MPRI 2008-09 Cours 2-7-1
Examen du 18-11-2008

1 Logique du 1er ordre

(a) Soit A une proposition quelconque. Donnez une dérivation de $[] \vdash A \Rightarrow \neg\neg A$ et une dérivation de $[] \vdash \neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$ en logiqe intuitioniste (si possible).

C'est possible :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A; \neg A \vdash \neg A} \qquad \dfrac{}{A; \neg A \vdash A}}{A; \neg A \vdash \bot}}{A \vdash \neg\neg A}}{[] \vdash A \Rightarrow \neg\neg A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg A; A \vdash \neg\neg\neg A} \qquad \dfrac{\text{la même dérivation que ci-dessus}}{\neg\neg\neg A; A \vdash \neg\neg A}}{\neg\neg\neg A; A \vdash \bot}}{\neg\neg\neg A \vdash \neg A}}{[] \vdash \neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A}$$

Donnez les λ-termes typés correspondants à ces dérivations (par l'isomorphisme de Curry-Howard).

$$\lambda a : A.\lambda k : \neg A.k\ a$$

$$\lambda k_1 : \neg\neg\neg A.\lambda a : A.k_1(\lambda k : \neg A.k\ a)$$

(b) On se donne, pour toute proposition B, la régle

$$\dfrac{}{[] \vdash \neg\neg B \Rightarrow B}\ (\mathrm{NN})$$

Donnez alors une dérivation de $[] \vdash A \vee \neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A \vee \neg A); A \vdash \neg(A \vee \neg A) \qquad \dfrac{\neg(A \vee \neg A); A \vdash A}{\neg(A \vee \neg A); A \vdash A \vee \neg A}}{\neg(A \vee \neg A); A \vdash \bot}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \bot}}{[] \vdash \neg\neg(A \vee \neg A)}}{[] \vdash A \vee \neg A}$$

2 Système F

Étant donné un type A dans le système F, on note :

$$\begin{array}{rcl} S(A) & \equiv & \forall X.(A \to X) \to X \\ N(A) & \equiv & \forall X.((A \to X) \to X) \to X \end{array}$$

(a) Construire des fonctions $f : A \to S(A)$ et $g : S(A) \to A$.

$$f \equiv \lambda a : A.\Lambda X.\lambda f : A \to X.(f\ a)$$

$$g \equiv \lambda y : S(A).(y\ A\ \lambda a : A.a)$$

(b) On dit que f et g définissent un plongement de A dans $S(A)$ (respectivement de $S(A)$ dans A) si $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) se réduit vers $\lambda x.x$. Quel(s) plongement(s) a-t-on ?

A est plongé dans $S(A)$.

(c) On note $\bot \equiv \forall X.X$ et $\neg A \equiv A \to \bot$. Construire $r : N(A) \to \neg A$ et $s : \neg A \to N(A)$.

(d) Soit un type C du système F. On note

$$T \equiv \forall X.(C \to X) \to (X \to X \to X) \to X$$

Construisez des termes :

$$\begin{array}{lcl} f & : & C \to T \\ n & : & T \to T \to T \end{array}$$

$$f \equiv \lambda c : C.\Lambda X.\lambda l : C \to X.\lambda m : \ldots.(f\ c)$$

$$g \equiv \lambda t_1 : T.\lambda t_2 : T.\Lambda X.\lambda l : C \to X.\lambda m : \ldots.(m\ (t_1\ X\ l\ m)\ (t_2\ X\ l\ m))$$

Comment peut-on voir le type T ?

C'est la représentation dans le système F des arbres binaires avec un objet de type C à chaque feuille (et rien aux nœuds).

3 Définitions Imprédicatives

(a) Définir en Théorie des types simples (HOL) le prédicat P_{32} sur les entiers qui exprime que les seuls facteurs premiers de l'entier sont 2 et 3 (c'est-à-dire qu'il est de la forme $2^i \times 3^j$).

$P_{32} \equiv \lambda n : N.\forall P : N \to o.(P\ 1) \Rightarrow (\forall m.(P\ m) \Rightarrow (P\ 2m)) \Rightarrow (\forall m.(P\ m) \Rightarrow (P\ 3m)) \Rightarrow (P\ n)$

(b) Traduire cette définition en Calcul des Constructions.

Pareil, en remplaçant les $\forall$ par des Π.

Ecrivez un terme p de type $(P_{32}\ 8)$. En général, quelle est, en gros, la taille d'une preuve de $(P_{32}\ 2^i)$?

$$p \equiv \lambda P.\lambda p_1.\lambda p_2.\lambda p_3.(p_2\ 4\ (p_2\ 2\ (p_2\ 1\ p_1)))$$

Le terme est de taille proportionelle à i (il itère i fois).

4 Théorie des Types

(a) Comment définieriez-vous la propriété de la question 3.a en Théorie des Types ?

On définit l'exponantiation puis :

$$P \equiv \lambda n : N.\Sigma i : N\Sigma j : N.i = (exp\ 2\ i) \times (exp\ 3\ j)$$

(b) On a construit :

$$f : \Pi x : N.\Sigma y : N.(x = y + y) + (x = (Sy) + y)$$

$$g : \Pi x : N.\Sigma y : N.(y = x + x) + (y = (Sx) + x)$$

(avec la surcharge claire du symbole +)

Que peut-on dire des formes normales de $\pi_1(f\ 5)$ et de $\pi_1(g\ 5)$?
C'est 2 et soit 10 soit 11.

5 Devinettes

(a) Existe-t-il dans le système F des types A et B tel que $\lambda x : A.(x\ B\ x)$ soit typable ?
Oui : par exemple $A = \forall X.X$ *et* $B = A \to A$.

(b) Peut-on construire, en Théorie de Types, des termes t clos tel que :

$$t : \Pi f : N \to N.\Sigma x : N.(\Pi y : N.x \leq (f\ y))$$

oui, on choisit $x = 0$

$$t : \Pi f : N \to N.\Sigma x : N.(\Pi y : N.(f\ y) \leq x)$$

Non, la fonction identité par exemple n'est pas bornée.