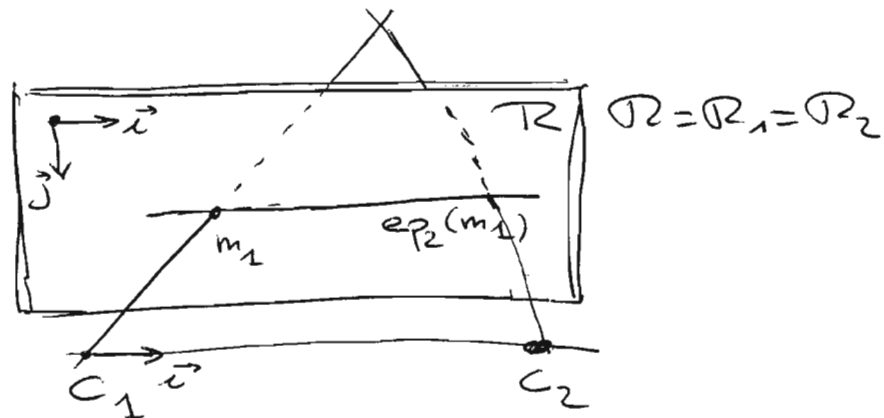


1) Rectification

On se place ici dans le cas de deux caméras de matrices $P_i = (A_i | b_i)$ connues

1.1) Configuration canonique

Supposons que les deux caméras partagent la même rétine, le même repère sur la rétine, et la direction $\vec{C}_1 C_2$ comme horizontale de ce repère ($\vec{C}_1 C_2$ est donc une des directions de la rétine). Les épipolaires sont alors les horizontales!



Une telle configuration est très confortable :

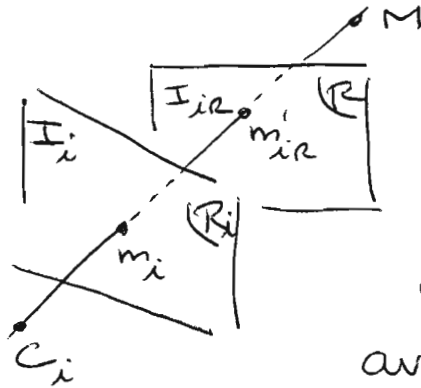
- (u_1, v_1) est associé à (u_2, v_1)
- on appelle $|d = u_2 - u_1|$ la disparité
- apparier les images revient à estimer $d(u, v_1)$
- les fenêtres de corrélation se correspondent d'avantage.

On va voir qu'il est toujours possible (sauf cas dégénérés) de se ramener a posteriori à ce cas canonique \rightarrow c'est la rectification

1.2) Principe

(2)

Il suffit de remarquer qu'on peut à posteriori calculer l'image qui aurait été obtenue en changeant la rétine d'un appareil, et ce, sans connaître la position 3D des points



Le point M a donné naissance à $I_i(m_i)$ dans R_i .

Avec T au lieu de R_i , il aurait généré $I_{ir}(m_{ir}) = I_i(m_i)$

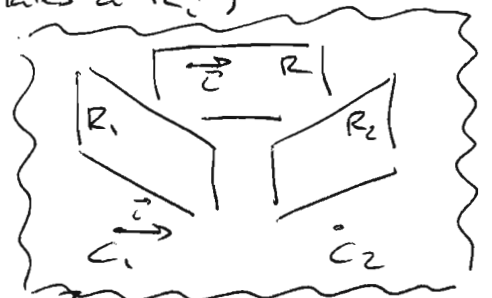
$$\text{avec } m_{ir} = (C_i m_i) \cap T$$

