

MAT431 - 2005-2006.
EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

Devoir

À RENDRE AVANT LE 19 DECEMBRE

Exercice 1. Discuter la stabilité de l'origine pour le système linéaire associé aux matrices:

$$\begin{pmatrix} -13 & -42 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Dessiner le portrait de phase de

$$\begin{pmatrix} 15 & 49 \\ -4 & -13 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

On considère l'équation

$$\dot{x} = (x^2 + 1) \cos(\pi x)$$

Quel est le temps de vie des solutions.

le temps de vie des solutions des équations suivantes est-il infini ?

$$\dot{x} = 1 + t^2 + x^2$$

$$\dot{x} = 1 - t^2 + x^2$$

Dans le second cas, on pourra commencer par étudier une solution de condition initiale $x(0) > 0$, et étudier la fonction $x(t) - t$.

Exercice 4.

1) Montrer que si $f_1(t, x), f_2(t, x)$ vérifient

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_1(s, x) - f_2(s, x)| = \varepsilon(s)$$

et $f_1(t, x)$ est Lipschitzienne en x de rapport k

alors pour x_1, x_2 solutions de

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t)), \quad \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_2(t))$$

de même condition initiale en $t_0 = 0$

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \int_0^t (\exp(k(t-s)) \varepsilon(s) ds$$

2) En déduire que si

$$\int_0^T \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_1(s, x) - f_2(s, x)| ds \leq \varepsilon$$

on a sur $[0, T]$ une estimation

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C(T)\varepsilon$$

où $C(T)$ est une constante ne dépendant que de T .

Exercice 5. On considère la famille d'équations linéaires dépendant du paramètre ε

$$\ddot{x}(t) + (1 + \varepsilon t)x(t) = 0$$

a) Calculer pour les conditions initiales $x_\varepsilon(0) = 0, x'_\varepsilon(0) = 1$ le développement asymptotique à l'ordre 2 d'une solution (Il est permis de s'aider de Maple, pourvu de transcrire le programme utilisé).

b) Calculer le développement asymptotique de la fonction $T(\varepsilon)$ définie comme le plus petit zéro non nul de la solution $x_\varepsilon(t)$ vérifiant la condition initiale $x_\varepsilon(0) = 0$.

FIN