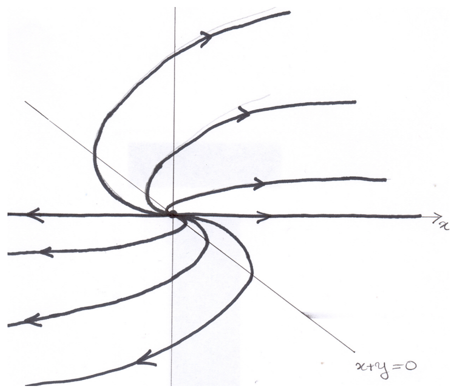

Figure 1: Allure, dans le repère standard, du portrait de phase du noeud propre instable($\lambda > 0$) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
.

Exercice 1. Soit $A = \begin{bmatrix} -13 & -42 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$. On calcule $\det(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$ donc il existe une valeur propre de partie réelle > 0. Par Routh! l'origine est instable (plus précis: $\mathrm{sp}(A) = \{-1, +1\}$, l'origine est un point selle).

Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. On calcule $\det(B) = 1$ et $\mathrm{tr}(B) = -2$ donc double valeur propre -1. Par Routh! l'origine est asymptotiquement stable (précisément: noeud impropre stable).

Exercice 2. Soit $C = \begin{bmatrix} 15 & 49 \\ -4 & -13 \end{bmatrix}$. On calcule $\det(C) = 1$, $\mathrm{tr}(C) = 2$ donc double valeur propre $\lambda = 1$. Comme $C \neq Id$, C n'est pas diagonalisable, l'origine est un noeud impropre instable. La direction propre est $\{v \in \mathbb{R}^2 : C.v = \lambda v\} = \mathbb{R}.V$ avec $V = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$. On complète avec $W = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ tel que $C.W = V + W$, i.e., dans la base (V, W), C prend la forme canonique $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette base est directe: $\det([VW]) = 1$. Le portrait de phase est donc l'image par une affinité préservant l'orientation du portrait de phase canonique représenté Figure 1.

Exercice 3.

(i) $\dot{x} = f(x) := (x^2 + 1)\cos(\pi x)$. Les fonctions constamment égales à un élément de $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ sont solutions. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique: deux solutions ne peuvent se croiser sans coincider et toute solution est incluse dans un compact $[n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]$ lui-même inclus dans le domaine de f. Donc les solutions maximales sont toutes définies sur $\mathbb{R}$.

(ii) $\dot{x} = 1+t^2+x^2$. Soit $x :]a,b[\to \mathbb{R}$ une solution maximale, $t_0 \in I$. $\dot{x} \geq 1$ donc x est croissante avec $x(t) \geq t - t_0 + x(t_0)$ pour $t \geq t_0$.

Gronwall avec $\dot{x} \geq x^2$. Il existe $t_0 < t_+ < b$ tel que $x(t_+) > 0$. Le lemme de Gronwall dans sa version réelle donne: $x(t) \geq y(t)$ pour tout $t \geq t_+$ si $y(t) = (t_1 - t)^{-1}$ pour $t_1 = t_+ + 1/x(t_+) > t_+$. Donc $b \leq t_1 < \infty$. Un raisonnement similaire montre que $x(t) \leq t - t_0 + x(t_0)$, $x(t_-) < 0$ et $x(t) \leq (t_- + 1/x(t_-) - t)^{-1}$ donc $a > -\infty$. Les solutions ont une durée de vie $b-a$ finie.

Calcul direct. x admet un inverse C^1 $t : x(]a,b|) \to]a,b[$ avec $t'(x) = (1+t(x)^2+x^2)^{-1}$. Pour $a < t_1 < t_2 < b$, on obtient: $t_2 - t_1 = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} t'(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1}\,dx = \pi$. Donc $b - a \leq \pi$, le temps de vie $b-a$ est fini.

