Parallélisme

Eric Goubault
Commissariat à l'Energie Atomique & Chaire Ecole Polytechnique/Thalès
Saclay

PRAM

Le modèle le plus répandu est la PRAM (Parallel Random Access Machine), qui est composée de :

- une suite d'instructions à exécuter plus un pointeur sur l'instruction courante,
- une suite non bornée de processeurs parallèles,
- une mémoire partagée par l'ensemble des processeurs.

La PRAM ne possédant qu'une seule mémoire et qu'un seul pointeur de programme, tous les processeurs exécutent la même opération au même moment.

Communications

Coût d'accès de n'importe quel nombre de processeurs à n'importe quel sous-ensemble de la mémoire, est d'une unité. Trois types d'hypothèses sur les accès simultanés à une même case mémoire:

- EREW (Exclusive Read Exclusive Write): seul un processeur peut lire et écrire à un moment donné sur une case donnée de la mémoire partagée. C'est un modèle proche des machines réelles (et de ce que l'on a vu à propos des threads JAVA).
- CREW (Concurrent Read Exclusive Write): plusieurs processeurs peuvent lire en même temps une même case, par contre, un seul à la fois peut y écrire.

Hypothèses (suite)

- CRCW (Concurrent Read Concurrent Write): Plusieurs processeurs peuvent lire ou écrire en même temps sur la même case de la mémoire partagée:
  - mode consistant: tous les processeurs qui écrivent en même temps sur la même case écrivent la même valeur.
  - mode arbitraire: c'est la valeur du dernier processeur qui écrit qui est prise en compte.
  - mode fusion: une fonction associative (définie au niveau de la mémoire), est appliquée à toutes les écritures simultanées sur une case donnée. Ce peuvent être par exemple, une fonction maximum, un ou bit à bit etc.

Technique de saut de pointeur

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une suite de nombres. Il s'agit de calculer la suite $(y_1, \ldots, y_n)$ définie par $y_1 = x_1$ et, pour $1 \leq k \leq n$, par

$$y_k = y_{k-1} \otimes x_k$$

Pour résoudre ce problème on choisit une PRAM avec n processeurs.

Algorithme

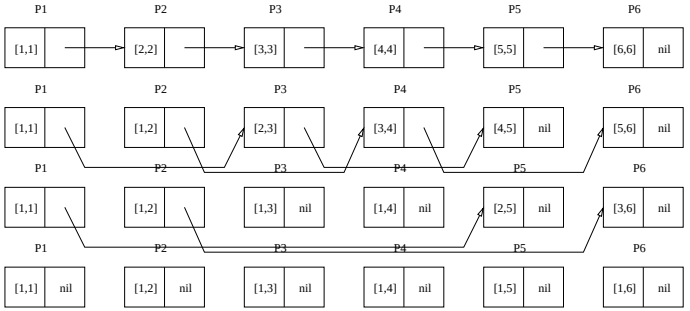
```
for each processor i in parallel {
  y[i] = x[i]; }
while (exists object i s.t. next[i] not nil) {
  for each processor i in parallel {
    if (next[i] not nil) {
      y[next[i]] =_next[i] op_next[i](y[i],y[next[i]]);
      next[i] =_i next[next[i]]; } } }
```


En prenant les notations

- `op_j` pour préciser que l'opération `op` s'effectue sur le processeur `j`.
- `=_j` pour préciser que l'affectation est faite par le processeur `j`.

Illustration

Notons $[i, j] = x_i \otimes x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_j$ pour $i < j$.



Principe

Le principe de l'algorithme est simple:

- à chaque étape de la boucle, les listes courantes sont dédoublées en des listes des objets en position paire,
- et des objets en position impaire.
- C'est le même principe que le "diviser pour régner" classique en algorithmique séquentielle.

