

## 2. Equations différentielles : Cauchy-Lipschitz et introduction aux équations linéaires

Les équations de degré  $k$  se ramènent au degré 1

$$(1) \quad \frac{d^k}{dt^k}x = F\left(t, x, \frac{d}{dt}x, \frac{d^2}{dt^2}x, \dots, \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}x\right)$$

devient

en posant  $y = (y_1, \dots, y_k)$

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 & = y_2 \\ \dot{y}_2 & = y_3 \\ \vdots & = \vdots \\ \dot{y}_{k-1} & = y_k \\ \dot{y}_k & = F(t, y_1, y_2, \dots, y_k) \end{cases}$$

Les solutions sont exactement :

$$\left(x, \frac{d}{dt}x, \frac{d^2}{dt^2}x, \dots, \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}x\right)$$

où  $x$  est solution de (1).

## A. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

On considère pour  $X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue, où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , l'équation

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = X(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Théorème** Si  $X$  est Lipschitz en la seconde variable, alors quel que soit  $(\tau_0, u_0) \in I \times \Omega$ , il existe  $\alpha, \varepsilon > 0$  tel que si  $|x_0 - u_0| < \varepsilon$ ,  $|t_0 - \tau_0| < \varepsilon$ , il existe une solution unique  $x$  de l'équation différentielle, définie sur  $]\tau_0 - \alpha, \tau_0 + \alpha[$ , vérifiant la condition initiale  $x(t_0) = x_0$ .

**Démonstration** : on applique Picard à

$$T : C^0([\tau_0 - \alpha, \tau_0 + \alpha], \Omega) \rightarrow C^0([\tau_0 - \alpha, \tau_0 + \alpha], \Omega)$$

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds$$

Elle est bien définie et contractante pour  $\alpha$  assez petit.

## Remarque :

1. le théorème s'applique par exemple si  $X$  est  $C^1$  en  $x$
2. Interprétation graphique de l'unicité : si on trace les courbes  $(t, x(t))$  par chaque point  $(t_0, x_0)$  passe une seule courbe solution.
3. la version à paramètres de Picard permet de dire que la solution dépend continument de  $x_0$ . De même si  $X_\lambda(t, x)$  dépend continument de  $\lambda$  et est Lipschitzienne de rapport  $k$  en  $t, x$  ( $k$  indépendant de  $\lambda$ ) alors la solution dépend continument de  $\lambda$ . Idem pour le cas  $C^k$ .
4. Si  $X$  n'est que continue il y a existence mais pas nécessairement unicité (théorème de Peano).

Exemple : si  $X(t, x) = 2|x|^{1/2}$  les fonctions

$$x(t) = \text{signe}(t - t_0)(t - t_0)^2$$

$$x(t) = 0$$

sont deux solutions de l'équation s'annulant en  $t_0$ .

5. Le théorème ne s'applique pas pour des équations implicites  $g(t, x, \dot{x}) = 0$ , sauf au voisinage des points où le théorème des fonctions implicites vous ramène à une équation du type  $\dot{x} = f(t, x)$ .

Exemple :  $\dot{x}(t)^2 - x(t) = 0$ .

Ce phénomène est lié à la théorie des enveloppes.

6. La continuité ne s'applique pas pour les "perturbations singulières"

$$\varepsilon \dot{x}(t) = X(t, x(t))$$

lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

## B. Equations linéaires à coefficients constants

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$   $A \in M_n(\mathbb{R})$  l'équation

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

a pour solution  $x(t) = e^{tA}x(0)$

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Si  $A$  est diagonalisable et  $D = P^{-1}AP$  ( $D$  diagonale) alors  $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ .

Sinon  $A = D + N$  avec  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente (i.e.  $N^k = 0$  pour  $k$  assez grand)  $ND = DN$  et  $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$

On calcule  $e^{tD}$  par diagonalisation, et  $e^{tN}$  en utilisant

$$e^{tN} = I + tN + \frac{t^2 N^2}{2} + \frac{t^3 N^3}{3!} + \dots + \frac{t^{k-1} N^{k-1}}{(k-1)!}$$

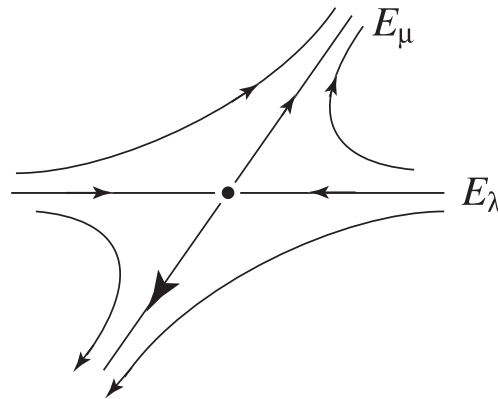
ATTENTION : En général  $e^{(A+B)} \neq e^A e^B$ .

