

# Lecture 8: Convex geometry and graph separators

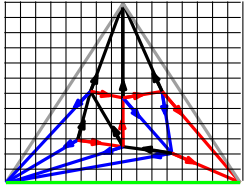
INF562, 26 février 2013

Luca Castelli Aleardi



# Graph separators: motivation

# Graph planarity characterizations

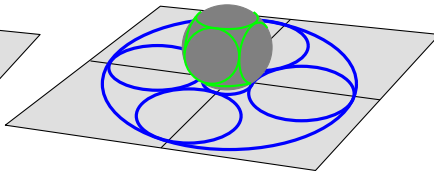
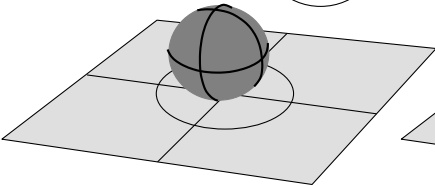
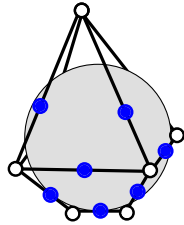
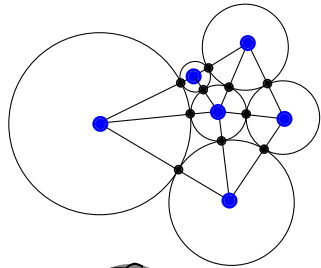


**Schnyder woods** (via dimension of partial orders)

- $\dim(G) \leq 3$

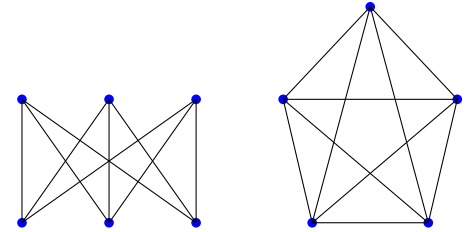
## Thm (Koebe-Andreev-Thurston)

Every planar graph with  $n$  vertices is isomorphic to the intersection graph of  $n$  disks in the plane.

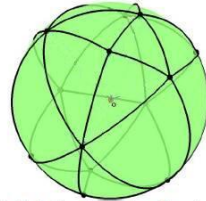


## Kuratowski theorem (excluded minors)

- $G$  contains neither  $K_5$  nor  $K_{3,3}$  as minors



$$\begin{bmatrix} M \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{matrix} \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Colin de Verdiere invariant (multiplicity of  $\lambda_2$  eigenvalue of a generalized laplacian)

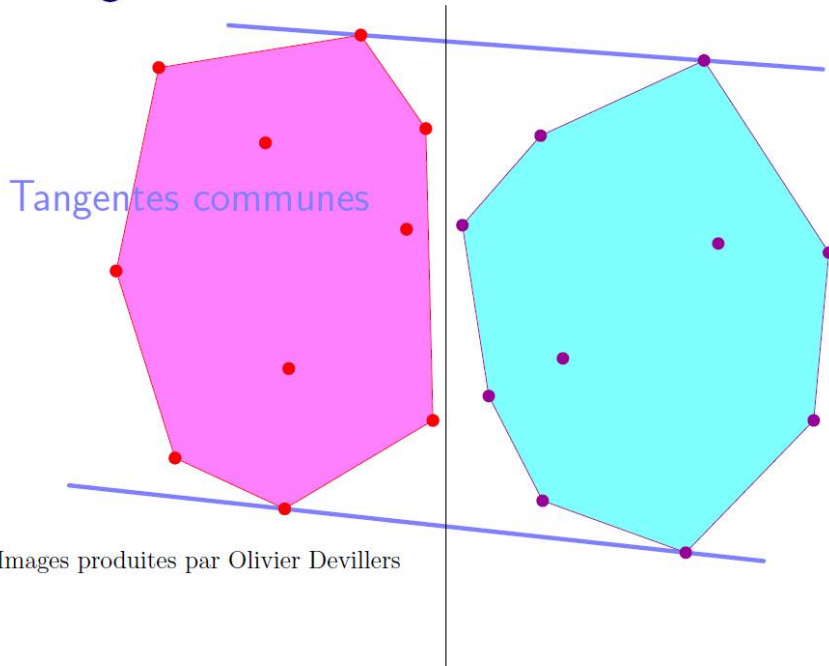
- $\mu(G) \leq 3$

# Recursive decomposition of points: convex hull

## Thm

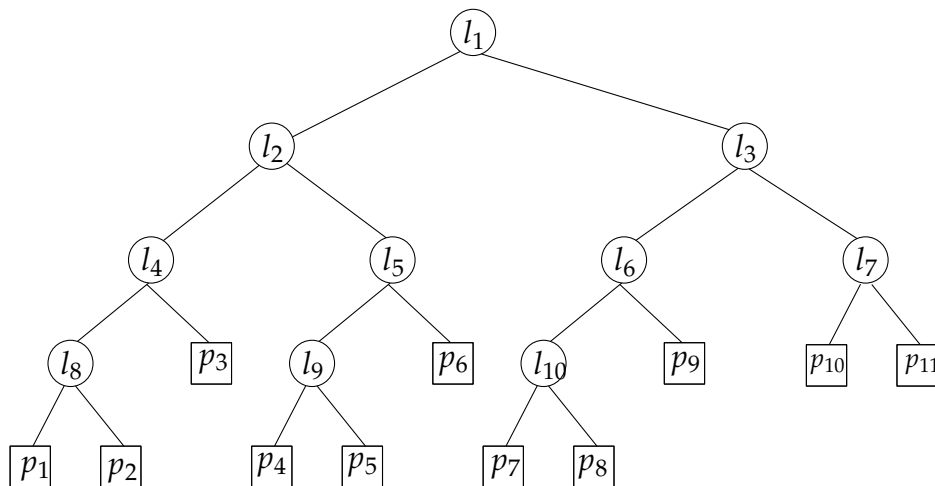
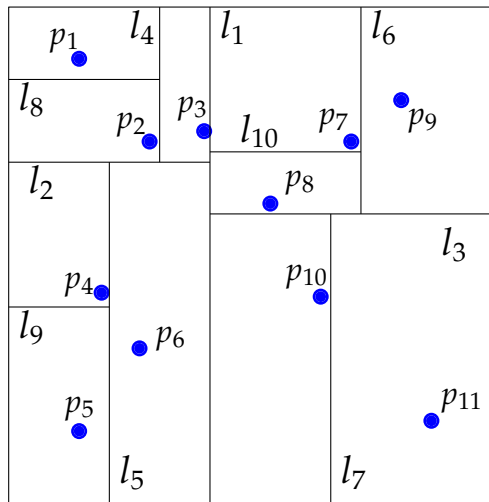
*Computing the convex hull of  $n$  points requires  $O(n \log n)$ .*

Un algorithme division fusion

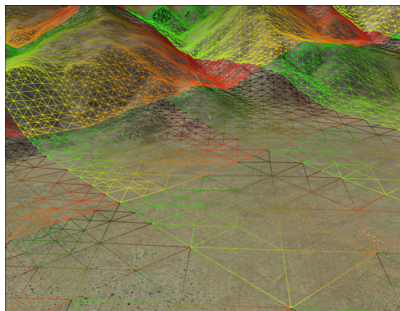


$$T(n) = C \cdot n + t\left(\frac{n}{2}\right) + t\left(\frac{n}{2}\right) = O(n \log n)$$

