B. Espace tangent

Définition Soit S une sous-variété, et ϕ une carte locale en x_0. On pose $d\phi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p) = T_{x_0}S$

et on l'appelle espace tangent (vectoriel). On appelle espace tangent affine en x_0 l'unique espace affine passant par x_0 de direction $T_{x_0}S$.

1) Pour le graphe de g, c'est le graphe de sa différentielle.

2) Pour une nappe, l'image de $d\rho$

3) Pour un ensemble défini implicitement, le noyau de $dF(x)$ qui est aussi l'orthogonal de ∇F.

C'est aussi l'espace vectoriel engendré par les vecteurs vitesse de courbes tracées sur S.

C. Champs de vecteurs sur une sous variété

Théorème Soit $Z(t,x)$ un système dynamique défini sur un voisinage de la sous-variété <u>**fermée**</u> V. Alors le flot préserve V si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in V, \quad Z(t,x) \in T_x V$$

D. Fonctions sur les sous-variétés

Soit f une fonction définie sur S, sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Définition On dit que x est point critique de f si et seulement si $df(x)$ s'annule sur T_xS. Les extréma de f sont des points critiques.

1) pour un graphe $z = g(x, y)$, et $f = z$ ce sont les extréma de g

2) pour une nappe paramétrée, ce sont les points où $\mathrm{Im} d\rho \subset \ker df$.

3) Pour une équation implicite, ce sont les points où $\ker dF(x) \subset \ker df(x)$ ou encore si $F = (F_1, \ldots, F_k)$, ∇f est combinaison linéaire des ∇F_j.

Remarques

1) Si $k = 1$ on a (multiplicateur de Lagrange)

$$df(x) = \lambda dF(x)$$

2)Le théorème est en défaut si S n'est pas une sous-variété. Le minimum de x sur (t^2, t^3) est atteint en $(0, 0)$ où pourtant la "direction tangente" est portée par l'axe des x