Variante

Remarquez que si on avait écrit

```
y[i] =_i op_i(y[i],y[next[i]]);
```

à la place de

```
y[next[i]] =_next[i] op_next[i](y[i],y[next[i]]);
```

on aurait obtenu l'ensemble des préfixes dans l'ordre inverse, c'est-à-dire que P_1 aurait contenu le produit $[1, 6]$, P_2 $[2, 6]$, jusqu'à P_6 qui aurait calculé $[6, 6]$.

Détail technique

Une boucle parallèle du style:

```
for each processor i in parallel
  A[i] = B[i];
```

a en fait exactement la même sémantique que le code suivant:

```
for each processor i in parallel
  temp[i] = B[i];
for each processor i in parallel
  A[i] = temp[i];
```

dans lequel on commence par effectuer les lectures en parallèle, puis, dans un deuxième temps, les écritures parallèles.

Complexité

Il y a clairement $\lfloor log(n) \rfloor$ itérations et on obtient facilement un algorithme CREW en temps logarithmique. Il se trouve que l'on obtient la même complexité dans le cas EREW, cela en transformant simplement les affectations dans la boucles, en passant par un tableau temporaire:

```
d[i] = d[i]+d[next[i]];
```

devient:

```
temp[i] = d[next[i]];
d[i] = d[i]+temp[i];
```

Code JAVA

On souhaite écrire un programme calculant les sommes partielles des éléments de `t`. Pour cela, on crée n (ici $n = 8$) threads, le thread p étant chargé de calculer $\Sigma_{i=0}^{i=p-1}$ `t[i]`.

```
public class SommePartielle extends Thread {
    int pos,i;
    int t[][];
    SommePartielle(int position,int tab[][]) {
      pos = position;
      t=tab;  }
```


Code JAVA

```
    int pow(int a,int b) {
      int ctr,r ;
      r=1;
      for (ctr=1;ctr<=b;ctr++) r = r * a;
      return r ; };
    public void run() {
      int i,j;
      for (i=1;i<=3;i++) {
        j = pos-pow(2,i-1);
        if (j>=0) {
          while (t[j][i-1]==0) {} ; // attendre que le resultat soit pret
          t[pos][i] = t[pos][i-1]+t[j][i-1] ;
          } else { t[pos][i] = t[pos][i-1] ; }; }; } }
```


Principe

- L'idée est que le résultat de chacune des $3{=}log_2(n)$ étapes, disons l'étape i, du saut de pointeur se trouve en $t[proc][i]$ ($proc$ étant le numéro du processeur concerné, entre 0 et 8).
- Au départ, on initialise (par l'appel au constructeur `SommePartielle`) les valeurs que voient chaque processeur: $t[proc][0]$.
- Le code ci-dessous initialise le tableau d'origine de façon aléatoire, puis appelle le calcul parallèle de la réduction par saut de pointeur:


```
import java.util.* ;

public class Exo3 {
    public static void main(String[] args) {
        int[][] tableau = new int[8][4];
        int i,j;
        Random r = new Random();
        for (i=0;i<8;i++) {
            tableau[i][0] =  r.nextInt(8)+1 ;
            for (j=1;j<4;j++) {
                tableau[i][j]=0; }; };
        for (i=0;i<8;i++) {
            new SommePartielle(i,tableau).start(); };
```

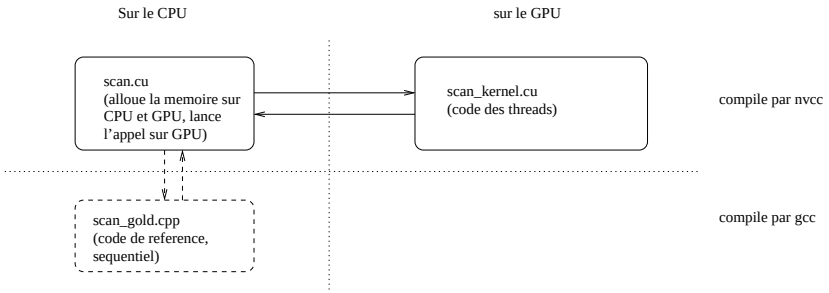
```
        for (i=0;i<8;i++) {
           while (tableau[i][3]==0) {}; };

        for (i=0;i<4;i++) {
            System.out.print("\n");
            for (j=0;j<8;j++) {
                System.out.print(tableau[j][i]+" ");
            };
        };
        System.out.print("\n");
    }
}
```