# Recursive decomposition of point clouds: Kd-Trees

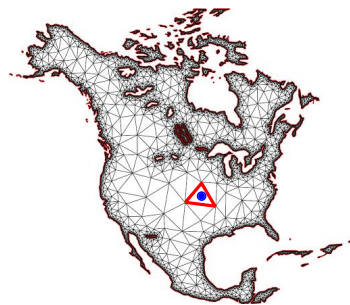


# Planar point location: geographic localisation



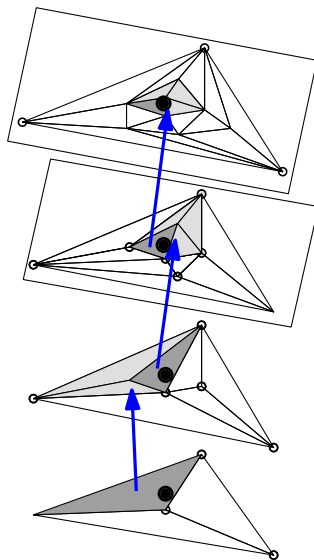
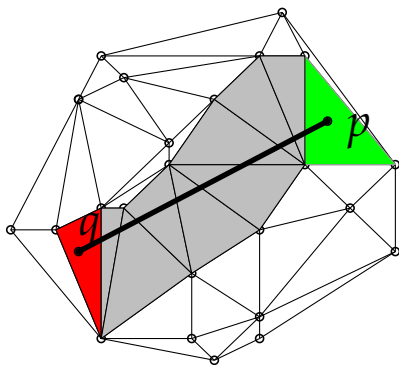
MS flight simulator

Maillage de L. Rineau, M. Yvinec

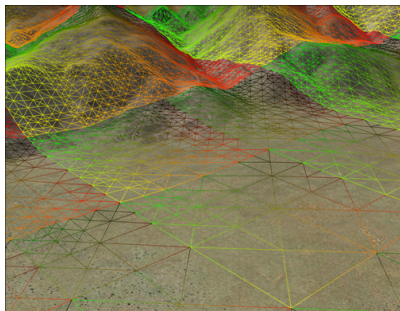


**Thm (Kirkpatrick, '83)**

*en temps  $O(\log n)$ , espace  $O(n)$*

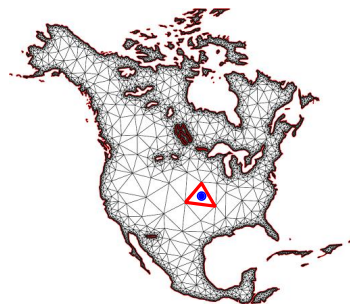


# Planar point location: geographic localisation



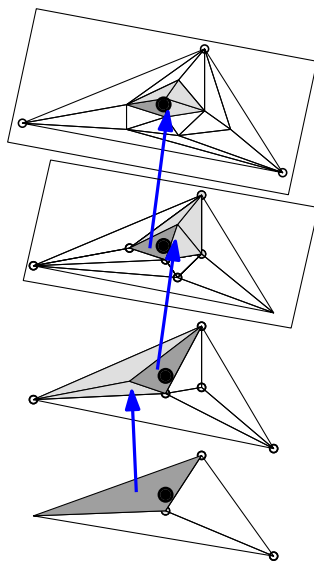
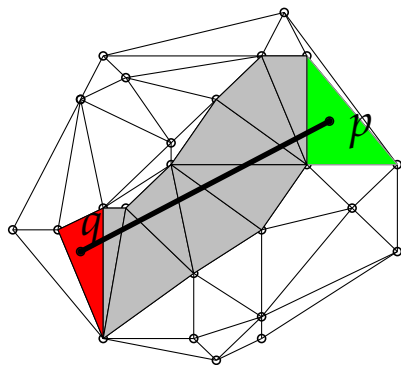
MS flight simulator

Maillage de L. Rineau, M. Yvinec

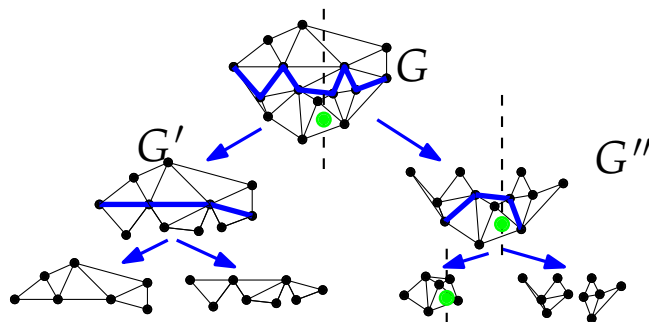


**Thm (Kirkpatrick, '83)**

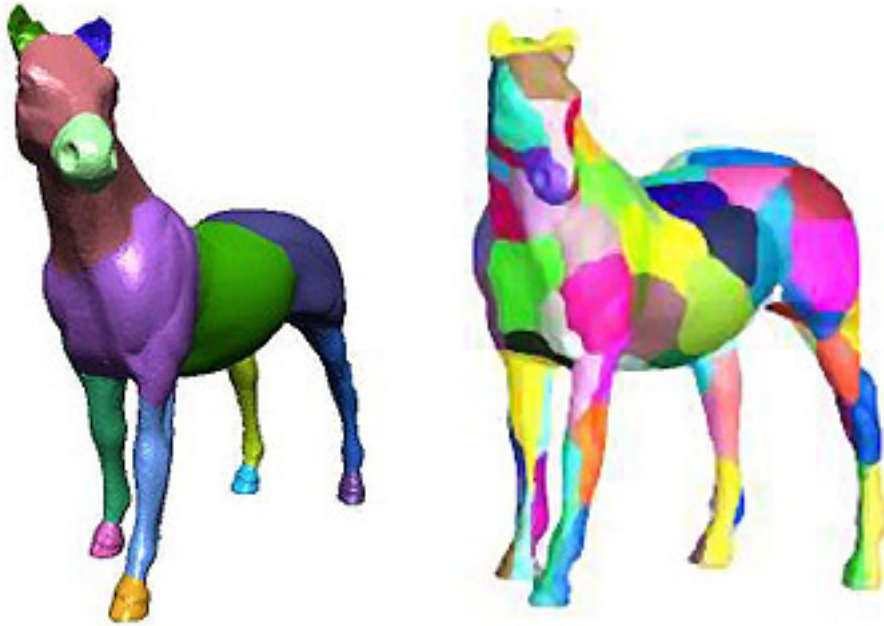
*en temps  $O(\log n)$ , espace  $O(n)$*



decomposition recursive  
avec petit séparateurs



# Mesh segmentation partitioning



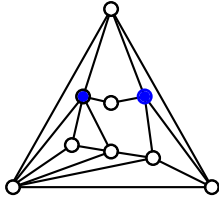
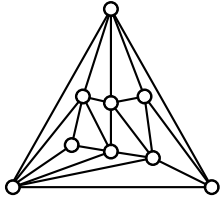
(image de Ariel Shamir)

# Graph separators

# Separateurs et thm de Menger

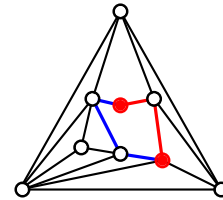
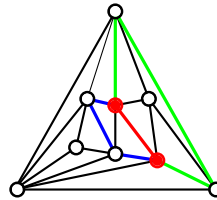
## Def

$G$  is 3-connected if and only if you need to remove at least 3 vertices to disconnect it.



