

Parallélisme

ERIC GOUBAULT
COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE, SACLAY & CHAIRE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE/THALÈS

1

PLAN

- Communications et routage
 - Généralités
 - Cas de l'hypercube (diffusion simple)
 - Cas du tore 2D (multiplication de matrices)
- Algorithmique sur ressources hétérogènes
 - Allocation et équilibrage de charges statique/dynamique
 - Cas de l'algorithme LU: sur anneau (1D) puis tore (2D)

GÉNÉRALITÉS

- Topologie statique: réseau d'interconnexion fixe:
 - anneau, tore 2D,
 - hypercube, graphe complet etc.
- Topologie dynamique: modifiée en cours d'exécution (par configuration de *switch*)

3

CARACTÉRISTIQUES

Topologie	# proc.	d^o	diam.	# liens
Complet	p	$p - 1$	1	$\frac{p(p-1)}{2}$
Anneau	p	2	$\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$	p
Grille 2D	$\sqrt{p}\sqrt{p}$	2, 3, 4	$2(\sqrt{p} - 1)$	$2p - 2\sqrt{p}$
Tore 2D	$\sqrt{p}\sqrt{p}$	4	$2\lfloor \frac{\sqrt{p}}{2} \rfloor$	$2p$
Hypercube	$p = 2^d$	$d = \log(p)$	d	$\frac{p \log(p)}{2}$

INTÉRÊT

- Réseau complet: idéal pour le temps de communications (toujours unitaire)
- Mais: passage à l'échelle difficile! (prix du câblage, rajouter des nouveaux processeurs?)
- Anneau: pas cher, mais communications lentes, et tolérance aux pannes des liens faible
- Tore 2D, Hypercube: bons compromis entre les deux

5

COMMUNICATIONS DANS UN HYPERCUBE

- Chemins et routage dans un hypercube
- Broadcast dans un hypercube

NUMÉROTATION DES SOMMETS

Un m -cube est la donnée de:

- sommets numérotés de 0 à $2^m - 1$
- il existe une arête d'un sommet à un autre si les deux diffèrent seulement d'un bit dans leur écriture binaire

$$\begin{array}{ccc} 00 & \xrightarrow{0} & 01 \\ 1 \downarrow & & \downarrow 1 \\ 10 & \xrightarrow{1} & 11 \end{array}$$

7

CHEMINS ET ROUTAGE

- A, B deux sommets, $H(A, B)$ leur distance de Hamming (le nombre de bits qui diffèrent dans l'écriture)
- Il existe un chemin de longueur $H(A, B)$ entre A et B (récurrence facile sur $H(A, B)$)
- Il existe $H(A, B)!$ chemins entre A et B , dont seuls $H(A, B)$ sont indépendants (passent par des sommets différents)

CHEMINS ET ROUTAGE

Un routage possible: on corrige les poids faibles d'abord,

- $A = 1011$, $B = 1101$
- $A \text{ xor } B = 0110$ (ou exclusif bit à bit)
- A envoie donc son message sur le lien 1 (c'est à dire vers 1001) avec entête 0100
- Puis 1001, lisant l'entête, renvoie sur son lien 2, c'est à dire vers $1101 = B$.

Egalement algorithme dynamique qui corrige les bits selon les liens disponibles

9

PLONGEMENTS D'ANNEAUX ET DE GRILLES

Code de Gray G_m de dimension m , défini récursivement:

$$G_m = 0G_{m-1} \mid 1G_{m-1}^{rev}$$

- xG énumère les éléments de G en rajoutant x en tête de leur écriture binaire
- G^{rev} énumère les éléments de G dans l'ordre renversé
- \mid est la concaténation (de "listes" de mots binaires)

CODES DE GRAY: EXEMPLE

- $G_1 = \{0, 1\}$,
- $G_2 = \{00, 01, 11, 10\}$,
- $G_3 = \{000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100\}$,
- $G_4 = \{0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100, 1100, 1101, 1111, 1110, 1011, 1010, 1001, 1000\}$.