Principe de l'algorithme (naif) CUDA

Limitée à des tableaux de 512 éléments (nombre de threads maxi sur un multi-processeur) - cf. "projects/scan" pour la doc et les codes

```
for d := 1 to log2n do
    forall k in parallel do
        if k ≥ 2^d then
            x[out][k] := x[in][k − 2^(d-1)] + x[in][k]
        else
            x[out][k] := x[in][k]
    swap(in, out)
```


Principe de l'architecture du code CUDA



Implémentation CUDA (naive)

(`scan_kernel.cu`)

```
__global__ void scan_naive(float *g_odata, float *g_idata
{
// Dynamically allocated shared memory for scan kernels
extern  __shared__  float temp[];
int thid = threadIdx.x;
int pout = 0;
int pin = 1;
// Cache the computational window in shared memory
temp[pout*n + thid] = (thid > 0) ? g_idata[thid-1] : 0;
```

Implémentation CUDA

```
for (int offset = 1; offset < n; offset *= 2)
{
  pout = 1 - pout;
  pin  = 1 - pout;
  __syncthreads();
  temp[pout*n+thid] = temp[pin*n+thid];
  if (thid >= offset)
    temp[pout*n+thid] += temp[pin*n+thid - offset];
  }
  __syncthreads();
  g_odata[thid] = temp[pout*n+thid];
}
```


Implémentation CUDA

(scan.cu)

```
int main( int argc, char** argv)
{    runTest( argc, argv);
     CUT_EXIT(argc, argv); }
void runTest( int argc, char** argv)
{
CUT_DEVICE_INIT(argc, argv);...
// initialize the input data on the host to be integer values
// between 0 and 1000
for( unsigned int i = 0; i < num_elements; ++i)
  h_data[i] = floorf(1000*(rand()/(float)RAND_MAX));
// compute reference solution
float* reference = (float*) malloc( mem_size);
computeGold( reference, h_data, num_elements);
```


Implémentation CUDA

```
// allocate device memory input and output arrays
float* d_idata;
float* d_odata[3];
CUDA_SAFE_CALL( cudaMalloc( (void**) &d_idata, mem_size))
CUDA_SAFE_CALL( cudaMalloc( (void**) &(d_odata[0]), mem_s
CUDA_SAFE_CALL( cudaMalloc( (void**) &(d_odata[1]), mem_s
CUDA_SAFE_CALL( cudaMalloc( (void**) &(d_odata[2]), mem_s
// copy host memory to device input array
CUDA_SAFE_CALL( cudaMemcpy( d_idata, h_data, mem_size, cu
```


Implémentation CUDA

```
// setup execution parameters
// Note that these scans only support a single thread-blo
// but we invoke them here on many blocks so that we can
// performance
#ifndef __DEVICE_EMULATION__
    dim3  grid(256, 1, 1);
#else
    dim3  grid(1, 1, 1); // only one run block in device
#endif
    dim3  threads(num_threads*2, 1, 1);

// make sure there are no CUDA errors before we start
CUT_CHECK_ERROR("Kernel execution failed");
```

Implémentation CUDA

```
unsigned int numIterations = 100;
for (unsigned int i = 0; i < numIterations; ++i)
  {
  scan_naive<<< grid, threads, 2 * shared_mem_size >>>
            (d_odata[0], d_idata, num_elements);
  }
cudaThreadSynchronize();
...
```


Circuit Eulérien

- On souhaite calculer à l'aide d'une machine PRAM EREW la profondeur de tous les nœuds d'un arbre binaire.
- C'est l'extension naturelle du problème de la section précédente, pour la fonction "profondeur", sur une structure de données plus complexe que les listes.
- Un algorithme séquentiel effectuerait un parcours en largeur d'abord, et la complexité dans le pire cas serait de $O(n)$ où n est le nombre de noeuds de l'arbre.