## Thm (Menger)

If  $G$  is  $k$ -connected, then for each pair  $u, v$  there exist  $k$  disjoint paths from  $u$  to  $v$ .



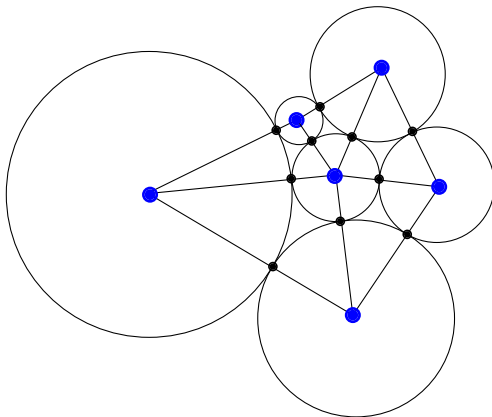
# Séparateurs géométriques

# Une caractérisation des graphes planaires

## Thm (Koebe dans le plan)

*Tout graphe planaire à  $n$  sommets est isomorphe au graphe d'intersection de  $n$  disques dans le plan.*

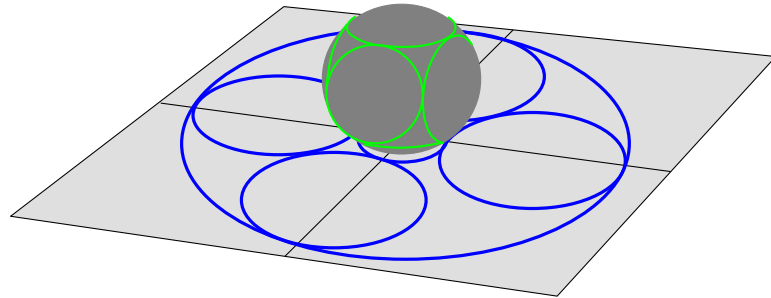
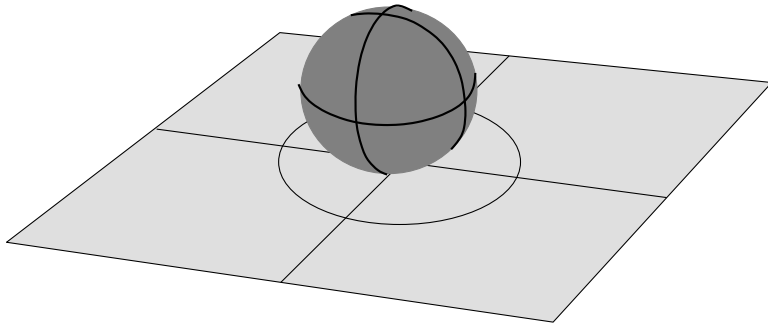
Représentation de Koebe d'un graphe planaire



# Une autre version

## Thm (Koebe sur la sphère)

*Tout graphe planaire à  $n$  sommets est isomorphe au graphe d'intersection de  $n$  calottes circulaires sur la sphère (leurs intérieurs étant disjoints).*



# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

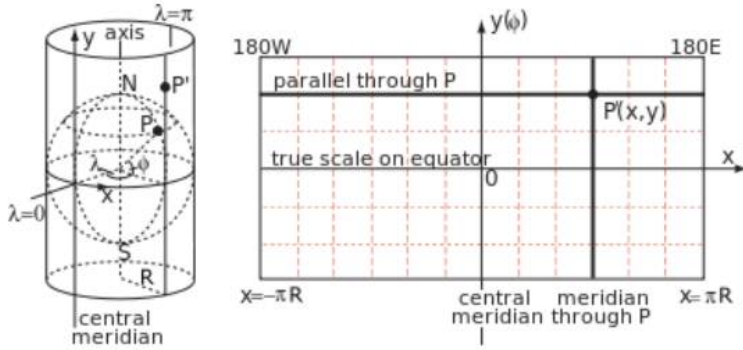
## Thm (Spielman et Teng)

*Tout graphe planaire à  $n$  sommets admet un  $\frac{3}{4}$ -séparateur de taille au plus  $2\sqrt{n}$ .*

# Spherical geometry and projections

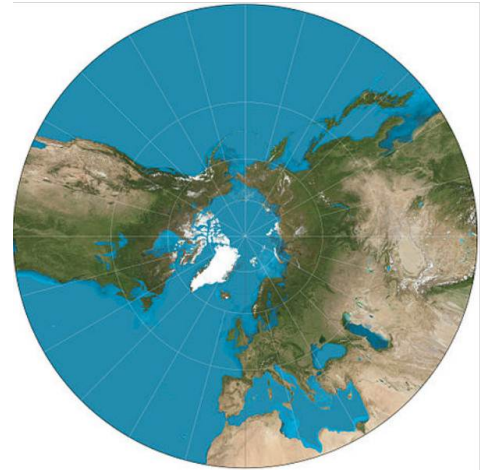
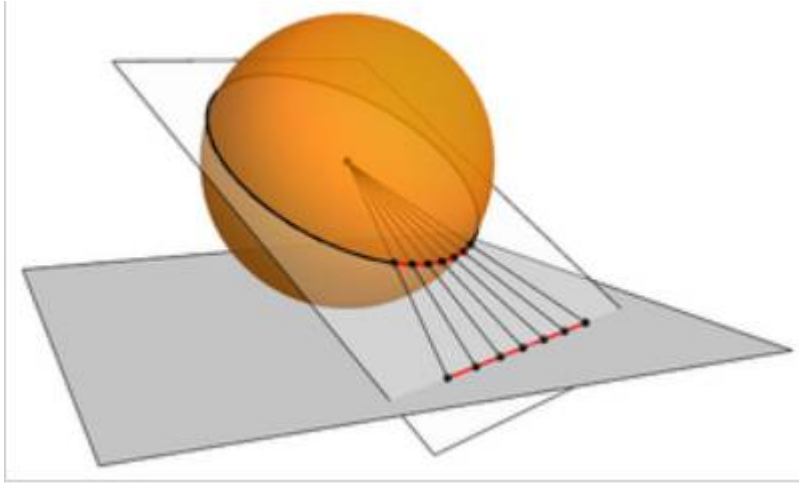
# Examples of spherical projections