**Portraits de phase :**

**Courbes  $z(t) = e^{tA}z(0)$  ( $\lambda, \mu$  valeurs propres de  $A$ )**

Point selle (instable) :

$$\lambda < 0 < \mu$$

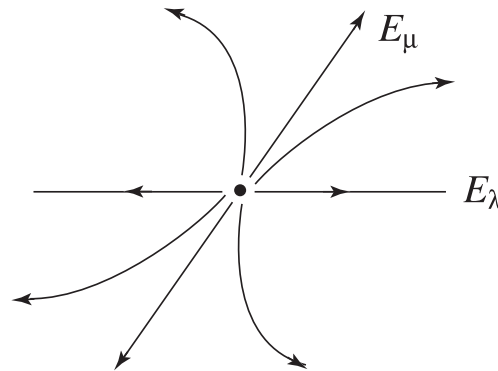


## Noeud :

deux valeurs propres réelle distinctes et de même signe :

(attractif donc stable si  $\lambda < \mu < 0$

répulsif donc instable si  $\lambda > \mu > 0$ )

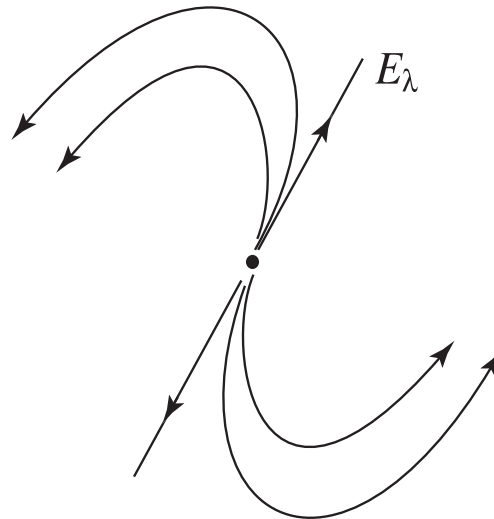


Noeud impropre :

$\lambda = \mu; A$  non diagonalisable

(attractif donc stable si  $\lambda = \mu < 0$

répulsif donc instable si  $\lambda = \mu > 0$ )

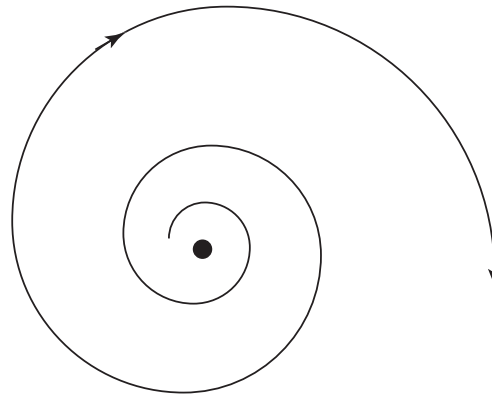


Foyer :

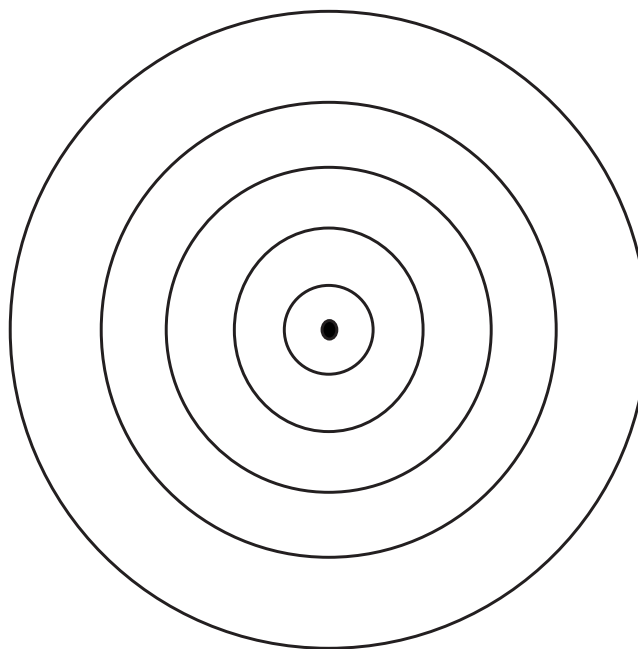
$$\Im(\lambda) = \Im(\mu) \neq 0$$

(répulsif donc instable si  $\Re(\lambda) = \Re(\mu) > 0$ , attractif donc stable si

$$\Re(\lambda) = \Re(\mu) < 0$$



Centre :  $\lambda = -\mu$  imaginaires pures.



**Définition**[Stabilité des systèmes linéaires]

On dit que l'origine est stable si toute solution reste bornée lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Elle est asymptotiquement stable ssi pour toute solution

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

## Théorème [Critère de stabilité de Routh]

L'origine est asymptotiquement stable ssi

$$\forall j \quad \Re(\lambda_j) < 0$$

Elle est stable si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a)  $\forall j \quad \Re(\lambda_j) \leq 0$

b)  $A$  est « diagonalisable en les valeurs propre de partie réelle nulle ».