Première parallélisation

Une première façon de paralléliser cet algorithme consiste à propager une "vague" de la racine de l'arbre vers ses feuilles. Cette vague atteint tous les nœuds de même profondeur au même moment et leur affecte la valeur d'un compteur correspondant à la profondeur actuelle.

```
actif[0] = true;
continue = true;
p = 0; /* p est la profondeur courante */

forall j in [1,n-1]
  actif[j] = false;
```



```
while (continue == true)
  forall j in [0,n-1] such that (actif[j] == true) {
    continue = false;
    prof[j] = p;
    actif[j] = false;
    if (fg[j] != nil) {
      actif[fg[j]] = true;
      continue = true;
      p++; }
    if (fd[j] != nil) {
      actif[fd[j]] = true;
      continue = true;
      p++; }
```

Problème

- La complexité de ce premier algorithme est de $O(log(n))$ pour les arbres équilibrés, $O(n)$ dans le cas le pire (arbres "déséquilibrés") sur une PRAM CRCW.
- Nous souhaitons maintenant écrire un second algorithme dont la complexité est meilleure que la précédente.

Circuit Eulérien

- Un circuit Eulerien d'un graphe orienté G est un circuit passant une et une seule fois par chaque arc de G.
- Les sommets peuvent être visités plusieurs fois lors du parcours.
- Un graphe orienté G possède un circuit Eulerien si et seulement si le degré entrant de chaque nœud v est égal à son degré sortant.

A partir d'un arbre binaire...

- Il est possible d'associer un cycle Eulerien à tout arbre binaire dans lequel on remplace les arêtes par deux arcs orientés de sens opposés,
- car alors le degré entrant est alors trivialement égal au degré sortant.

Principe de l'algorithme

- On organise les noeuds de l'arbre dans une liste, qui est le parcours d'un circuit Eulérien, et on applique l'algorithme de somme partielle par saut de pointeur avec des bons coefficients...
- Il est en effet possible de définir un chemin reliant tous les processeurs et tel que la somme des poids rencontrés sur un chemin allant de la source à un nœud C_i soit égale à la profondeur du nœud i dans l'arbre initial.

Voir poly (sur le web). Voir TD pour d'autres utilisations du saut de pointeur.

Comparaison des différentes PRAM

Calcul le maximum d'un tableau `A` à `n` éléments sur une machine CRCW (mode consistant) à $\mathtt{n}^2$ processeurs. Chaque processeur va contenir un couple de valeurs `A[i]`, `A[j]` plus d'autres variables intermédiaires:

```
for each i from 1 to n in parallel
  m[i] = TRUE;
for each i, j from 1 to n in parallel
  if (A[i] < A[j]) m[i] = FALSE;
for each i from 1 to n in parallel
  if (m[i] = TRUE) max = A[i];
```

Maximum en temps constant sur une CRCW ! $/^t \lfloor log(n) \rfloor$ dans le cas d'une CREW, et même d'une EREW.

Comparaison des différentes PRAM

On a un n-uplet $(e_1, \ldots, e_n)$ de nombres tous distincts, et que l'on cherche si un nombre donné e est l'un de ces e_i. Sur une machine CREW, on a un programme qui résoud ce problème en temps constant, en stockant chaque e_i sur des processeurs distincts (donc n processeurs en tout):

```
res = FALSE;
for each i in parallel
  if (e == e[i])
    res = TRUE;
```


Comparaison des différentes PRAM

- Comme tous les e_i sont distincts, il ne peut y avoir qu'un processeur qui essaie d'écrire sur `res`, par contre, on utilise ici bien évidemment le fait que tous les processeurs peuvent lire `e` en même temps.
- Sur une PRAM EREW, il faut dupliquer la valeur de e sur tous les processeurs. Ceci ne peut se faire en un temps meilleur que $log(n)$, par dichotomie.

