3. Equations différentielles non-linéaires I.

Temps de vie, Flots

A. Durée de vie d'une solution

Soit $f : \mathbb{R} \times \Omega \to E$ vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz

(1) $$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Intervalle maximal de définition :

Intervalle (ouvert) J, réunion des intervalles sur lesquels est définie une solution de l'équation (1).

Théorème Si $J =]t_-, t_+[$, et si $t_+ < +\infty$ alors la solution maximale sort définitivement de tout compact (fermé borné).

Démonstration : Si x_+ est un point d'accumulation de $x(t)$ lorsque t tend vers t_+, on applique Cauchy-Lipschitz (fort) au voisinage de x_+.

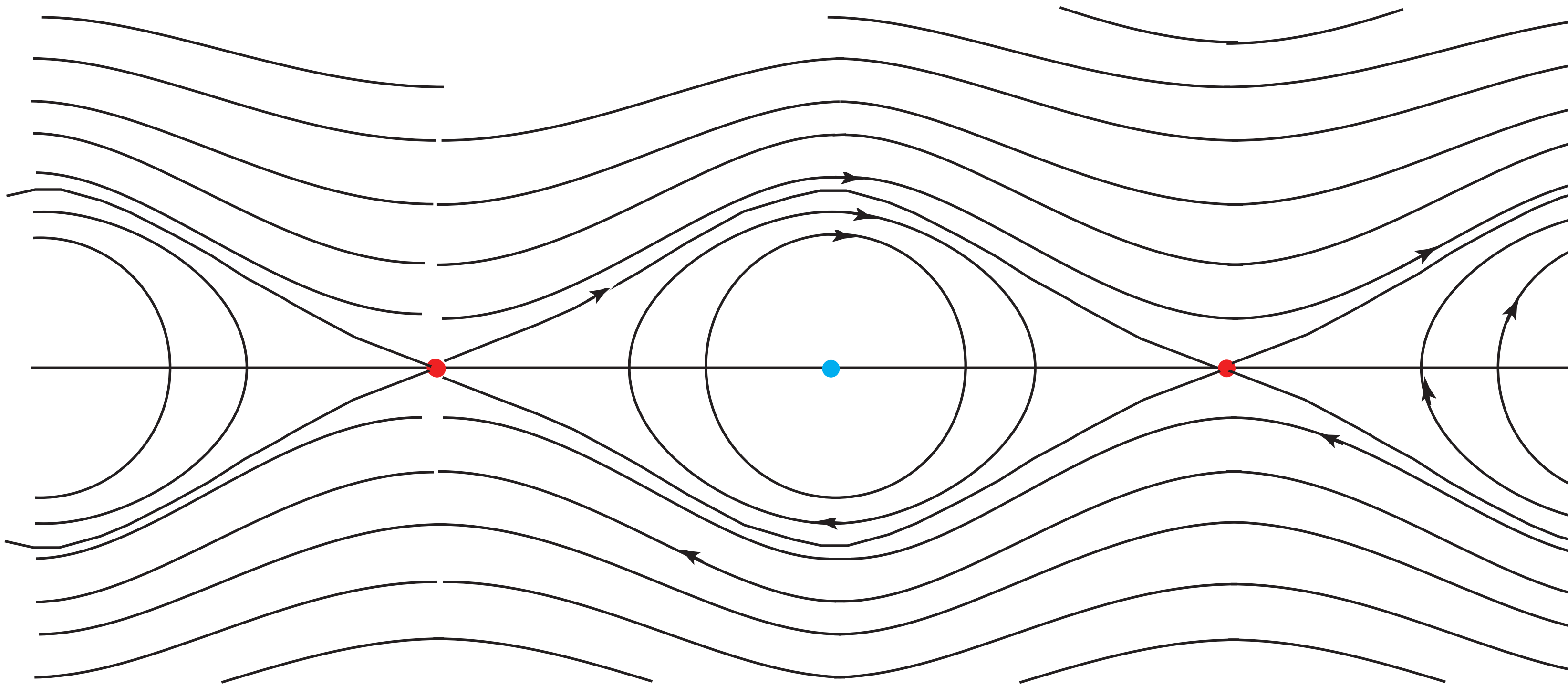
Application :

