

## 4. Equations différentielles non-linéaires II.

Flot, linéarisation, redressement

## A. Flots, champs de vecteurs, orbites

Pour une équation différentielle

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et dont les solutions sont supposées définies pour tout  $t$ , on pose :

$$\phi_{t_0}^{t_1}(x_0) = x(t_1)$$

où  $x$  est la solution de (1). On a

$$\frac{d}{dt}\phi_{t_0}^t(x) = f(t, \phi_{t_0}^t(x))$$

$$\phi_{t_0}^{t_0}(x) = x$$

Champ de vecteurs = équation différentielle indépendante du temps (autonome) :

$$\dot{x} = f(x)$$

Complet = solutions définies pour tout temps

On suppose dans la suite tous les champs complets

Pour un champ de vecteurs, on pose

$$\phi_{t_0}^{t_1} = \phi_0^{t_1-t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \phi^{t_1-t_0}$$

## Propriétés :

1)  $\phi_{t_1}^{t_2} \circ \phi_{t_0}^{t_1} = \phi_{t_0}^{t_2}$

2) Si  $X$  est  $C^k$ , le flot  $\phi_{t_0}^{t_1}$  est un difféomorphisme  $C^k$  d'inverse  $\phi_{t_1}^{t_0}$  (th. de Cauchy-Lipschitz à paramètres)

3) Orbites : Dans le cas autonome

$$\mathcal{O}_x = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi^t(x)$$

Elles réalisent une partition de l'espace (en particulier elles sont disjointes)

$$\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y \neq \emptyset \implies \exists t \quad \phi^t(x) = y \text{ et } \mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$$

Les orbites sont :

-des points (équilibre)

-des cercles (orbite périodique)

- des images bijectives continues de  $\mathbb{R}$

Le tracé de ces orbites constitue le portrait de phase du champ de vecteurs

## Questions :

Peut on calculer la différentielle du flot ?

Connaissant une solution de (1), que dire des solutions voisines ?

Des équations voisines ?

Que peut on dire de la stabilité des solutions, par variation des conditions initiales ? d'éventuels paramètres ?

Peut-on classer les portraits de phase en familles "semblables"

## B. Linéarisation et théorie des perturbations

### Calcul de la différentielle

Posons  $L(t_0, t, x) = d\phi_{t_0}^t(x)$ . C'est une application linéaire  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}L(t_0, t, x) = df(t, \phi_{t_0}^t(x))L(t_0, t, x) \\ L(t_0, t_0, x) = Id \end{cases}$$

Attention : Même si  $X$  est autonome, l'équation de  $L(t_0, t, x)$  est en général dépendante de  $t$ , sauf si  $x(t)$  est constante.

## Calcul des perturbations

Soit

$$\begin{cases} \dot{x}_\mu(t) = f_\mu(t, x_\mu(t)) \\ x_\mu(t_0) = u_0 \end{cases}$$

On calcule  $\xi_1(t) = \frac{d}{d\mu}x_\mu(t)$  et les coefficients des termes d'ordre supérieur en posant

$$x_\mu(t) = x_0(t) + \mu\xi_1(t) + \mu^2\xi_2(t) + \dots + \mu^k\xi_k(t) + o(\mu^k)$$

et en substituant dans l'équation :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = df_0(t, x_0(t))\xi_1(t) + \\ \left(\frac{\partial}{\partial \mu} f_\mu\right)(t, x_0(t))|_{\mu=0} \\ \xi_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\xi_1(t) = \int_{t_0}^t L(t_0, t, u_0)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} f_\mu\right)(t, x_0(t))|_{\mu=0}$$

## Exemple : Equation de Van der Pol

$$\begin{cases} \ddot{x}_\mu(t) + \mu(1 - x_\mu(t)^2)\dot{x}_\mu(t) + x_\mu(t) = 0 \\ x_\mu(0) = 1, \dot{x}_\mu(0) = 0 \end{cases}$$

$$x_0(t) = \cos(t)$$

$$\ddot{\xi}_1(t) + \xi_1(t) = (1 - x_0(t)^2)\dot{x}_0(t)$$

$$\xi_1(t) = -\frac{3}{8}t \cos(t) + \frac{1}{32} \sin(3t) + \frac{9}{32} \sin(t)$$

Remarque : On a de nouveau des termes séculaires (i.e. en  $t \cos(t)$ ).