1.3) Calcul (NB: les points 3D sont ici en coord. non homogènes)

a) Plan T

On choisit pour T le plan (i) contenant $\vec{C}_1 \vec{C}_2$ et la direction $R_1 \cap R_2$ et (ii) passant par l'origine :

$$\begin{aligned} \bullet \vec{x} &= \frac{\vec{C}_1 \vec{C}_2}{\|\vec{C}_1 \vec{C}_2\|} & (\text{Rappel: } C_i = -A_i b_i) \\ \bullet \vec{n}_i &= 3^{\text{ème}} \text{ ligne de } A_i \text{ (normales à } R_i) \\ \bullet \vec{j}' &= \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \\ \bullet \vec{k} &= \vec{x} \wedge \vec{j}' / \|\vec{x} \wedge \vec{j}'\| \\ \bullet \vec{j} &= \vec{k} \wedge \vec{x} \end{aligned}$$



T est alors le plan $\{M \cdot \vec{k} = 0\}$

b) Passage de $m_i = (u_i, v_i, 1)^T$ à $m_{ir} = (d, \beta)$ dans T

Il suffit d'intersecter $(C_i m_i)$ avec T :

résoudre
$$\begin{cases} M = \lambda A_i^{-1} m_i + C_i \\ M \cdot \vec{k} = 0 \end{cases} \text{ en } \lambda, \text{ puis en } M$$

Alors
$$d = M \cdot \vec{x}, \beta = M \cdot \vec{j}$$

c) Projections

(3)

- En réalité : (i) pour chaque image, on ramène (d, β) à des intervalles $[0, w] \times [0, h]$ (si les images initiales sont de dimension $w \times h$)
 (ii) on remplit I_{iR} à partir de I_i . Il faut savoir passer de m_{iR} à m_i

Au total :

* Pour $i=1,2$

- calculer $m_{iR} = (d, \beta)$ pour $m_i = (0,0)$ $(0,h)$ $(w,0)$ et (w,h)
- mémoriser les valeurs extrêmes d_{\min}^i d_{\max}^i β_{\min}^i β_{\max}^i

$$\beta_{\min} = \min(\beta_{\min}^1, \beta_{\min}^2), \quad \beta_{\max} = \max(\beta_{\max}^1, \beta_{\max}^2)$$

* Pour $i=1,2$

(NB: intervalle commun pour β)

Pour $u_R = 0 \rightarrow w$ et $v_R = 0 \rightarrow h$

$$\begin{cases} d = d_{\min}^i + (d_{\max}^i - d_{\min}^i) \frac{u_R}{w} \\ \beta = \beta_{\min} + (\beta_{\max} - \beta_{\min}) \frac{v_R}{h} \end{cases}$$

$$- M = d \vec{i} + \beta \vec{j} \quad (\text{NB: point 3D!})$$

$$- m_i = A_i M + b_i = (u_i, v_i, w_i)^T$$

$$- I_{iR}(u_R, v_R) \leftarrow I_i \left(\frac{u_i}{w_i}, \frac{v_i}{w_i} \right)$$

(NB: - interpoler dans I_i
 - attention: on peut tomber en dehors de l'image)

II | Points "saillants"

1- Points de Harris :

- G_σ gaussienne

$$- H = \begin{pmatrix} (I_x)^2 * G_\sigma & (I_x I_y) * G_\sigma \\ (I_x I_y) * G_\sigma & (I_y)^2 * G_\sigma \end{pmatrix}$$

tenseur de structure. (I_x, I_y dérivés)

(2)

- points max locaux (et au dessus d'un seuil donné) de "score": $\det(H) - k[\text{Tr}(H)]^2$
(empiriquement, $k=0,04$)

2- DOG

- Espace d'échelle $I_\sigma = I * G_\sigma$
- extrema de $\sigma^2 \Delta I_\sigma$: "blobs" et non plus les "coins"
- attention: extrema 3D en (x, y, σ)
- le laplacien est approximé par différence entre I_σ et $I_{k\sigma}$ (k proche de 1)
- parmi ces blobs, on élimine les contours avec un critère sur $\frac{\text{Tr}(H)^2}{\det(H)}$ ($H = \text{tens. struct.}$)
- Fournit positions et échelle

3- Descripteurs SIFT

- on peut comparer les points saillants par NCC mais les SIFT procèdent autrement:
- (1) extraction des "DOG"
- (2) chaque voisinage (x, y, σ) est "caractérisé" par un vecteur Π^{128} :
 - histogramme de la direct° du gradient
→ orientat° que l'on ramène à l'horizontale
 - 4x4 zones caractérisées chacune par histogramme de direction du gradient à 8 cases → $4 \times 4 \times 8 = 128$

→ invariance en échelle et orientation (donc similitude mais pas affine ni projectif!)