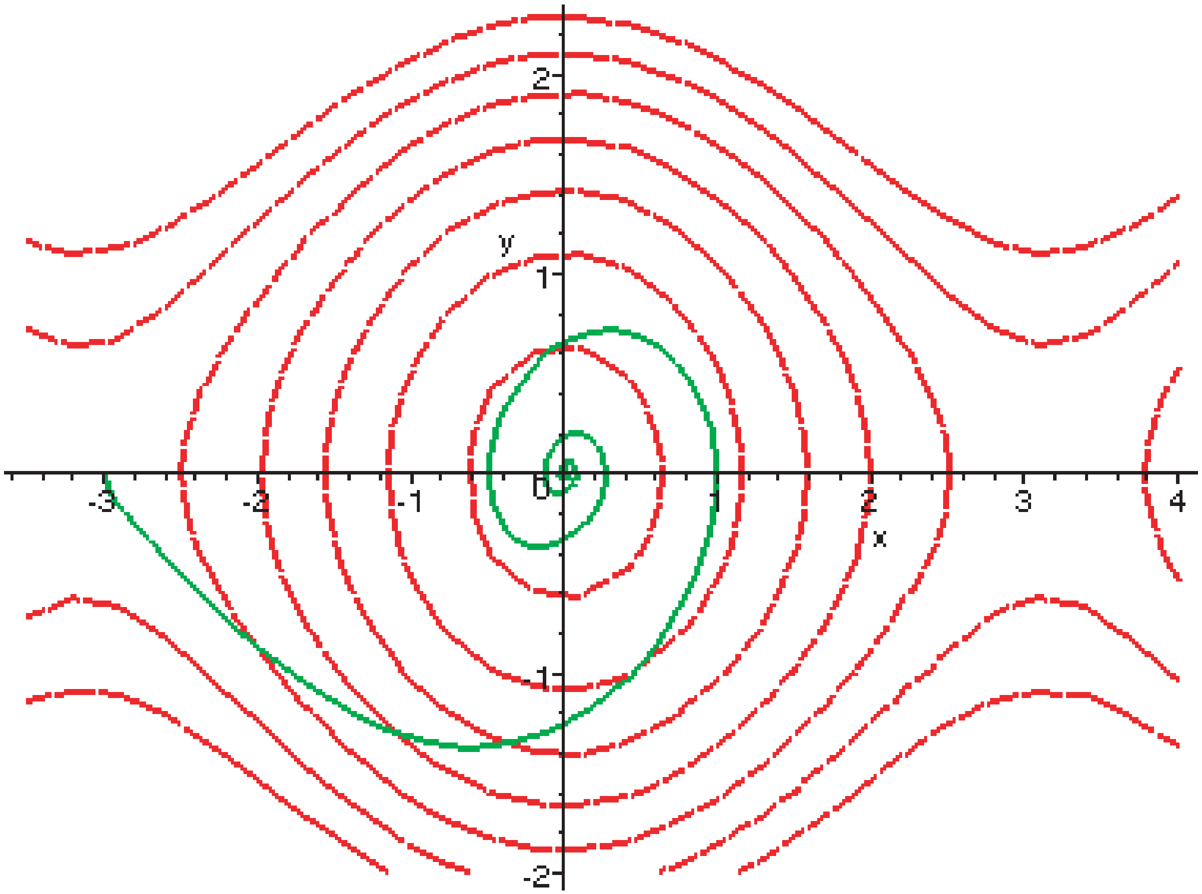
Si $< x, f(t,x) > \leq 0$ pour $|x| \geq R$ assez grand, alors les solutions sont définies jusqu'en $+\infty$.

Exemples :

1) $f(t,x,y) = (-x^3 + y^2 + 2tx, -y^5 + 3tx^2 + t^2y^3)$

2) Systèmes conservatif sur un niveau d'énergie borné. Version avec frottement.





y
x
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Théorème[Lemme de Gronwall]

Soit $g(t,\rho)$ vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, et ρ une solution de $\dot{\rho}(t) = g(t,\rho(t))$. Alors si $|\dot{x}(t)| \leq g(t,|x(t)|)$, et $|x(t_0)| \leq \rho(t_0)$ on a $|x(t)| \leq \rho(t)$ pour tout $t \geq t_0$.

On en déduit que si $f(t,x) \leq g(t,|x|)$ et x est solution de (1) avec $x(0) \leq \rho(0)$, alors $|x(t)| \leq \rho(t)$. En particulier si ρ est définie sur $[t_0,t_1]$, alors x est définie sur ce même intervalle.

Conséquences :

1) Si $|f(t,x)| \leq A|x|+B$ alors les solutions sont définies pour tout temps :

$\dot{\rho}(t) = A\rho(t) + B$ a pour solutions

$$\rho(t) = e^{A(t-t_0)}\rho(t_0) + \frac{B}{A}(e^{A(t-t_0)} - 1)$$

et donc x sera bornée sur tout intervalle de temps compact.

2) Cela donne une estimation explicite de la continuité des solutions en fonction de paramètres ou des conditions initiales :

C. Tube des solutions et divergence des solutions

1) Tube de solutions :

Théorème Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, soit x une solution définie sur $[t_0, t_1]$. Il existe un réel δ tel que quel que soit la solution y telle que $|x(t_0) - y(t_0)| \leq \delta$, y est définie sur $[t_0, t_1]$. De plus

$$|y(t) - x(t)| \leq \delta e^{k|t-t_0|}$$

i.e. le temps de vie des solutions dépend « continûment » de la condition initiale.

2) Estimation de la continuité :

Théorème Si $X_1(t,x), X_2(t,x)$ sont Lipschitziennes de rapport k, et $|X_1 - X_2| \leq \varepsilon$, on a sur leur intervalle de définition commun

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq$$
$$|x_1(t_0) - x_2(t_0)| e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1)$$

ATTENTION : l'estimation se dégrade exponentiellement avec le temps !