(iii) $\dot{x} = 1 - t^2 + x^2$. Soit $x :]a,b[\to \mathbb{R}$ une solution maximale, $t_0 \in I$. On a $\dot{x} \geq 1 - t^2$ donc $x \geq t - t^3/3 + const$ pour $t \geq t_0$ et $x \leq t - t^3/3 + const$ pour $t \leq t_0$.

Pour $y(t) = x(t) - t$, $\dot{y} = \dot{x} - 1 = -t^2 + (y+t)^2 = y^2 + 2yt$. Remarquons: $y = 0$ est solution donc les autres solutions sont de signe constant; $z(t) = -y(-t)$ vérifie aussi $\dot{z} = z^2 + 2zt$. Il suffit donc d'étudier le cas $y > 0$ ($x > t$).

$a = -\infty$: on a $t < x \leq t - t^3/3 + const$ pour $t \leq t_0$, pas d'explosion. $b < \infty$ par contradiction: sinon $\dot{y} \geq y^2$ pour $t \geq 0$ et $y > 0$ et on procède comme en (ii) pour montrer que y et donc x explose en temps positif.

Les solutions maximales $x > t$ (resp. $x < t$) sont donc définies sur des intervalles de la forme $]-\infty, b[$ avec $b < \infty$ (resp. $]a, \infty[$ avec $a > -\infty$), tandis que $x = t$ est la seule solution définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

(1) Posons $z = x_1 - x_2$, on a $\|\dot{z}(t)\| = \|f_1(t, x_1(t)) - f_2(t, x_2(t))\|$ donc

$$\begin{aligned}\|\dot{z}(t)\| \leq \|f_1(t,x_2(t)) - f_2(t,x_2(t))\| + \|f_1(t,x_1(t)) - f_1(t,x_2(t))\| \\ \leq \epsilon(t) + k\|z(t)\|\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall implique que $\|z(t)\| \leq w(t)$ pour $t \geq 0$ si $\dot{w}(t) = \epsilon(t) + kw(t)$ telle que $w(0) = 0$, soit:

$$w(t) = \int_0^t e^{k(t-s)} \epsilon(s)\,ds$$

(2) On a donc

$$w(t) \leq e^{kt} \int_0^t \epsilon(s) e^{-s}\,ds. \tag{1}$$

Remarquons que, $\epsilon(s)$ et T étant fixés, pour tout $A < \infty$ il existe f_1 et f_2 telles que:

$$\|x_1(T) - x_2(T)\| > A \int_0^T \sup_x \|f_1(x_1, s) - f_2(x_2, s)|\,ds$$

En effet, il suffit de prendre $n = 1$, $f_1(t, x) = kx$ et $f_2(t, x) = kx + \epsilon(t)$ avec ϵ une fonction positive. On a alors:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{kt}, \qquad x_2(t) = x_2(0)e^{kt} + \int_0^t e^{k(t-s)}\epsilon(s)\,ds$$

donc $x_2 - x_1 = \int_0^t e^{k(t-s)}\epsilon(s)\,ds$: (1) est atteinte. Pour $\epsilon(s) = 1$, $\int_0^T \epsilon(s)\,ds = T$, alors que:

$$|x_1(T) - x_2(T)| = e^{kT}\frac{1 - e^{-kT}}{k}$$

d'où un exemple avec $A = e^{kT}/2T \to \infty$ si $k \to \infty$.

Exercice 5.

(a) L'équation étant C^q, le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètre dans sa version "globale" (Prop 4.3 p 103 plutôt que Thm. 2.2 page 47) assure l'existence d'un développement limité $x_\epsilon(t) = x_0(t)+\epsilon x_1(t)+\cdots+\epsilon^q x_q(t)+o(\epsilon^q)$ en le paramètre ϵ et ce développement peut être dérivé par rapport à t terme à terme jusqu'à l'ordre 2, l'ordre de l'équation différentielle (i.e., on a un lemme de Schwartz pour ces dérivées en ϵ et t).