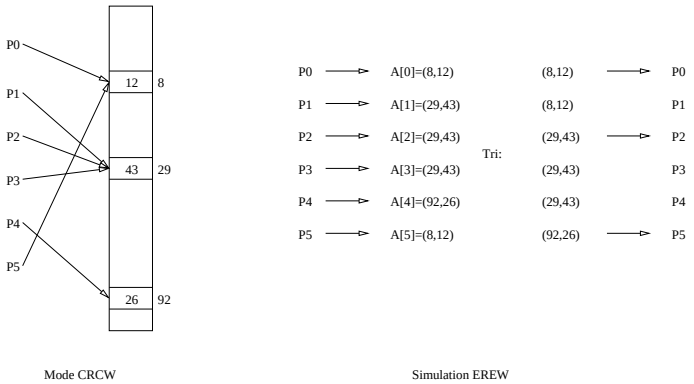
Résultat général

Théorème Tout algorithme sur une machine PRAM CRCW (en mode consistant) à p processeurs ne peut pas être plus de $O(log(p))$ fois plus rapide que le meilleur algorithme PRAM EREW à p processeurs pour le même problème.

Preuve

- Soit un algorithme CRCW à p processeurs.
- On utilise un tableau auxilaire A de p éléments, qui va nous permettre de réorganiser les accès mémoires.
- Quand un processeur P_i de l'algorithme CRCW écrit une donnée x_i à l'adresse l_i en mémoire, le processeur P_i de l'algorithme EREW effectue l'écriture exclusive $A[i] = (l_i, x_i)$. On trie alors le tableau A suivant la première coordonnée en temps $O(log(p))$ (voir algorithme de Cole).
- Une fois A trié, chaque processeur P_i de l'algorithme EREW inspecte les deux cases adjacentes $A[i] = (l_j, x_j)$ et $A[i-1] = (l_k, x_k)$, où $0 \leq j, k \leq p-1$. Si $l_j \neq l_k$ ou si $i = 0$, le processeur P_i écrit la valeur x_j à l'adresse l_j, sinon il ne fait rien.

Illustration



Simulations

Théorème (Brent) Soit A un algorithme comportant un nombre total de m opérations et qui s'exécute en temps t sur une PRAM (avec un nombre de processeurs quelconque) Alors on peut simuler A en temps $O\left(\frac{m}{p} + t\right)$ sur une PRAM de même type avec p processeurs.

Preuve

- à l'étape i, A effectue $m(i)$ opérations, avec $\Sigma_{i=1}^{n} m(i) = m$.
- On simule l'étape i avec p processeurs en temps $\lceil \frac{m(i)}{p} \rceil \leq \frac{m(i)}{p} + 1$.
- On obtient le résultat en sommant sur les étapes.

Application

- Calcul du maximum, sur une PRAM EREW.
- On peut agencer ce calcul en temps $O(logn)$ à l'aide d'un arbre binaire.
- A l'étape un, on procède paire par paire avec $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ processeurs, puis on continue avec les maxima des paires deux par deux etc. C'est à la première étape qu'on a besoin du plus grand nombre de processeurs, donc il en faut $O(n)$.

Formellement

Si $n = 2^m$, si le tableau `A` est de taille $2n$, et si on veut calculer le maximum des n éléments de `A` en position `A[n], A[n+1],...,A[2n-1]`, on obtient le résultat dans `A[1]` après exécution de l'algorithme:

```
for (k=m-1; k>=0; k--)
  for each j from 2^k to 2^(k+1)-1 in parallel
    A[j] = max(A[2j],A[2j+1]);
```

On dispose maintenant de $p < n$ processeurs. Par le théorème de Brent on peut simuler l'algorithme précédent en temps $O\left(\frac{n}{p} + logn\right)$, car le nombre d'opérations total est $m = n - 1$. Si on choisit $p = \frac{n}{logn}$, on obtient le même temps d'exécution, mais avec moins de processeurs!

