

# Géométrie Epipolaire

## ① Géométrie projective

(NB: - on note  $A^T$  la transposée  
 -  $\wedge$  est le produit vect.  
 - par rapport au cours, les  $v$  ont disparu)

### 1.1) $\mathbb{P}^2$ (plan projectif)

- Point:  $(u, v) \rightarrow m = (u, v, 1)^T$  à  $\lambda \neq 0$  près (coord. homogènes)
- Direction:  $u\vec{i} + v\vec{j} \rightarrow m = (u, v, 0)^T$  (point à l' $\infty$ )
- Droite  $l = (a, b, c)^T$  avec  $m \in l \Leftrightarrow m^T l = 0$

#### Propriétés :

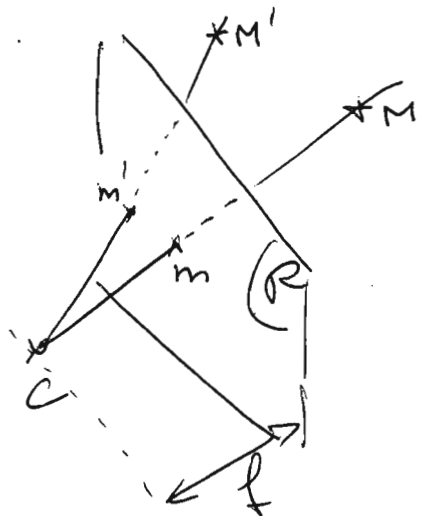
- i)  $m_1$  et  $m_2$  donnés,  $m_1 \wedge m_2$  est la droite  $(m_1, m_2)$
- ii)  $l_1$  et  $l_2$  donnés,  $l_1 \wedge l_2$  est leur intersection même si elles sont //.
- iii)  $l_\infty = (0, 0, 1)$  est la droite à l' $\infty$  ( $(u, v, 0)^T \in l_\infty$ )

### 1.2) $\mathbb{P}^3$ espace projectif

- Points  $M = (X, Y, Z, T)^T$  à  $\lambda \neq 0$  près
- $T = 0 \rightarrow$  points à l' $\infty$  (directions)
- $\pi = (a, b, c, d)^T$  plan ( $M \in \pi \Leftrightarrow M^T \pi = 0$ )
- Droites: coordonnées de Plücker (pas vu en cours)

## 2) Camera

Le modèle le + simple (pinhole camera)



- $R$ : rétine
- $C$ : centre optique
- $M$ : point 3D
- $m$ : image 2D
- $f$ : distance focale

(i) Cas où  $C=0$ ,  $\mathcal{R}=\{z=1\}$  et le point  $(x, y, 1)$  de  $\mathcal{R}$  est numérisé en  $(x, y)$  par le capteur.

Alors :  $u = x/z$ ,  $v = y/z$  ce qu'on peut écrire

$$m = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \hline 3 \times 1 & 3 \times 4 \end{pmatrix} M \begin{matrix} \\ \\ 4 \times 1 \end{matrix} \text{ en coordonnées homogènes}$$

(ii) Si maintenant  $\mathcal{R}=\{z=f\}$  (focale  $\neq 1$ ) alors

$$m = PM \text{ avec } P = \begin{pmatrix} f & & & \\ & f & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ car } u = f \frac{x}{z}, v = f \frac{y}{z}$$

(iii) Si on tient compte maintenant du changement de repère du capteur :  $u = d_u \frac{x}{z} + u_0$ ,  $v = d_v \frac{y}{z} + v_0$

$$\text{soit } P = \begin{pmatrix} d_u & 0 & u_0 & \\ 0 & d_v & v_0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ (NB: } d_u = f / \text{larg. pixel, } d_v = f / \text{haut. pixel)}$$

(iv) Maintenant l'observateur se déplace  $\rightarrow$   $\begin{cases} R \text{ rotation} \\ t \text{ translation} \end{cases}$

$$m = PM \text{ avec } P = K [R | t]$$
$$K = \begin{pmatrix} d_u & & u_0 \\ & d_v & v_0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 6 \text{ param. extrinsèques} \\ 4 \text{ param. intrinsèques} \end{matrix}$$

### 3) Relations utiles

(NB: si pixels non rectangls (ie.  $\square$ ) alors un 5<sup>e</sup> param. intrins.)  
(NB: On a négligé la distortion)

i) Rayon de m :

- en coord. non homogènes pour  $M$  et avec  $P = (A|b)$

$$\lambda m = AM + b$$

et donc  $M = \lambda A^{-1} m - A^{-1} b$

- en particulier, on a (avec  $\lambda=0$  et  $\lambda=\infty$ ) :