*Cylindrical projections: straight lines are loxodromes*



# Examples of spherical projections

*Gnomonic projection: straight lines are arcs of great circles (geodesic arcs)*



# Stereographic projection: definition

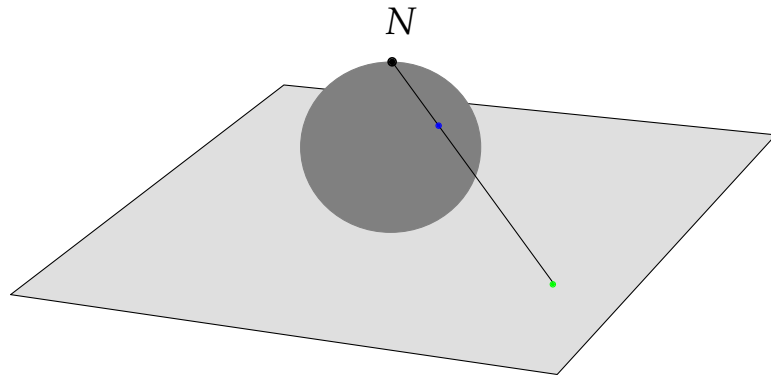
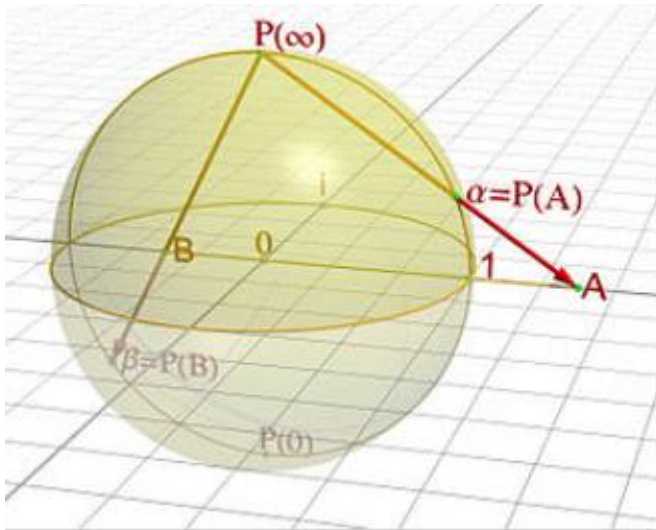
**Def:**

project points of  $S^2$  onto the plane  $z = 0$ , from north pole  $(0, 0, 1)$

- stereographic projection  $\Pi : R^2 \rightarrow S^2$

$$\Pi(x, y) := \begin{pmatrix} 2x/\chi \\ 2y/\chi \\ 1 - 2/\chi \end{pmatrix}$$
$$\chi := x^2 + y^2 + 1$$

$$\Pi^{-1}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{x}{1-z} \\ \frac{y}{1-z} \\ \frac{1+z}{1-z} \end{pmatrix}$$

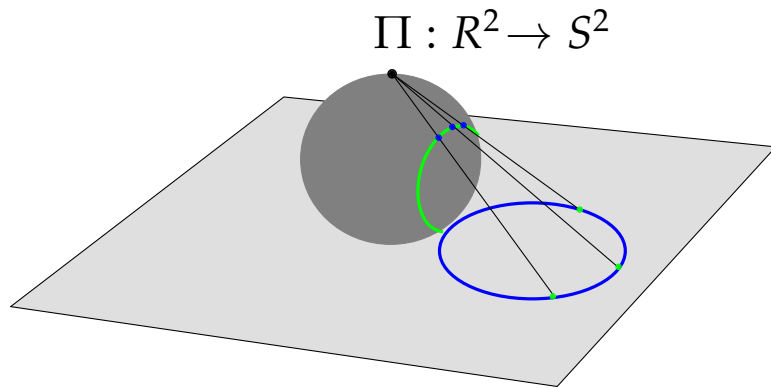
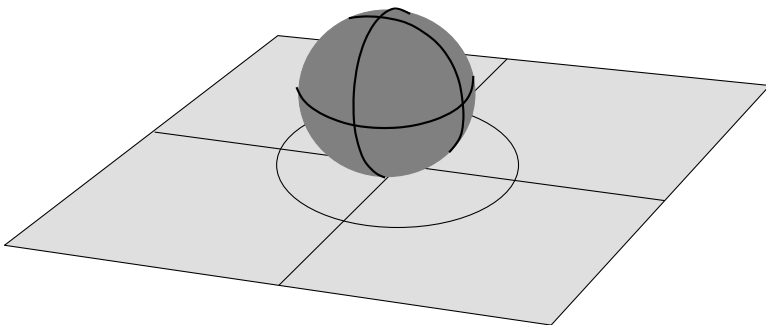
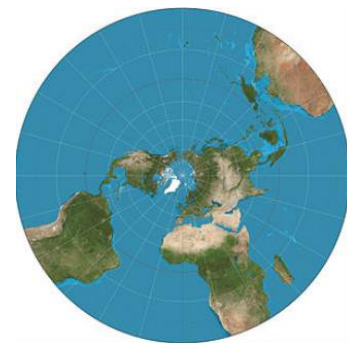


# Stereographic projection preserves circles

## Def: applications conformes

*Ces sont les applications  $\Phi$  qui préservent les angles*

- *La projection stéréographique  $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  (et son inverse) est conforme*
- *autres exemples: translations, rotations, dilatations*



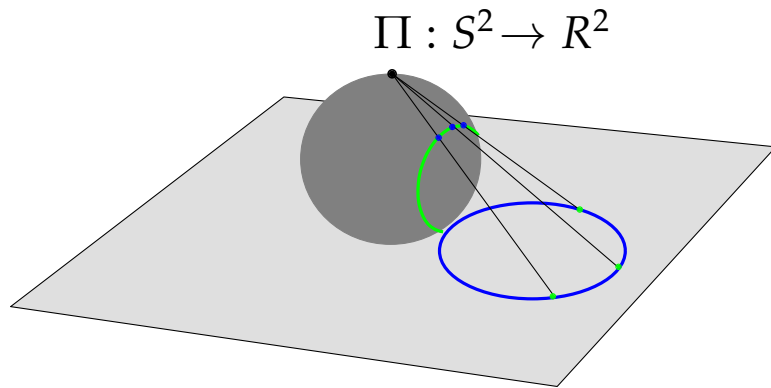
# Stereographic projection preserves circles

## Lemma

Let  $C$  be a circle on  $S^2$  defined by the intersection with a plane

$$V = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{a}^T \mathbf{y} = b\}$$

Then the (pre)image  $\Pi^{-1}(C)$  is a circle in  $\mathbb{R}^2$

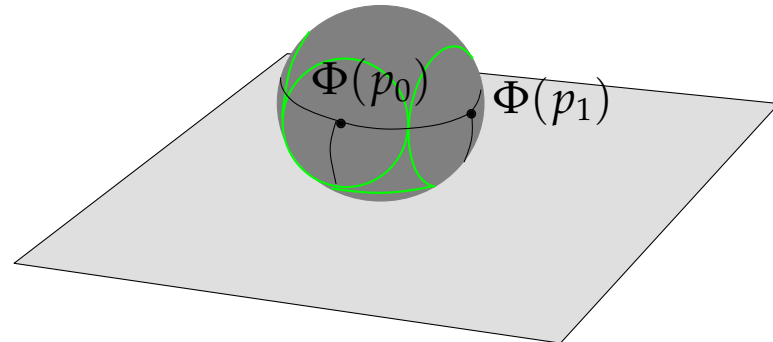
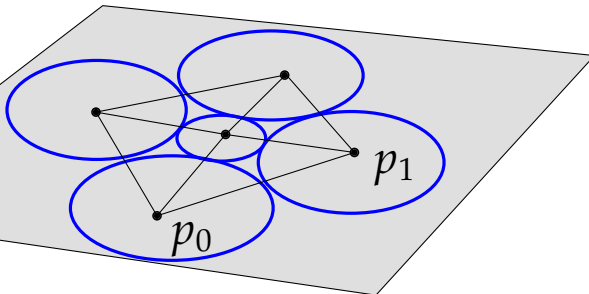


# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

## Stratégie de preuve

- On part d'un disk packing  $\{D_0, \dots, D_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^2$  pour le graphe  $G$  (Koebe thm)
- Utiliser une application conforme  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  telle que
  - $\Phi : \{D_0, \dots, D_{n-1}\} \rightarrow \{C_0, \dots, C_{n-1}\}$
  - l'origine est un **center point** de  $\{\Phi(p_0), \dots, \Phi(p_{n-1})\}$
- Choisir un plan aléatoire passant par l'origine: cela conduit au séparateur souhaité

$G$



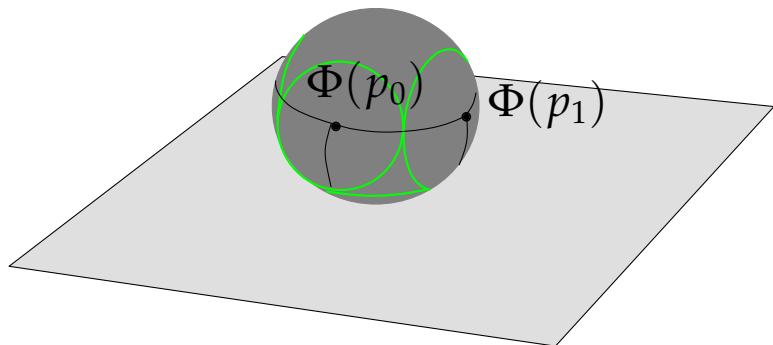
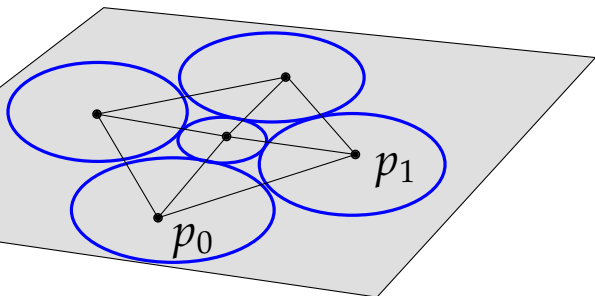
# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

**Lemma 1** (existence de l'application conforme  $\Phi$ )

Il existe une application conforme  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  telle que

- $\Phi : \{D_0, \dots, D_{n-1}\} \rightarrow \{C_0, \dots, C_{n-1}\}$
- l'origine est un **center point** de  $\{\Phi(p_0), \dots, \Phi(p_{n-1})\}$

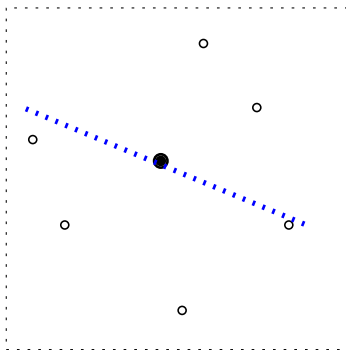
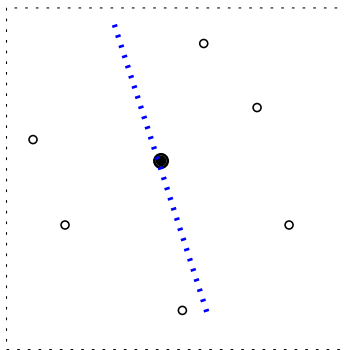
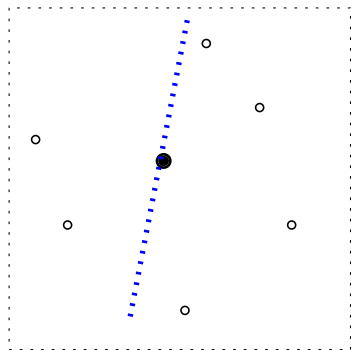
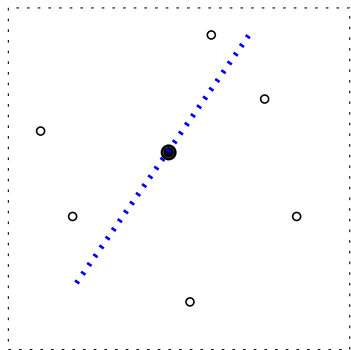
G



# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

## (Def) Center Points

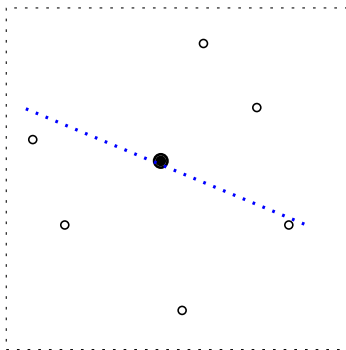
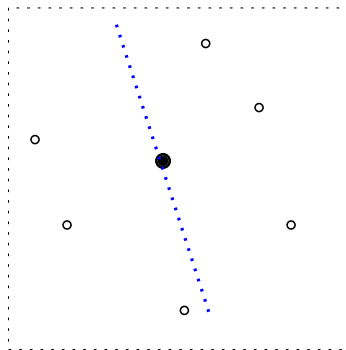
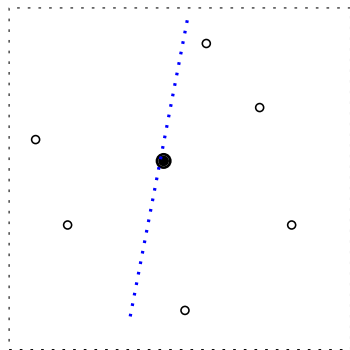
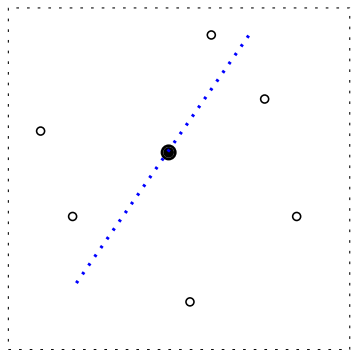
Pour tout ensemble  $S = \{p_1, \dots, p_n\} \subset R^d$ , un point  $x$  est un center point de  $S$  si tout hyperplan passant par  $x$  sépare  $S$  en deux parties de taille au moins  $\frac{n}{d+1}$ .



# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

## Center Point Theorem

*Tout ensemble fini  $S = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$  possède au moins un center point.*



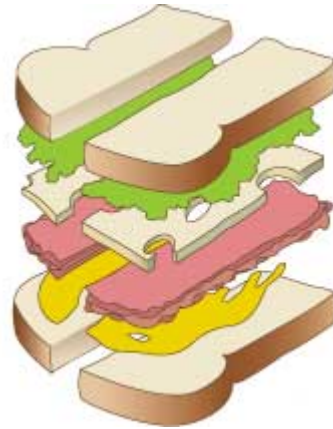
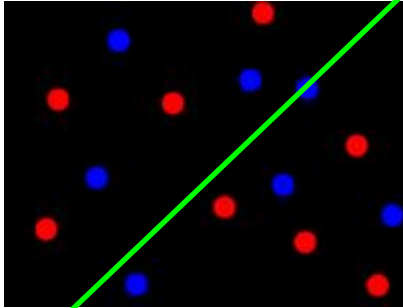
# Convex geometry: fundamentals results

Radon Theorem, Helly Theorem, Center Point Theorem

# Ham sandwich theorem

## Theorem

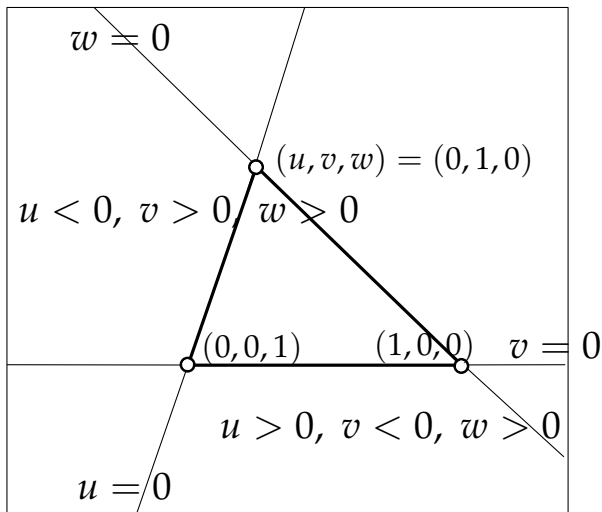
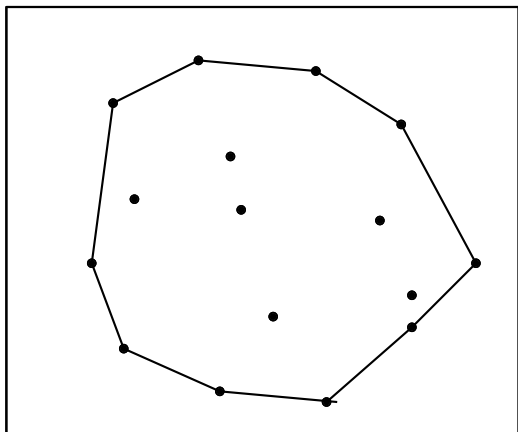
*Toute famille finie de  $d$  ensembles en  $\mathbb{R}^d$  peut être bisectée simultanément par un hyperplan.*



# Combinaisons affines et convexes: rappel

$aff(\mathcal{S}) = \{ \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \mid \sum_i \alpha_i = 1 \}$  combinaison affine

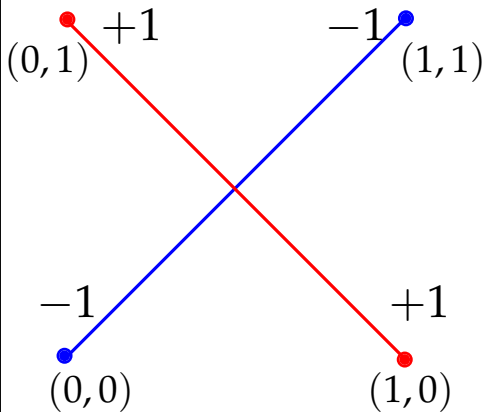
$convex(\mathcal{S}) = \{ \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \mid \alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1 \}$  combinaison convexe



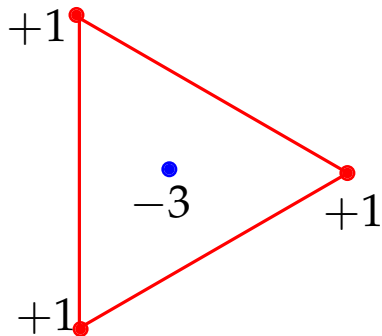
# Thm de Radon

## Theorem de Radon (1921)

*Etant donné  $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$ , où  $n > d + 1$ , il existe une partition  $S_1, S_2$  de  $\mathcal{S}$ , telle que  $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$ .*



$$(1,1) = -(0,0) + (1,0) + (0,1)$$



# Thm de Radon

## Theorem de Radon (1921)

Etant donné  $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$ , où  $n > d + 1$ , il existe une partition  $S_1, S_2$  de  $\mathcal{S}$ , telle que  $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$ .

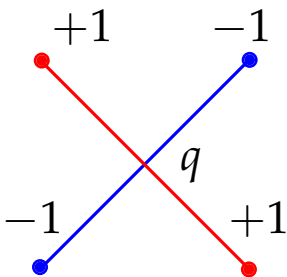
$$p_{d+2} = \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i p_i, \text{ où } \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1$$

Il existe donc  $d + 2$  coefficients  $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+2}$  (qui ne sont pas tous nuls), satisfaisant les  $d + 1$  équations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i p_i^x = 0 & (p_i^x \text{ étant la coordonnée } x \text{ de } p_i) \\ \sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i p_i^y = 0 \\ \dots \end{cases} \quad (1.1)$$

$$q = \sum_{i \in P} \frac{\alpha_i}{A} p_i, \text{ où on définit } A = \sum_{i \in P} \alpha_i$$

$$q = \sum_{i \in N} \frac{-\alpha_i}{A} p_i, \text{ avec cette fois } A = \sum_{i \in N} -\alpha_i$$

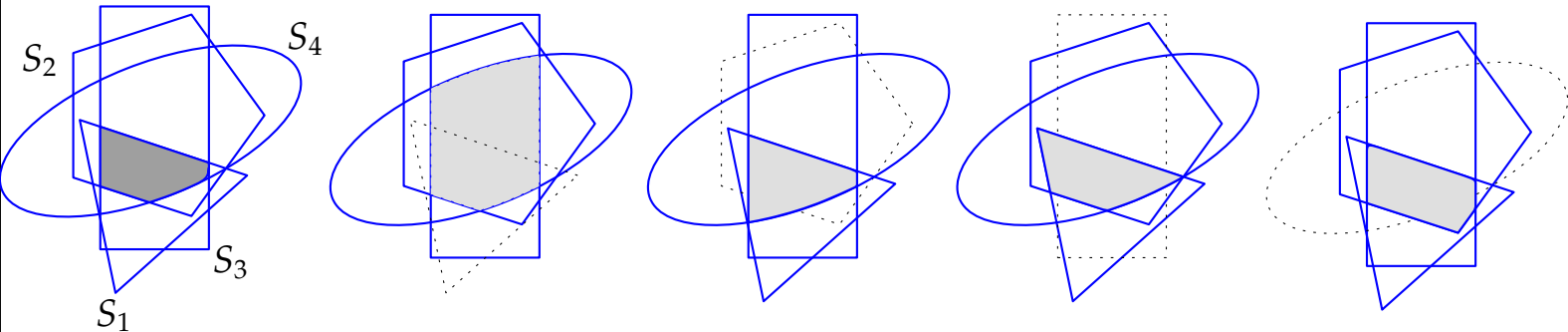


# Thm de Helly

## Thm de Helly (1913)

Soit  $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n\}$  une famille finie de convexes de  $\mathbb{R}^d$  (avec  $n \geq d + 1$ ). Si l'intersection de toute sous-famille de taille  $d + 1$  est non vide alors on a aussi