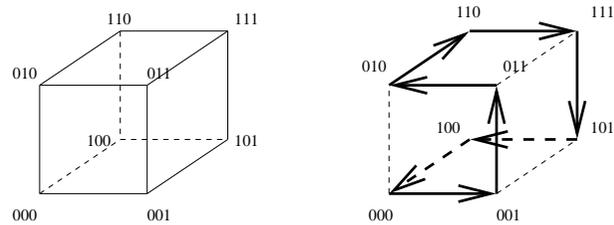
(imaginer la numérotation des processeurs sur l'anneau, dans cet ordre - un seul bit change à chaque fois)

11

CODES DE GRAY: INTÉRÊT

- Permet de définir un anneau de 2^m processeurs dans le m -cube grâce à G_m
- Permet de définir un réseau torique de taille $2^r \times 2^s$ dans un m -cube avec $r + s = m$ (utiliser le code $G_r \times G_s$)

CODES DE GRAY: EXEMPLE



13

ARBRES COUVRANTS DE L'HYPERCUBE

- Primitives: `send(cube-link, send-adr, L)`,
`receive(cube-link, recv-adr, L)`
- Les processeurs vont recevoir le message sur le lien correspondant à leur premier 1 (à partir des poids faibles)
- Et vont propager sur les liens qui précèdent ce premier 1
- Le processeur 0 est supposé avoir un 1 fictif en position m
- Tout ceci en m phases, $i = m - 1 \rightarrow 0$

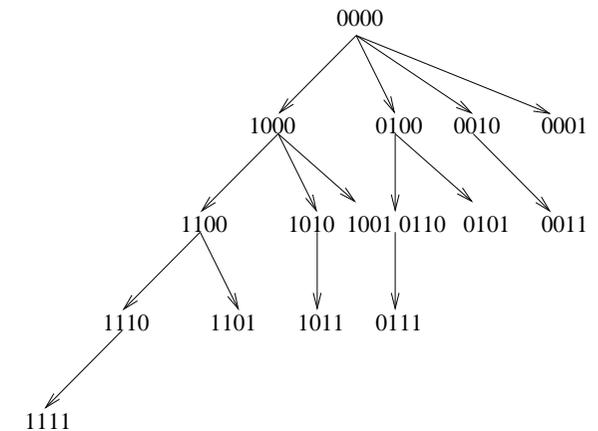
15

DIFFUSION SIMPLE DANS L'HYPERCUBE

- on suppose que le processeur 0 veut envoyer un message à tous les autres
- algorithme naïf 1: le processeur 0 envoie à tous ses voisins, puis tous ses voisins à tous leurs voisins etc.: Très **redondant!**
- algorithme naïf 2: on utilise le code de Gray et on utilise la diffusion sur l'anneau

ARBRES COUVRANTS DE L'HYPERCUBE

On construit à la fois un arbre couvrant de l'hypercube et l'algorithme de diffusion (ici $m = 4$):



EXEMPLE

Pour $m = 4$,

- phase 3: 0000 envoie le message sur le lien 3 à 1000
- phase 2: 0000 et 1000 envoient le message sur le lien 2, à 0100 et 1100 respectivement
- ainsi de suite jusqu'à la phase 0

Améliorations possibles, voir poly

17

ALGORITHMIQUE SUR GRILLE 2D

- Algorithme de Cannon
- Algorithme de Fox
- Algorithme de Snyder

PRODUIT DE MATRICES SUR GRILLE 2D

- $C = C + AB$, avec A , B et C de taille $N \times N$
- $p = q^2$: on dispose d'une grille de processeurs en tore de taille $q \times q$
- distribution des matrices par blocs: P_{ij} stocke A_{ij} , B_{ij} et C_{ij}

19

AU DÉPART:

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE CANNON

“Preskewing”:

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{10} \\ A_{22} & A_{23} & A_{20} & A_{21} \\ A_{33} & A_{30} & A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00} & B_{11} & B_{22} & B_{33} \\ B_{10} & B_{21} & B_{32} & B_{03} \\ B_{20} & B_{31} & B_{02} & B_{13} \\ B_{30} & B_{01} & B_{12} & B_{23} \end{pmatrix}$$

21

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE CANNON (2)

Rotations sur A et B :

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{00} \\ A_{12} & A_{13} & A_{10} & A_{11} \\ A_{23} & A_{20} & A_{21} & A_{22} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{10} & B_{21} & B_{32} & B_{03} \\ B_{20} & B_{31} & B_{02} & B_{13} \\ B_{30} & B_{01} & B_{12} & B_{23} \\ B_{00} & B_{11} & B_{22} & B_{33} \end{pmatrix}$$