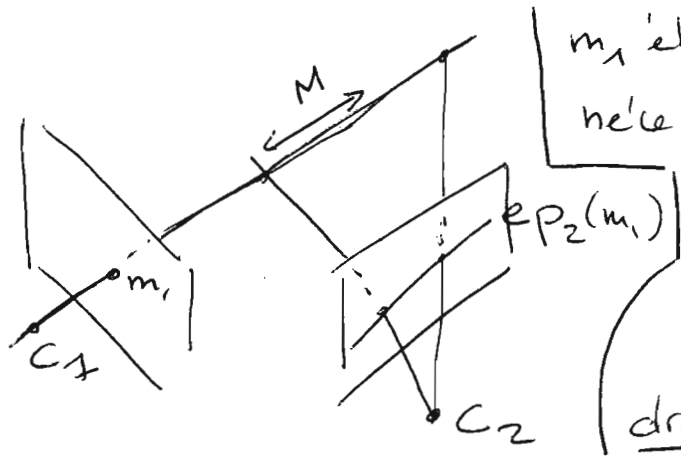
$$C = -A^{-1} b \text{ (coord. non homog.)}$$
$$A^{-1} m \text{ est la direction du rayon}$$

ii) Les points du plan focal (plan // à  $\mathcal{R}$  passant par  $C$ ) se projettent à l'infini, donc en  $(u, v, 0)^T$   
 → la troisième ligne de  $P$  est l'équation du plan focal. En particulier:

la troisième ligne de  $A$  est la normale à  $\mathcal{R}$

### 4) Géométrie épipolaire

On a maintenant 2 caméras  $P_1$  et  $P_2$



$m_1$  étant donné,  $m_2$  est nécessairement sur la projection du rayon  $C_1 m_1$  dans l'image 2: c'est la droite épipolaire de  $m_1$  dans 2

$m_1$  connu  $\rightarrow m_2 \in ep_2(m_1) = P_2(C_1 m_1)$

Si  $P_i = (A_i | b_i)$  alors:

• on cherche deux points du rayon  $C_1 m_1$ , que l'on projette

$$\left\{ \begin{array}{l} \times C_1 = \begin{pmatrix} -A_1^{-1} b_1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow e_2 = P_2 C_1 = \boxed{-A_2 A_1^{-1} b_1 + b_2 = e_2} \\ e_2 \text{ est l'épipôle } (\forall m_1, e_2 \in ep_2(m_1)) \\ \times M_\infty = \begin{pmatrix} A_1^{-1} m_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow m_{2\infty} = P_2 M_\infty = A_2 A_1^{-1} m_1 \end{array} \right.$$

• on a alors  $ep_2(m_1) = e_2 \wedge m_{2\infty} = [e_2]_\wedge A_2 A_1^{-1} m_1$   
 en posant  $\boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_\wedge = \begin{pmatrix} 0 & b & -c \\ -b & 0 & a \\ c & -a & 0 \end{pmatrix}}$

D'où finalement la relation symétrique:

$m_2 \in ep_2(m_1) \Leftrightarrow m_1 \in ep_1(m_2) \Leftrightarrow m_2^T F_{21} m_1 = 0$   
 avec  $F_{21} = [e_2]_\wedge A_2 A_1^{-1}$  (matrice fondamentale)

## I | Mesure de photo consistance

- la plus courante est la corrélation croisée normalisée (NCC)
- Soit  $W$  un voisinage autour des pixels:

$$\left\{ \begin{aligned} \langle I_i, m_i, I_j, m_j \rangle &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \left[ (I_i(m_i+w) - \bar{I}_i(m_i)) \right. \\ &\quad \left. \times (I_j(m_j+w) - \bar{I}_j(m_j)) \right] \\ \text{avec } \bar{I}_i(m_i) &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} I_i(m_i+w) \end{aligned} \right.$$

$$\text{puis } \boxed{NCC(I_i, m_i, I_j, m_j) = \frac{\langle I_i, m_i, I_j, m_j \rangle}{(\langle I_i, m_i, I_i, m_i \rangle \langle I_j, m_j, I_j, m_j \rangle)^{1/2}}$$

On a  $-1 \leq NCC \leq 1$ . Plus  $NCC$  est grande, plus les "textures" autour de  $m_i$  et  $m_j$  sont "similaires".

- Si deux images sont reliées par une transformation affine,  $NCC = 1$
- Limitations:
  - invariante seulement par translation
  - pb de l'ouverture: ambiguïtés, par ex. le long d'un contour