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{S}_i \neq \emptyset$$



# Thm de Helly

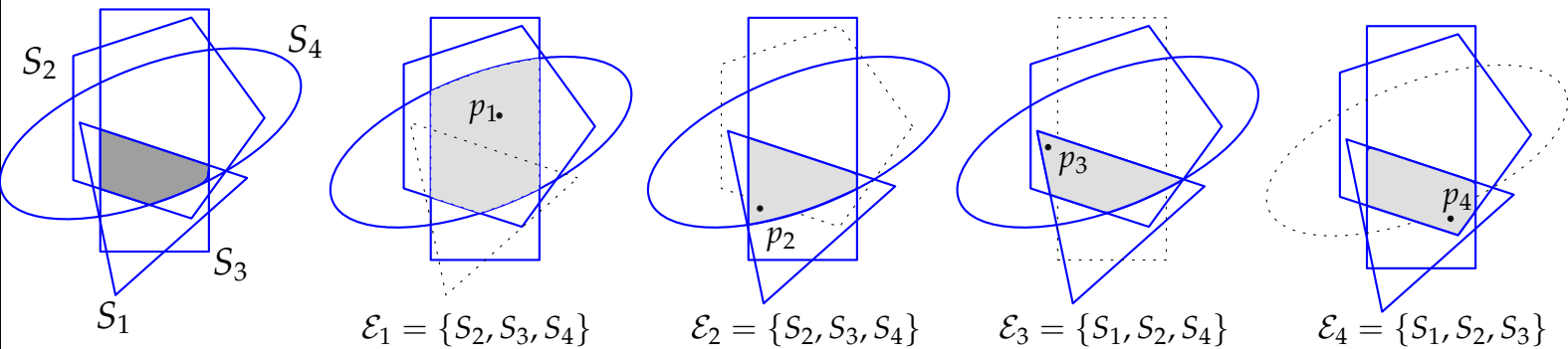
## Thm de Helly (1913)

Soit  $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n\}$  une famille finie de convexes de  $\mathbb{R}^d$  (avec  $n \geq d + 1$ ). Si l'intersection de toute sous-famille de taille  $d + 1$  est non vide alors on a aussi

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{S}_i \neq \emptyset$$

**preuve (induction sur  $n$ )**

$$\bullet \mathcal{E}_i := \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_i = \{\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \dots\} \quad |\mathcal{E}_i| := n - 1 \longrightarrow \bigcap_j \mathcal{S}'_j \neq \emptyset$$
$$p_j \in \bigcap_j \mathcal{S}'_j$$



# Thm de Helly

## Thm de Helly (1913)

Soit  $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n\}$  une famille finie de convexes de  $\mathbb{R}^d$  (avec  $n \geq d + 1$ ). Si l'intersection de toute sous-famille de taille  $d + 1$  est non vide alors on a aussi

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{S}_i \neq \emptyset$$

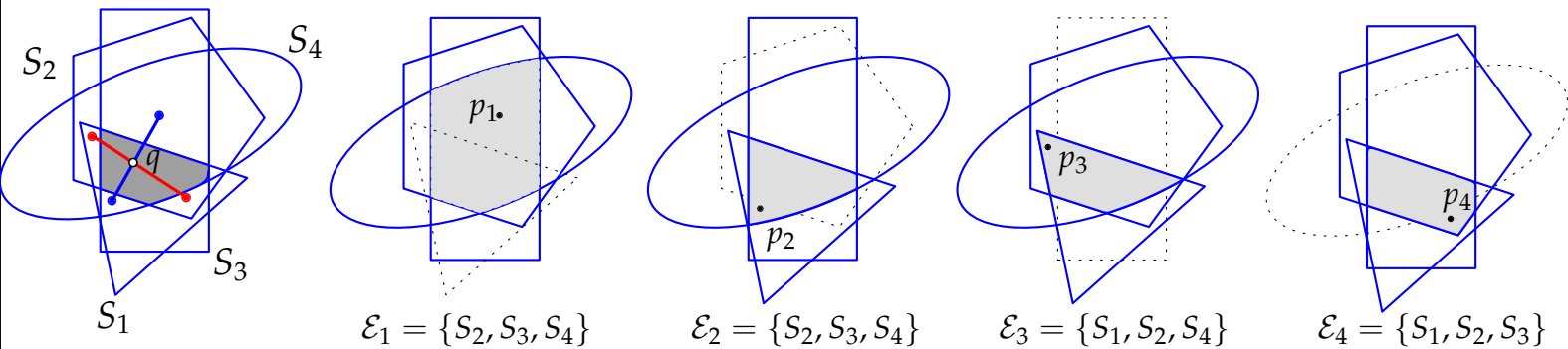
**preuve (induction sur  $n$ )**

(cas de base de l'induction:  $n = d + 1$ )

$$\bullet \mathcal{E}_i := \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_i = \{\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \dots\} \quad |\mathcal{E}_i| := n - 1 \longrightarrow \bigcap_j \mathcal{S}'_j \neq \emptyset$$

$$\bullet P = P_1 \cup P_2 \quad \text{(Radon)} \quad p_j \in \bigcap_j \mathcal{S}'_j$$

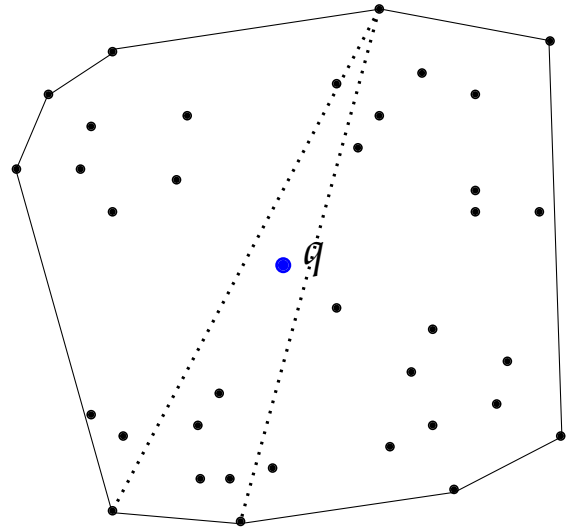
$$q \in (\text{conv}(P_1) \cap \text{conv}(P_2))$$



# Thm de Carathéodory

## Thm de Carathéodory (1911)

*Etant donné un ensemble  $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_n\}$  de points de  $\mathbb{R}^d$ , tout point  $q \in \text{conv}(\mathcal{S})$  peut s'exprimer comme combinaison convexe d'au plus  $d + 1$  points de  $\mathcal{S}$ .*



# Thm de Carathéodory

## Thm de Carathéodory (1911)

Etant donné un ensemble  $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_n\}$  de points de  $\mathbb{R}^d$ , tout point  $q \in \text{conv}(\mathcal{S})$  peut s'exprimer comme combinaison convexe d'au plus  $d + 1$  points de  $\mathcal{S}$ .