II | Estimation de paramètres

1) Moindres carrés

$AX = b$ avec $A: m \times n, m > n, \text{rg}(A) = n$

$\rightarrow \begin{cases} X = A^+ b & (\text{pseudo inverse}) \text{ minimise} \\ \|AX - b\| & (A^+ = (A^T A)^{-1} A^T) \end{cases}$

2) Homogènes

$\min_{\|x\|=1} \|Ax\| \rightarrow \text{SVD} : A = UDV^T$
 $\rightarrow X = \text{dernière colonne de } V$
(plus petite valeur singulière)

3) Levenberg-Marquardt (LM)

$\min \|f(x)\|^2$

- itératif : $x_n, \epsilon_n = f(x_n)$
- Taylor : $\epsilon_{n+1} \approx \epsilon_n + J(x_{n+1} - x_n)$ (Jacobienne)

minimiser $\epsilon_{n+1} \rightarrow$ prendre $x_{n+1} = x_n - J^+ \epsilon_n$

- LM : mélange entre second ordre et premier ordre ; dans J^+ , multiplier la diagonale de $(J^T J)$ par $(1+\lambda)$.

Règle : $\begin{cases} \text{si } \|\epsilon_{n+1}\| < \|\epsilon_n\|, \text{ on divise } \lambda \text{ par } 10, \text{ sinon on} \\ \text{multiplie } \lambda \text{ par } 10 \text{ et on recalcule } x_{n+1} \end{cases}$

4) TRANSAC : \rightarrow cf INF552

\rightarrow besoin de deux fonctions

- (1) Estimer les param. par un échantillon réduit
- (2) Calculer l'erreur de chaque mesure pour des paramètres donnés

\rightarrow INLIERS / OUTLIERS

5) Principe général

- (a) - mesures bruitées et avec OUTLIERS
→ RANSAC avec estimateur linéaire
- (b) - Sur les INLIERS : moindres carrés
- (c) A partir de cette estimation linéaire, raffinement non linéaire par LM. sur une erreur ayant un sens géométrique

NB : normaliser les données (recentrer et normaliser la variance)

6) Exemples

6.1 Triangulation :

Trouver X pour x_i, P_i connus $x_i = P_i X$ (homogène)

- écrire $x_i \wedge P_i X = 0$ et prendre les 2 premières équations
- min $\|AX\|$ avec $A = \begin{pmatrix} u_i L_i^3 - L_i^1 \\ v_i L_i^3 - L_i^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$
 $\|X\| = 1$
- $(x_i = (u_i, v_i, 1)^T, P_i = \begin{pmatrix} L_i^1 \\ L_i^2 \\ L_i^3 \end{pmatrix})$
- raffiner : min $\sum_i d^2(x_i, P_i X)$ (non homogène)

6.2 Homographie

- 4 paires suffisent → estimateur pour RANSAC : $x_i = Hx'_i$
- Moindres carrés (non homogènes si $H = \begin{pmatrix} \equiv \\ \equiv \\ -1 \end{pmatrix}$ ou homogènes si $H = \begin{pmatrix} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{pmatrix}$) sur les INLIERS
- Raffinement : min $\sum_i d^2(x_i, Hx'_i) + d^2(H^{-1}x_i, x'_i)$

6.3 Mat. fondamentale

- RANSAC avec 8 paires (ev⁺ algo. des 7 paires avec eq^o du 3^o degré) : $x_i'^T F x_i = 0$
- Moindres carrés sur INLIÈRES
- Raffinement: $\min \sum_i d^2(x_i, \text{epi}(x_i')) + d^2(x_i', \text{epi}(x_i))$
- Forcer $\text{rg}(F) = 2$ par SVD