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE CANNON

```
/* diag(A) sur col 0, diag(B) sur ligne 0 */
Rotations(A,B); /* preskewing */
```

```
/* calcul du produit de matrice */
forall (k=1; k<=sqrt(P)) {
  LocalProdMat(A,B,C);
  VerticalRotation(B,upwards);
  HorizontalRotation(A,leftwards); }

```

```
/* mouvements des donnees apres les calculs */
Rotations(A,B); /* postskewing */
```

23

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE FOX

- Pas de mouvements de données initiales
- Diffusions horizontales des diagonales de A (décalées vers la droite)
- Rotations verticales de B (de bas en haut)

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE FOX

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} + = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{00} & A_{00} & A_{00} \\ A_{11} & A_{11} & A_{11} & A_{11} \\ A_{22} & A_{22} & A_{22} & A_{22} \\ A_{33} & A_{33} & A_{33} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

25

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE FOX (2)

$$\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} + = \begin{pmatrix} A_{01} & A_{01} & A_{01} & A_{01} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{23} & A_{23} & A_{23} & A_{23} \\ A_{30} & A_{30} & A_{30} & A_{30} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \end{pmatrix}$$

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE FOX

`/* pas de mouvements de donnees avant les calculs */`

`/* calcul du produit de matrices */`

```

broadcast(A(x,x));
forall (k=1; k<sqrt(P)) {
  LocalProdMat(A,B,C);
  VerticalRotation(B,upwards);
  broadcast(A(k+x,k+x)); }

```

```

LocalProdMat(A,B,C);
VerticalRotation(B,upwards);

```

`/* pas de mouvements de donnees apres les calculs */`

27

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE SNYDER

- Transposition préalable de B
- Sommes globales sur les lignes de processeurs (des produits calculés à chaque étape)
- Accumulation sur les diagonales (décalées à chaque étape vers la droite) de C des résultats - représentées en gras dans les transparents ci-après
- Rotations verticales de B (de bas en haut)

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE SNYDER

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & \mathbf{C}_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & \mathbf{C}_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & \mathbf{C}_{33} \end{pmatrix} + = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00} & B_{10} & B_{20} & B_{30} \\ B_{01} & B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{02} & B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{03} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}$$

29

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE SNYDER (2)

$$\begin{pmatrix} C_{00} & \mathbf{C}_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{30} & C_{31} & C_{32} & \mathbf{C}_{33} \end{pmatrix} + = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{01} & B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{02} & B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{03} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ B_{00} & B_{10} & B_{20} & B_{30} \end{pmatrix}$$

ANALYSE DES ALGORITHMES

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE SNYDER

```

/* mouvements des donnees avant les calculs */
Transpose(B);
/* calcul du produit de matrices */
forall (i) {
  LocalProdMat(A,B,C);
  VerticalRotation(B,upwards); }
forall (k=1;k<sqrt(P)) {
  GlobalSum(C(i,(i+k-1) mod sqrt(P)));
  LocalProdMat(A,B,C);
  VerticalRotation(B,upwards); }
GlobalSum(C(i,(i+sqrt(P)-1) mod sqrt(P)));
/* mouvements des donnees apres les calculs */
Transpose(B);

```

31

Selon les modèles (CC, SF, WH): voir poly!

ALGORITHMIQUE HÉTÉROGÈNE

Allocation statique de tâches:

- t_1, t_2, \dots, t_p temps de cycle des processeurs
- B tâches identiques et indépendantes
- Principe: $c_i \times t_i = \text{constante}$, d'où:

$$c_i = \left\lfloor \frac{\frac{1}{t_i}}{\sum_{k=1}^p \frac{1}{t_k}} \right\rfloor \times B$$

33

ALLOCATION STATIQUE OPTIMALE

```
Distribute(B,t1,t2,...,tn)
/* initialisation: calcule ci */
for (i=1;i<=p;i++)
  c[i]=...
/* incrementer iterativement les ci minimisant le temps */
while (sum(c[])<B) {
  find k in {1,...,p} st t[k]*(c[k]+1)=min{t[i]*(c[i]+1)};
  c[k] = c[k]+1;
return(c[]);
```

