MPRI 2010-11 Cours 2-7-1

Examen du 30-11-2010

1 Théorie des types

On a construit en théorie des types de Martin-Löf un terme clos :

$$f : \Pi x : N.\Pi y : N.\Sigma z : N.x = y + z \vee y = x + z$$

Quelles peuvent être les formes normales de :
- $\pi_1(f\ 5\ 3)$
- $(f\ 3\ 5)$
- $(f\ 5\ 5)$

2 Logique du 1er ordre

On rappelle que les λ-termes en forme normale peuvent toujours s'écrire

$$\lambda x_1.\ldots\lambda x_n.(x\ t_1\ \ldots\ t_m)$$

On considère le langage constitué d'un seul symbole de proposition A. Soit la preuve suivante de $[] \vdash A \Rightarrow A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A \Rightarrow A] \vdash A \Rightarrow A}\ (\mathrm{Ax})}{[] \vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)}\ (\Rightarrow\text{-I}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{[A] \vdash A}\ (\mathrm{Ax})}{[] \vdash A \Rightarrow A}\ (\Rightarrow\text{-I})}{[] \vdash A \Rightarrow A}\ (\Rightarrow\text{-E})$$

a) Donnez la version sans coupures de la preuve ci-dessus.

b) Que donnent ces preuves vues à travers l'isomorphisme de Curry-Howard ?

c) Y a-t-il d'autres preuves sans coupures de $[] \vdash A \Rightarrow A$? Justifiez (sans faire trop long !).

d) On rajoute maintenant la réécriture $A \ \triangleright\ (A \Rightarrow A)$. On est donc en déduction modulo. Donnez alors une preuve de $[] \vdash A$. Que peut-on dire du λ-terme correspondant ?

3 Système T

Définissez dans le système T une fonction $\mathtt{eg} : N \rightarrow N \rightarrow N$
qui retourne 1 si ses arguments sont égaux et 0 s'ils sont différents.

4 Choisir n'est pas construire

On se place dans l'arithmétique de Heyting. Rappelons que c'est l'arithmétique intuitioniste.

a) Indiquez comment on peut démontrer la proposition

$$\forall x.\forall y.x = y \vee \neg(x = y)$$

On pourra s'inspirer de la question précédente.

b) On dit qu'une proposition P est décidable si on sait démontrer $P \vee \neg P$.

Montrer que si A et B sont des propositions décidables, alors $A \wedge B$, $A \vee B$ et $A \Rightarrow B$ sont décidables.

c) On ajoute maintenant à l'arithmétique un opérateur de choix, ou “opérateur de Hilbert”. C'est-à-dire que pour toute proposition P de l'arithmétique et toute variable x on a :

- un objet $\mathcal{E}(x.P)$ dans le langage,
- la famille d'axiomes $P[x \setminus t] \Rightarrow P[x \setminus \mathcal{E}(x.P)]$ (pour tout objet t).

Montrer que si $P[x \setminus t]$ est décidable, pour tout objet t, alors $\exists x.P$ est décidable, dans cette théorie.

d) Monter que si $P[x \setminus t]$ est décidable, pour tout objet t, alors $\forall x.P$ est décidable, dans cette théorie.

e) Que peut-on en déduire pour toutes les propositions de cette théorie ? Ou cette théorie en général ? Essayez de justifier en étant concis et précis.

5 Déconstruire est-ce choisir ?

On travaille maintenant dans la théorie des types de Martin-Löf. On se donne l'axiome du tiers-exclu :

$$\frac{\Gamma \vdash A : \text{Type}}{\Gamma \vdash EM_A : A + (A \to \bot)}$$

a) Dans un contexte où : A : Type, $a : A$ et $P : A \to$ Type,
construisez un terme $\mathcal{E}(P) : A$ tel que :

$$\Sigma x : A.(P\ x) \to (P\ \mathcal{E}(P)).$$

b) La construction de la question 4 vous semble-t-elle possible dans la théorie des types de Martin-Löf ? Quelle est la conclusion, en deux mots ?