MPRI 2008-09 Cours 2-7-1
Examen du 18-11-2008

1 Logique du 1er ordre

(a) Soit A une proposition quelconque. Donnez une dérivation de $[] \vdash A \Rightarrow \neg\neg A$ et une dérivation de $[] \vdash \neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$ en logiqe intuitioniste (si possible).

Donnez les λ-termes typés correspondants à ces dérivations (par l'isomorphisme de Curry-Howard).

(b) On se donne, pour toute proposition B, la régle

$$\frac{}{[] \vdash \neg\neg B \Rightarrow B}\ (\mathrm{NN})$$

Donnez alors une dérivation de $[] \vdash A \vee \neg A$.

2 Système F

Étant donné un type A dans le système F, on note :

$$\begin{array}{rcl} S(A) & \equiv & \forall X.(A \to X) \to X \\ N(A) & \equiv & \forall X.((A \to X) \to X) \to X \end{array}$$

(a) Construire des fonctions $f : A \to S(A)$ et $g : S(A) \to A$.

(b) On dit que f et g définissent un plongement de A dans $S(A)$ (respectivement de $S(A)$ dans A) si $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) se réduit vers $\lambda x.x$. Quel(s) plongement(s) a-t-on ?

(c) On note $\bot \equiv \forall X.X$ et $\neg A \equiv A \to \bot$. Construire $r : N(A) \to \neg A$ et $s : \neg A \to N(A)$.

(d) Soit un type C du système F. On note

$$T \equiv \forall X.(C \to X) \to (X \to X \to X) \to X$$

Construisez des termes :

$$\begin{array}{rcl} f & : & C \to T \\ n & : & T \to T \to T \end{array}$$

Comment peut-on voir le type T ?

3 Définitions Imprédicatives

(a) Définir en Théorie des types simples (HOL) le prédicat P_{32} sur les entiers qui exprime que les seuls facteurs premiers de l'entier sont 2 et 3 (c'est-à-dire qu'il est de la forme $2^i \times 3^j$).

(b) Traduire cette définition en Calcul des Constructions. Ecrivez un terme p de type $(P_{32}\ 8)$. En général, quelle est, en gros, la taille d'une preuve de $(P_{32}\ 2^i)$?

4 Théorie des Types

(a) Comment définieriez-vous la propriété de la question 3.a en Théorie des Types ?
(b) On a construit :

$$f : \Pi x : N.\Sigma y : N.(x = y + y) + (x = (Sy) + y)$$

$$g : \Pi x : N.\Sigma y : N.(y = x + x) + (y = (Sx) + x)$$

(avec la surcharge claire du symbole $+$)

Que peut-on dire des formes normales de $\pi_1(f\ 5)$ et de $\pi_1(g\ 5)$?

5 Devinettes

(a) Existe-t-il dans le système F des types A et B tel que $\lambda x : A.(x\ B\ x)$ soit typable ?
(b) Peut-on construire, en Théorie de Types, des termes t clos tel que :

$$t : \Pi f : N \to N.\Sigma x : N.(\Pi y : N.x \leq (f\ y))$$
$$t : \Pi f : N \to N.\Sigma x : N.(\Pi y : N.(f\ y) \leq x)$$

Justifiez rapidement chaque cas.