2) Graph Cuts

2.1) Coupes minimales

$G = (V, E)$ graphe orienté pondéré
s, t deux sommets particuliers de V (source et puits)
$w(p,q)$ poids de l'arête $(p,q) \in E$ ($w \geq 0$)

- une s,t-coupe C est une partition de V en deux sous ensembles S et T avec $s \in S$, $t \in T$
- coût de la coupe : $\boxed{c(C) = \sum_{\substack{p \in S \\ q \in T \\ (p,q) \in E}} w(p,q)}$

NB : on compte les arêtes de S vers T

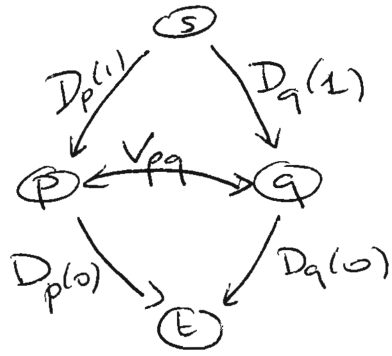
→ Il existe des algorithmes polynomiaux pour calculer la coupe de coût minimal. Ils se ramènent à calculer le flot maximal de s vers t en identifiant $w(p,q)$ à des capacités (Ford-Fulkerson). Leur complexité au pire est en $O(n^3)$ mais linéaire en pratique, en particulier sur les graphes utilisés en computer vision (algorithme des "GraphCut" [Boykov et al.])

2.2) Segmentation binaire

Le problème des régions actives peut se modéliser comme l'étiquetage des pixels p à $f_p = 0$ ou 1 (0 = intérieur, 1 = extérieur) qui minimise

$$\boxed{\begin{array}{l} E(f) = \sum_p D_p(f_p) + \sum_{p,q \text{ voisins}} V_{pq} \mathbb{1}\{f_p \neq f_q\} \\ \text{avec } D_p(0) = g_i(p),\ D_p(1) = g_e(p), \quad V_{pq} = g\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{array}}$$

Or, minimiser $E(f)$ revient à trouver la min-cut dans ce graphe :



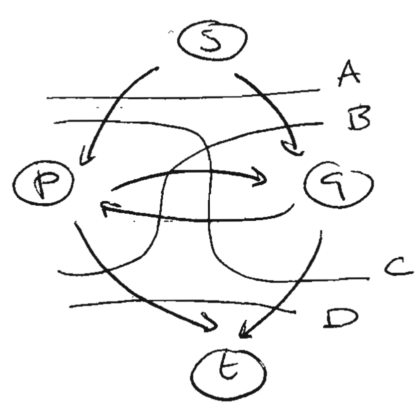
puis à faire : $f_p = 0$ si $p \in S$, $f_p = 1$ si $p \in T$

→ minimum global et rapide pour les régions actives ! (NB : le terme $\int g \, d\sigma$ n'est que grossièrement approché. On peut l'approcher mieux avec des arcs supplémentaires)

2.3) Autres cas

a) Il est possible de construire un graphe pour un cas plus général $\boxed{E(f) = \sum D_p(f_p) + \sum_{pq} V_{pq}(f_p, f_q)}$ à condition que V_{pq} soit submodulaire :

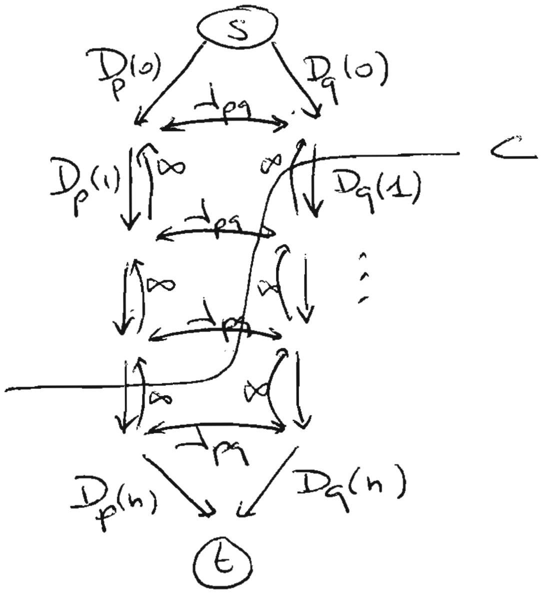
$$\boxed{V_{pq}(0,0) + V_{pq}(1,1) \leq V_{pq}(1,0) + V_{pq}(0,1)} \quad (1)$$



Il faut trouver les bons poids pour que les coupes A, B, C et D coûtent les valeurs d'énergie adéquates
→ ça n'est possible avec des poids ≥ 0 que si on a (1)

b) Cas où les étiquettes sont multiples ($f_p \in \{0, 1, \cdots, n\}$) et où $V_{pq}(f_p, f_q) = \lambda_{pq} |f_p - f_q|$

Il est encore possible, en rajoutant une dimension, de construire un graphe donnant l'optimum global



- f_p est attribué à la "hauteur" de la coupe dans la "colonne" de p
- Pour éviter qu'une colonne soit coupée plusieurs fois, on ajoute des arcs de poids ∞

NB : Le terme de régularisation en $|f_p - f_q|$ est essentiel. En particulier, il n'y a pas de solution pour $1\!\!1_{\{f_p \neq f_q\}}$

c) Cas général : $f_p \in \mathcal{L} = \{\alpha, \beta, \cdots\}$ fini

Si $V_{pq}(\cdot, \cdot)$ est une métrique alors il est possible d'utiliser la méthode de l'α-expansion. Pour $\neq$ tes valeurs de $\alpha \in \mathcal{L}$, on optimise progressivement f_p en un nouveau f'_p tel que $\boxed{f'_p = f_p \text{ ou } f'_p = \alpha}$. Le choix du f'_p optimum est un choix binaire effectué par graph-cuts. Après convergence, on obtient un minimum local.

(NB : chaque itération est résolue de façon globalement optimale)