Soit en substituant ce développement dans l'équation et en identifiant, soit en considérant les dérivées par rapport à ϵ de l'équation avec $x_k = \frac{1}{k!}\partial^k x_\epsilon/\partial\epsilon^k$, on obtient $\ddot{x}_0 + x_0 = 0$ et

$$\forall k \geq 1 \ \ddot{x}_k + x_k + tx_{k-1} = 0$$

La condition initiale sur x_ϵ est indépendante de ϵ. Finalement,

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \& x_0(0) = 0 \& x_0'(0) = 1 \implies x_0(t) = \sin t$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 + tx_0 = 0 \& x_1(0) = x_1'(0) = 0 \implies x_1 = \frac{t^2\cos t - t\sin t}{4}$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 + tx_1 = 0 \& x_2(0) = x_2'(0) = 0 \implies$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{96}\left(-15\sin t + 15t^2\sin t - 3t^4\sin t + 15t\cos t - 10t^3\cos t\right) \\ &= -\frac{5}{32}\sin(t) - 1/32\,t^4\sin(t) + \frac{5}{32}t^2\sin(t) - \frac{5}{48}t^3\cos(t) + \frac{5}{32}t\cos(t) \end{aligned}$$

Chacune de ces équations est facilement résolue. Par exemple avec Maple, les instructions suivantes effacent x1 et le remplacent par la solution x de l'équation $\ddot{x}_1(t) + x_1(t) = -tx_0(t)$ de condition initiale $x_0(0) = x_0'(0) = 0$:

```
unassign(x1);
dsolve({diff(x1(t),t,t)+x1(t)=-t*x0(t),x1(0)=0,D(x1)(0)=0},x1(t));
assign(%);
```

(b) $T(0) = \pi$. $T = T(\epsilon)$ vérifie $x_\epsilon(T) = 0$. On a $\partial x_\epsilon(t)/\partial t = -1$ en $t = \pi$. Le théorème des fonctions implicites (Thm. 1.3 p. 25) s'applique donc et fournit

$\epsilon_0, t_0 > 0$ et $\tau :]-\epsilon_0, \epsilon_0[\to \mathbb{R}$ aussi différentiable que $(\epsilon, t) \mapsto x_\epsilon(t)$ tels que pour $|t-\pi| < t_0$ et $|\epsilon| < \epsilon_0$,

$$x_\epsilon(t) = 0 \iff t = \tau(\epsilon)$$

Quitte à réduire ϵ_0, on montre que $x_\epsilon(t) > 0$ pour tout $t \in]0, \pi - t_0/2[$: il existe $t_1 > 0$ tel que $x'_\epsilon(t) > 1/2$ pour $0 < t < t_1$, $|\epsilon| < \epsilon_0$; $x_\epsilon(t) > 0$ pour $t_1/2 < t < \pi - t_0/2[$ (par continuité uniforme de $\partial x_\epsilon(t)/\partial t$ et $x_\epsilon(t)$). Donc $T(\epsilon) = \tau(\epsilon)$ pour $|\epsilon| < \epsilon_0$.

T étant C^∞, elle admet en particulier un développement limité d'ordre 2, $T(\epsilon) = \pi + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + o(\epsilon^2)$. Par unicité du DL, il suffit de substituer les DL dans l'équation $x_\epsilon(T(\epsilon)) = 0$ et d'identifier les puissances de ϵ. Encore avec Maple,

```
x(t):=x0(t)+x1(t)*epsilon+x2(t)*epsilon*epsilon;
z:=subs(t=Pi+t1*epsilon+t2*epsilon,x(t));
taylor(z,epsilon=0,3);
```

produit le DL de $x_\epsilon(T(\epsilon)) = 0$ dont il suffit d'annuler les coefficients pour obtenir celui de $T(\epsilon)$. On trouve:

$$T(\epsilon) = \pi - \frac{\pi^2}{4}\epsilon + \left(\frac{\pi^3}{6} - \frac{5}{32}\pi\right)\epsilon^2 + o(\epsilon^2) = \pi - \frac{\pi^2}{4}\epsilon + \left(\frac{16}{96}\pi^3 - \frac{15}{96}\pi\right)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$