## C. Théorème des fonctions implicites et d'inversion locale

$k \geq 1$ ,  $U, V, W$  ouverts d'espaces de Banach.

**Théorème**[Fonctions implicites]

Soit  $f \in C^k(U \times V, W)$  telle que  $f(u_0, v_0) = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial v} f(u_0, v_0)$  soit inversible. Alors il existe des ouverts  $U' \subset U$  contenant  $u_0$ ,  $V' \subset V$  contenant  $v_0$  et une application  $\psi \in C^k(U', V')$  telle que

$$(u, v) \in U' \times V', f(u, v) = 0 \iff v = \psi(u)$$

Démonstration : Picard paramétré par  $u$  appliqué à

$$v \rightarrow v - \frac{\partial}{\partial v} f(u_0, v_0)^{-1} f(u, v)$$

## Théorème [Inversion locale]

Soit  $\phi \in C^k(U, V)$  telle que  $\phi(u_0) = v_0$  et  $d\phi(u_0)$  soit inversible. Alors il existe des voisinages  $U' \subset U$  contenant  $u_0$ ,  $V' \subset V$  contenant  $v_0$  et une application  $\psi \in C^k(V', U')$  telle que là où elles sont définies  $\psi = \phi^{-1}$ .

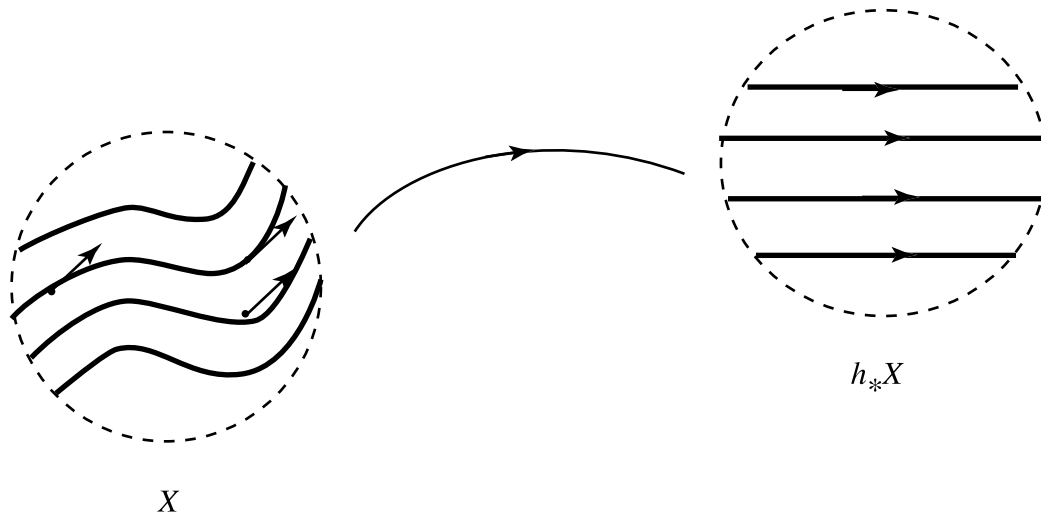
**Démonstration** : On applique les fonctions implicites à  $f(u, v) = v - \phi(u)$  sur la variable  $u$ .

## D. Conjugaison, redressement et premier retour

$$Y(t, y) = h_* X(t, y) = dh(h^{-1}(y)) X(t, h^{-1}(y))$$

$$\psi_{t_0}^t = h \circ \phi_{t_0}^t \circ h^{-1}$$

**Théorème**[de redressement] Si  $X(x_0) \neq 0$ , il existe un difféomorphisme  $h$  au voisinage de  $x_0$  (i.e. des coordonnées locales), telles que  $h_* X = (1, 0, \dots, 0, 0)$



(Attention : ce théorème NE s'applique PAS si  $X$  dépend du temps !)