Notions d'efficacité

Soit P un problème de taille n à résoudre, et soit $T_{seq}(n)$ le temps du meilleur algorithme séquentiel connu pour résoudre P. Soit maintenant un algorithme parallèle PRAM qui résout P en temps $T_{par}(p)$ avec p processeurs. Le facteur d'accélération est défini comme:

$$S_p = \frac{T_{seq}(n)}{T_{par}(p)}$$

et l'*efficacité* comme

$$e_p = \frac{T_{seq}(n)}{pT_{par}(p)}$$

Enfin, le *travail* de l'algorithme est

$$W_p = pT_{par}(p)$$

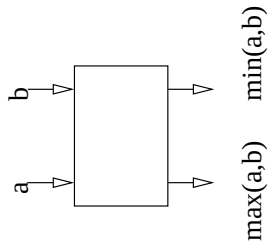
Résultat général

Proposition Soit A un algorithme qui s'exécute en temps t sur une PRAM avec p processeurs. Alors on peut simuler A sur une PRAM de même type avec $p' \leq p$ processeurs, en temps $O\left(\frac{tp}{p'}\right)$.

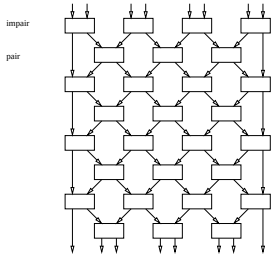
Preuve:
En effet, avec p' processeurs, on simule chaque étape de A en temps proportionnel à $\lceil \frac{p}{p'} \rceil$. On obtient donc un temps total de $O\left(\frac{p}{p'}t\right) = O\left(\frac{tp}{p'}\right)$.

Tris et réseaux de tris

Un réseau de tri est une machine constituée uniquement d'une brique très simple, le comparateur: "circuit" qui prend deux entrées, ici, a et b, et qui renvoie deux sorties: la sortie "haute" est $min(a, b)$, la sortie "basse" est $max(a, b)$.



Tri pair-impair



Il y a un total de $p(2p-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ comparateurs dans le réseau. Le tri s'effectue en temps n, et le travail est de $O(n^3)$. C'est donc sous-optimal.

Version réaliste

- Supposons que nous ayons un réseau linéaire de processeurs dans lequel les processeurs ne peuvent communiquer qu'avec leurs voisins de gauche et de droite
- Sauf pour les deux extrémités, mais cela a peu d'importance ici, et on aurait pu tout à fait considérer un réseau en anneau comme on en verra plus tard.

Principe

- Supposons que l'on ait n données à trier et que l'on dispose de p processeurs, de telle façon que n est divisible par p.
- On va mettre les données à trier par paquet de $\frac{n}{p}$ sur chaque processeur.
- Chacune de ces suites est triée en temps $O(\frac{n}{p}log\frac{n}{p})$.

Principe

- Ensuite l'algorithme de tri fonctionne en p étapes d'échanges alternés, selon le principe du réseau de tri pair-impair, mais en échangeant des suites de taille $\frac{n}{p}$ à la place d'un seul élément.
- Quand deux processeurs voisins communiquent, leurs deux suites de taille $\frac{n}{p}$ sont fusionnées, le processeur de gauche conserve la première moitié, et celui de droite, la deuxième moitié.
- On obtient donc un temps de calcul en $O\left(\frac{n}{p}log\frac{n}{p} + n\right)$ et un travail de $O(n(p + log\frac{n}{p}))$.
- L'algorithme est optimal pour $p \leq logn$.