ALGORITHME INCRÉMENTAL

- Allocation optimale pour tout nombre d'atomes entre 1 et B
- Programmation dynamique avec $t_1 = 3, t_2 = 5$ et $t_3 = 8$

35

ALGORITHME INCRÉMENTAL

```
Distribute(B,t1,t2,...,tp)
/* Initialisation: aucune tache a distribuer m=0 */
for (i=1;i<=p;i++) c[i]=0;
/* construit iterativement l'allocation sigma */
for (m=1;m<=B;m++)
  find(k in {1,...,p} st t[k]*(c[k]+1)=min{t[i]*(c[i]+1)})
  c[k]=c[k]+1;
  sigma[m]=k;
return(sigma[],c[]);
```

EXEMPLE

#atomes	c_1	c_2	c_3	cout	proc.sel.	alloc. σ
0	0	0	0		1	
1	1	0	0	3	2	$\sigma[1] = 1$
2	1	1	0	2.5	1	$\sigma[2] = 2$
3	2	1	0	2	3	$\sigma[3] = 1$
4	2	1	1	2	1	$\sigma[4] = 3$
5	3	1	1	1.8	2	$\sigma[5] = 1$
...						
9	5	3	1	1.67	3	$\sigma[9] = 2$
10	5	3	2	1.6		$\sigma[10] = 3$

37

RESSOURCES HÉTÉROGÈNES ET ÉQUILIBRAGE DE CHARGES

LU hétérogène:

- A chaque étape, le processeur qui possède le bloc pivot le factorise et le diffuse
- Les autres processeurs mettent à jour les colonnes restantes
- A l'étape suivante le bloc des b colonnes suivantes devient le pivot
- ainsi de suite: la taille des données passe de $(n-1) \times b$ à $(n-2) \times b$ etc.

ALLOCATION STATIQUE ÉQUILIBRANT LES CHARGES 1D

- Solution 1: on redistribue les colonnes restant à traiter à chaque étape entre les processeurs: pb, coût des communications
- Solution 2: trouver une allocation statique donnant un équilibrage de charges à chaque étapes

39

ALLOCATION STATIQUE ÉQUILIBRANT LES CHARGES 1D

- Distribution de B tâches sur p processeurs de temps de cycle t_1, t_2 etc. t_p telle que
- pour tout $i \in \{2, \dots, B\}$, le nombre de blocs de $\{i, \dots, B\}$ que possède chaque processeur P_j soit approximativement inversement proportionnel à t_j

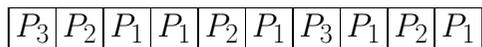
ALLOCATION 1D

- Allouer périodiquement un motif de largeur B les blocs de colonnes
- B est un paramètre, par exemple si la matrice est $(nb) \times (nb)$, $B = n$ (mais meilleur pour le recouvrement calcul communication si $B \ll n$)
- Utiliser l'algorithme précédent en sens inverse: le bloc de colonne $1 \leq k \leq B$ alloué sur $\sigma(B - k + 1)$
- Cette distribution est quasi-optimale pour tout sous-ensemble $[i, B]$ de colonnes

41

EXEMPLE

$n = B = 10, t_1 = 3, t_2 = 5, t_3 = 8$ le motif sera:



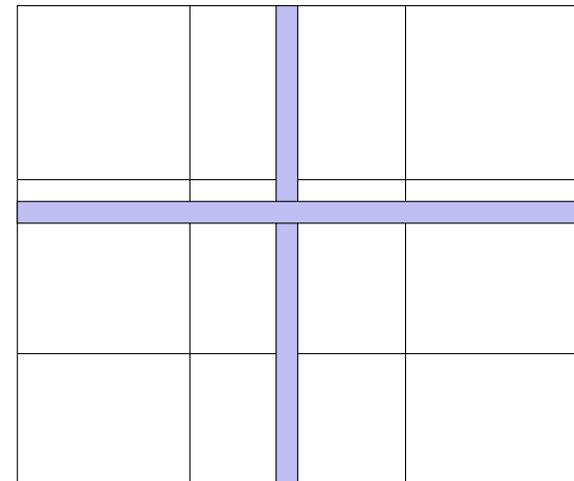
ALLOCATION STATIQUE 2D

Exemple: Multiplication de matrices sur grille homogène:

- Algorithme par blocs de ScaLAPACK
- Double diffusion horizontale et verticale
- S'adapte au cas de matrices et grilles
- Aucune redistribution initiale des données

43

MULTIPLICATION DE MATRICES - CAS HOMOGÈNE



MULTIPLICATION - CAS INHOMOGÈNE “RÉGULIER”

- Allouer des rectangles de tailles différentes aux processeurs, en fonction de leur vitesse relative
- $p \times q$ processeurs $P_{i,j}$ de temps de cycle $t_{i,j}$

45

EQUILIBRAGE DE CHARGE PARFAIT

- Uniquement quand la matrice des temps de cycle $T = (t_{i,j})$ est de rang 1
- Exemple, rang 2, $P_{2,2}$ est partiellement inactif:

	1	$\frac{1}{2}$
1	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 2$
$\frac{1}{3}$	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 5$

- Exemple, rang 1, équilibrage parfait:

	1	$\frac{1}{2}$
1	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 2$
$\frac{1}{3}$	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 6$

PROBLÈME

Il faut optimiser:

- Objectif *Obj1*:

$$\min_{\sum_i r_i = 1; \sum_j c_j = 1} \max_{i,j} \{r_i \times t_{i,j} \times c_j\}$$

- Objectif *Obj2* (dual):

$$\max_{r_i \times t_{i,j} \times c_j \leq 1} \left\{ \left(\sum_i r_i \right) \times \left(\sum_j c_j \right) \right\}$$

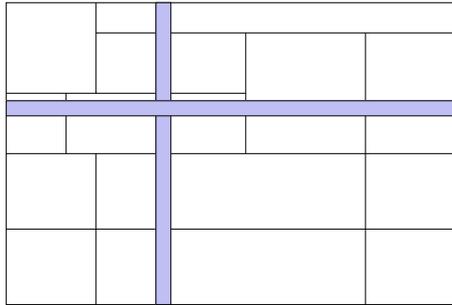
47

RÉGULARITÉ?

- En fait, la position des processeurs dans la grille n'est pas une donnée du problème
- Toutes les permutations sont possibles, et il faut chercher la meilleure
- Problème NP-complet
- Conclusion: l'équilibrage 2D est très difficile!

PARTITIONNEMENT LIBRE

où comment faire avec p (premier) processeurs??



49

PARTITIONNEMENT LIBRE

- p processeurs de vitesses s_1, s_2, \dots, s_n de somme 1 (normalisées)
- Partitionner le carré unité en p rectangles de surfaces s_1, s_2, \dots, s_n
- Surface des rectangles \Leftrightarrow vitesses relatives des processeurs
- Forme des rectangles \Leftrightarrow minimiser les communications

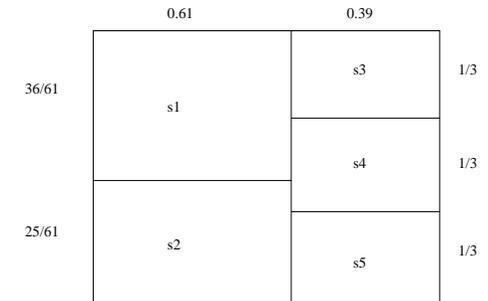
GÉOMÉTRIQUEMENT

- Partitionner le carré unité en p rectangles d'aires fixées s_1, s_2, \dots, s_p afin de minimiser
 - soit la somme des demi-périmètres des rectangles dans le cas des communications séquentielles
 - soit le plus grand des demi-périmètres des rectangles dans le cas de communications parallèles
- Problèmes NP-complets

51

EXEMPLE

- $p = 5$ rectangles R_1, \dots, R_5
- Aires $s_1 = 0.36, s_2 = 0.25, s_3 = s_4 = s_5 = 0.13$



EXEMPLE

- Demi-périmètre maximal pour R_1 , approximativement 1.2002
 - borne inférieure absolue $2\sqrt{s_1} = 1.2$ atteinte lorsque le plus grand rectangle est un carré (pas possible ici)
- Somme des demi-périmètres = 4.39
 - borne absolue inférieure $\sum_{i=1}^p 2\sqrt{s_i} = 4.36$ atteinte lorsque tous les rectangles sont des carrés