for (j=1;j<=M;j++)
 A[1:N,J]=A[1:N,j-1]+1;
```


Réduction de boucle

Dans le cas où le cycle interne de dépendance est de type dépendance de flot on ne peut pas utiliser la méthode précédente mais, par exemple:

```
for (i=3;i<=N;i++)
 { A[i]=B[i-2]-1;
   B[i]=A[i-3]*k; }
```

devient,

```
for (j=3;j<=N;j=j+2)
 forall (i=j; i<=j+1; i++)
  { A[i]=B[i-2]-1;
    B[i]=A[i-3]*k; }
```

Déroulement de boucle

```
for (i=1;i<=100;i++)
 A[i]=B[i+2]*C[i-1];
```

devient,

```
for (i=1;i<=99;i=i+2)
 {
  A[i]=B[i+2]*C[i-1];
  A[i+1]=B[i+3]*C[i];
 }
```


Rotation de boucle

[skewing]
Pour le code:

```
for (i=1;i<=N;i++)
 for (j=1;j<=N;j++)
  a[i,j]=(a[i-1,j]+a[i,j-1])/2;
```


Transformation

En faisant une rotation de l'espace d'itérations de 45 degrés:

```
for (k=2;k<=N;k++)
  forall (l=2-k;l<=k-2;l+=2)
    a[(k-l)/2,(k+l)/2] = (a[(k-l)/2-1,(k+l)/2]+
                          a[(k-l)/2,(k+l)/2-1])/2;
for (k=1;k<=N;k++)
  forall (l=k-N;l<=N-k;l+=2)
    a[(k-l)/2,(k+l)/2] = (a[(k-l)/2-1,(k+l)/2]+
                          a[(k-l)/2,(k+l)/2-1])/2;
```


Exemple de parallélisation de code

Phase de *remonte* après une décomposition LU:
Soit donc à résoudre le système triangulaire supérieur

$$Ux = b$$

avec,

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & \cdots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & \cdots & U_{2,n} \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & U_{n,n} \end{pmatrix}$$

et $U_{i,i} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Remontée...

On procède par "remontée" c'est à dire que l'on calcule successivement,

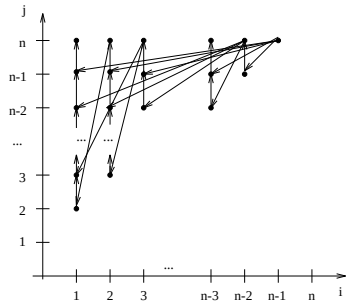
$$x_n = \frac{b_n}{U_{n,n}}$$
$$x_i = \frac{b_i - \Sigma_{j=i+1}^{n} U_{i,j} x_j}{U_{i,i}}$$

pour $i = n-1, n-2, \cdots, 1$.

Code séquentiel

```
x[n]=b[n]/U[n,n];
for (i=n-1;i>=1;i--)
{
x[i]=0;
for (j=i+1;j<=n;j++)
     L: x[i]=x[i]+U[i,j]*x[j];
     x[i]=(b[i]-x[i])/U[i,i];
     }
```


Graphe de dépendances



Il y a aussi des anti-dépendances des itérations (i, j) vers $(i-1, j)$...

Parallélisation

En faisant une rotation et une distribution de boucles:

```
H': forall (i=1;i<=n-1;i++)
       x[i]=b[i];
T': x[n]=b[n]/U[n][n];
H:  for (t=1;t<=n-1;t++)
     forall (i=1;i<=n-t;i++)
      L: x[i]=x[i]-x[n-t+1]*U[i][n-t+1];
     T: x[n-t]=x[n-t]/U[n-t][n-t];
```

Le ratio d'accélération est d'ordre $\frac{n}{4}$ asymptotiquement:...

Coût

En ne regardant que la partie `H` du code (la seule vraiment importante asymptotiquement), et on a:

- un coût de 2 pour `L`,
- un coût de 1 pour rapatrier `x[n-t+1]`

Coût SIMD

- tous ces calculs se recouvrent dans le `forall`. Ils sont donc à sommer pour chaque boucle sur `t`,
- tout comme le coût égal à un de `T`, donc un coût de $4(n-1)$ pour `H`,
- a cela, il faut ajouter le temps pour `H'` égal à un puisque nous sommes en mode SIMD et encore un pour `T'`. Donc un coût total de $4n-2$.

Coût séquentiel

Pour le code séquentiel,

- si on compte l'affectation à zéro comme une opération élémentaire de coût unitaire,
- le coût total est,

$$1 + 3(n-1) + 2(1 + 2 + \cdots + n - 1) = (n-1)(n+3) + 1$$

Le ratio d'accélération est donc de l'ordre de $\frac{n}{4}$ asymptotiquement.

Allen et Kennedy: principe

- Remplacer certaines boucles `for` par des boucles `forall`
- Utiliser la distribution de boucles pour diminuer le nombre d'instructi dans les boucles, et donc réduire les dépendances

Algorithme

- Commencer avec $k = 1$
- Supprimer dans le GDRN G toutes les arêtes de niveau inférieur à k
- Calculer les composantes fortement connexes (CFC) de G
- Pour tout CFC C dans l'ordre topologique:
  - Si C est réduit à une seule instruction S sans arête, alors générer des boucles parallèles dans toutes les dimensions restantes (i.e. niveaux k à n_S) et générer le code pour S
  - Sinon, $l = l_{min}(C)$, et générer des boucles parallèles du niveau k au niveau $l - 1$, et une boucle séquentielle pour le niveau l. Puis reboucler l'algorithme avec C et $k = l + 1$

Exemple

```
for (i=1;i<=N;i++)
  for (j=1;j<=N;i++) {
    S1: a(i+1,j+1) = a(i+1,j)+b(i,j+2);
    S2: b(i+1,j) = a(i+1,j-1)+b(i,j-1);
    S3: a(i,j+2) = b(i+1,j+1)-1;
  }
```

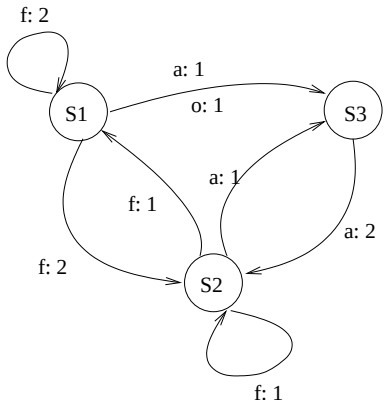

Exemple

- Flot $S1 \rightarrow S1$, variable a, distance $(0, 1)$,
- Flot $S1 \rightarrow S2$, variable a, distance $(0, 2)$,
- Flot $S2 \rightarrow S1$, variable b, distance $(1, -2)$,
- Flot $S2 \rightarrow S2$, variable b, distance $(1, 1)$,

Exemple

- Anti $S1 \rightarrow S3$, variable a, distance $(1, -2)$,
- Anti $S2 \rightarrow S3$, variable a, distance $(1, -3)$,
- Anti $S3 \rightarrow S2$, variable b, distance $(0, 1)$,
- Sortie $S1 \rightarrow S3$, variable a, distance $(1, -1)$.

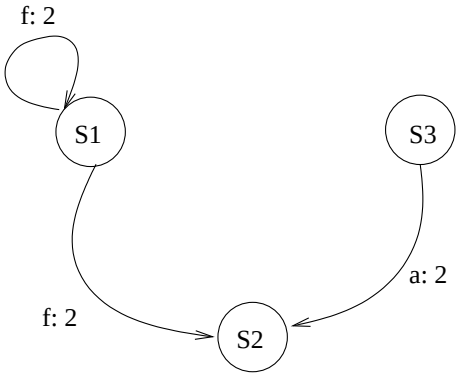
Exemple



Algorithme

- Le GDRN est fortement connexe et a des dépendances de niveau 1
- La boucle sur i sera donc séquentielle
- On enlève maintenant les dépendances de niveau 1...

GDRN modifié



Parallélisation finale

```
for (i=1;i<=N;i++) {
  for (j=1;j<=N;j++)
    S1: a(i+1,j+1) = a(i+1,j)+b(i,j+2);
  forall (j=1;j<=N;j++)
    S3: a(i,j+2) = b(i+1,j+1)-1;
  forall (j=1;j<=N;j++)
    S2: b(i+1,j) = a(i+1,j-1)+b(i,j-1);
}
```