A. Stabilité, Fonctions de Liapounov

(1) $$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Définition

Une solution x de (1) est dite **stable** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que}$$
$$|x(t_0) - x_0(t_0)| \leq \delta \Longrightarrow \forall t \geq t_0 \ |x(t) - x_0(t)| \leq \varepsilon$$

Une solution $x_0(t)$ est **asymptotiquement stable** ssi elle est **stable** ET il existe $\delta > 0$ tel que pour toute solution

$$|x(t_0) - x_0(t_0)| \leq \delta \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0$$

Soit x_0 un point d'équilibre de l'équation autonome définie par X :

$$X(x_0) = 0$$

Théorème

S'il existe une fonction L, continue, définie sur un voisinage W de x_0 telle que

1) $L(x_0) = 0$, et $L(x) > 0$ si $x \neq x_0$

2) si $x \neq x_0$ alors $t \to L(\phi^t(x))$ est strictement décroissante tant qu'elle est définie.

Alors x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable

Remarque :

-L s'appelle fonction de Liapounov

-le cas le plus simple vérifiant les hypothèses du théorème est évidemment lorsque :

$$\langle \nabla L(x), X(x) \rangle < 0$$

pour $x \neq x_0$

-Dans le cas non-autonome, la condition

$$\langle \nabla L(x), X(t,x) \rangle < -a(x)$$

où $a(x) > 0$ pour $x \neq x_0$ entraîne la stabilité asymptotique.

<u>Exemples</u> :

1) Minimum d'un gradient : si $X(x) = -\nabla V(x)$ l'équilibre est stable si on a un minimum local de V : V est alors fonction de Liapounov de X

2) Oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + x = 0$$

ne peut être asymptotiquement stable. Les trajectoires sont des cercles autour de l'origine (centre). Mais il est stable.

Lorsqu'on ajoute un terme de frottement, ($f > 0$) :

$$\ddot{x} + f\dot{x} + x = 0$$

on obtient un foyer (deux valeurs propres complexes de module < 1)

De même pour

$$\ddot{x} + f\dot{x} + \sin(x) = 0$$

$x = 0$ est asymptotiquement stable.

3)

$$\ddot{x} + f\dot{x} + \nabla V(x) = 0$$

$(f > 0)$

$L(x,p) = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$

$$\nabla L(x,p) X(x,p) = -p^2$$

4) $\dot{x}(t) = Ax(t)$

$$L(x) = \int_0^\infty |e^{sA}x|^2 ds$$

B. Stabilité vue sur le linéarisé

Théorème[Routh non-linéaire] Soit x_0 un équilibre du champ de vecteurs X. Soit A la matrice du linéarisé de valeurs propres λ_j.
Si $\forall j, \Re(\lambda_j) < 0$, le système est asymptotiquement stable

Démonstration On construit une fonction de Liapounov pour le linéarisé, et on montre que c'est encore une fonction de Liapounov dans le cas non-linéaire.

Remarques :

1) De même, si X dépend du temps,
$X(t, 0) = 0$ et $DX(t, 0) = A$ est indépendant de t et

$$X(t, x) = Ax + X_1(t, x)$$

où $X_1(t, x) = o(x)$ uniformément en t. Si $\Re(\lambda_j) < 0$, x_0 est asymptotiquement stable.

2) On a $R(t) = e^{tA}$, et la condition sur $R(t)$ est d'avoir ses valeurs propres de module < 1.

3) S'il existe une valeur propre de partie réelle > 0 l'équilibre ne peut pas être stable. Si les parties réelles sont seulement ≤ 0 on ne peut conclure.

Exemple : Un champ electrique n'a pas d'équilibre stable (hors des conducteurs) : $\Delta V = 0$ entraîne que V ne peut avoir de minimum local

D'ou les difficultés pour piéger des particules chargées !

Remarque : Si on a un système conservatif, $\ddot{x} = -\nabla V(x)$ avec $dV(x_0) = 0$, le linéarisé est solution de $\frac{d}{dt}R(t) = A(t)R(t)$ avec $A(t)$ de trace nulle. D'après Liouville $\det R(T) = 1$ et en particulier elle ne peut avoir toutes ses valeurs propres de module < 1.

On peut aussi remarquer que le flot préserve le volume, et donc, ne peut être asymptotiquement stable.

Cas d' un système avec terme de frottement.

Au lieu de

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\nabla V(x)$$

on a

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\nabla V(x) - fy$$

la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x_0) & 0 \end{pmatrix}$

devient

$$A_f(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x_0) & -f \end{pmatrix}$$

Notons que $\mathtt{trace}(A_f) = -f$, d'où (Liouville) $\mathtt{det}(R_f(t)) = e^{-ft}$

Pour $n = 2$, les v.p. de A sont

-soit $\alpha, -\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

-soit $i\alpha, -i\alpha$

Dans le premier cas, si $\alpha \neq 0$, on aura encore pour A_f une valeur propre de partie réelle > 0

Dans le second cas, on aura deux valeurs propres de partie réelle égale à $-ft$ donc < 0.

De même en dimension plus grande.

C. Equations à coefficients périodiques, théorie de Floquet

Soit une équation non autonome mais périodique

$$X(t+T,x) = X(t)$$

Posons $X(t,x) = A(t)x + X_1(t,x)$

Si $R(t)$ est la résolvante $\frac{d}{dt}R(t) = A(t)R(t)$

$$R(t+T) = R(t)R(T)$$

Soit P tel que $e^{tP} = R(T)$, on pose $y(t) = e^{tP}R(t)^{-1}x(t)$. Alors, $y(t)$ vérifie

$$\dot{y}(t) = Py(t) + Y_1(t, y(t))$$

avec $Y_1(t, y) = e^{tP}R(t)^{-1}X_1(t, R(t)e^{-tP}y(t))$ qui est T-périodique.

Théorème La solution x est asymptotiquement stable si et seulement si y l'est :
si B a ses valeurs propres de partie réelle < 0, ou encore $R(T)$ a ses valeurs propres de module < 1

1) Si le système est autonome il y a toujours une v.p. égale à 1. On peut montrer qu'une forme légèrement affaiblie de stabilité (appelée stabilité orbitale) a lieu si les autres v.p. sont de module < 1.

2) Dans le cas conservatif, on aura la stabilité des systèmes avec frottement si $R(T)$ a ses valeurs propres sur le cercle unité, et différentes de $\{\pm 1\}$.

Exemples : Equation de Mathieu non-linéaire (où $\omega(t)$ est T périodique.).

1) Balançoire

il s'agit de rendre instable $\ddot{x} + \omega(t)\sin(x)$. Il faut pour cela rendre instable

$$\ddot{x} + \omega(t)x = 0$$

Si on suppose $\omega(t) = 1 + \varepsilon \sin(\alpha t)$, $R_\varepsilon(t)$ ne peut avoir des valeurs propres de module > 1 que si $R_0(t)$ a ses valeurs propres égales à 1. Il faut donc que T soit multiple de la demie-période π.

2) Pendule inversé :

La stabilité de l'équation est une question difficile. Mais pour le système avec frottement,

$$\ddot{x} + f\dot{x} + \omega(t)\,\mathsf{sin}(x) = 0$$

sera stable en $x = 0$ ou $x = \pi$ si et seulement si les valeurs propres de $\ddot{x} + \omega(t)x = 0$ sont sur le cercle unité i.e. on est dans les zones de stabilité.