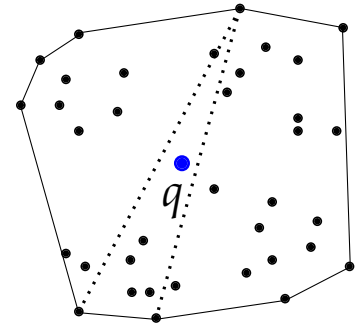
**preuve**(par absurde  $r > d + 1$ )

$r$  minimal tel que

•  $q = \sum_{i=1}^r \alpha_i p'_i$ , où  $\sum_i \alpha_i = 1$  et  $\alpha_i \geq 0$ .  $S' = \{p'_1, \dots, p'_r\} \subset \mathcal{S}$

•  $r > d + 1$

$$\sum_{i=1}^r \beta_i p'_i = 0, \text{ et } \sum_i \beta_i = 0$$



# Thm de Carathéodory

## Thm de Carathéodory (1911)

Etant donné un ensemble  $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_n\}$  de points de  $\mathbb{R}^d$ , tout point  $q \in \text{conv}(\mathcal{S})$  peut s'exprimer comme combinaison convexe d'au plus  $d + 1$  points de  $\mathcal{S}$ .

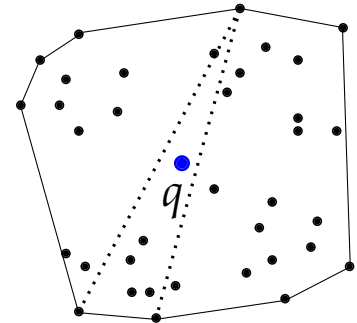
preuve (par absurde  $r > d + 1$ )  $r$  minimal tel que

$$\mathcal{S}' = \{p'_1, \dots, p'_r\} \subset \mathcal{S}$$

$$\gamma_i = \alpha_i - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \beta_i$$

supposons  $\beta_r > 0$

$\frac{\alpha_r}{\beta_r} \leq \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ , pour tous les  $i < r$  tels que  $\beta_i > 0$



# Thm de Carathéodory

## Thm de Carathéodory (1911)

Etant donné un ensemble  $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_n\}$  de points de  $\mathbb{R}^d$ , tout point  $q \in \text{conv}(\mathcal{S})$  peut s'exprimer comme combinaison convexe d'au plus  $d + 1$  points de  $\mathcal{S}$ .

preuve (par absurde  $r > d + 1$ )  $r$  minimal tel que

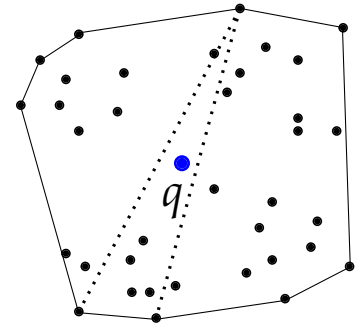
$$S' = \{p'_1, \dots, p'_r\} \subset \mathcal{S}$$

- $\gamma_i = \alpha_i - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \beta_i$  supposons  $\beta_r > 0$   
 $\frac{\alpha_r}{\beta_r} \leq \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ , pour tous les  $i < r$  tels que  $\beta_i > 0$

$$q = \sum_{i=1}^r \alpha_i p'_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i p'_i - \frac{\alpha_r}{\beta_r} (\sum_{i=1}^r \beta_i p'_i) = \sum_{i=1}^{r-1} (\alpha_i - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \beta_i) p'_i = \sum_{i=1}^{r-1} \gamma_i p'_i$$

$q$  combinaison convexe de  $r - 1$  points avec les nouveaux coefficients  $\gamma_i$

absurde (minimalité de  $r$ )



# Thm de Carathéodory

## Thm de Carathéodory (1911)

Etant donné un ensemble  $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_n\}$  de points de  $\mathbb{R}^d$ , tout point  $q \in \text{conv}(\mathcal{S})$  peut s'exprimer comme combinaison convexe d'au plus  $d + 1$  points de  $\mathcal{S}$ .

preuve (par absurde  $r > d + 1$ )  $r$  minimal tel que

$$\mathcal{S}' = \{p'_1, \dots, p'_r\} \subset \mathcal{S}$$

$$\gamma_i = \alpha_i - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \beta_i$$

les  $\gamma_i$  sont tous non négatifs et forment une partition de l'unité

$$\bullet \begin{cases} \gamma_i \geq \alpha_i \geq 0 & \text{si } \beta_i \leq 0 \\ \gamma_i = \alpha_i - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \beta_i \geq \alpha_i - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \beta_i = 0 & \text{si } \beta_i > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \sum_{i=1}^{r-1} \gamma_i = \sum_{i=1}^{r-1} \left( \alpha_i - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \beta_i \right) = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \sum_{i=1}^r \beta_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$$

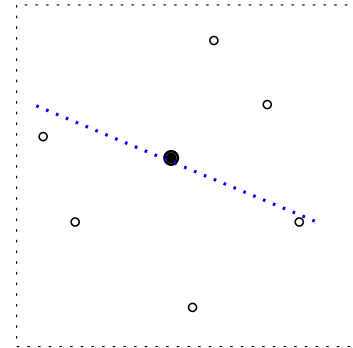
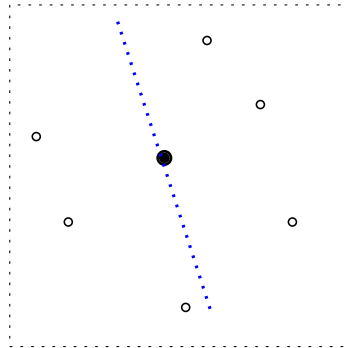
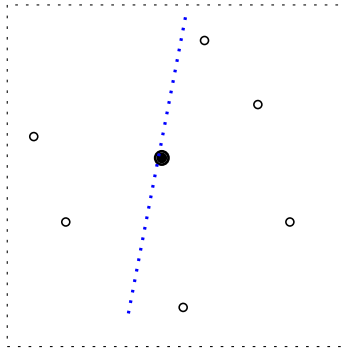
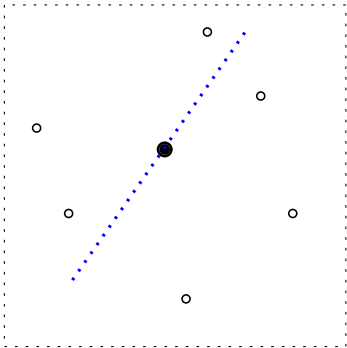
# Center Points

# Center points

## Center Points

(def)

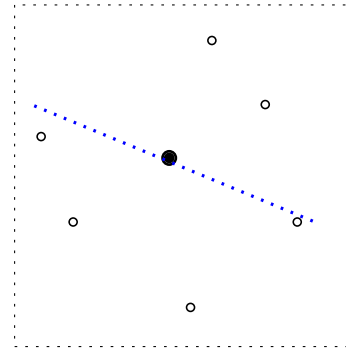
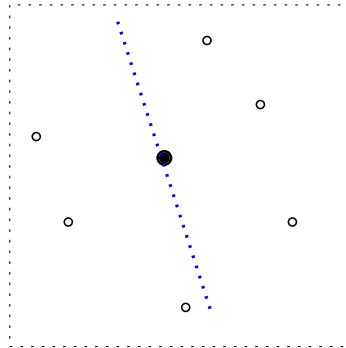
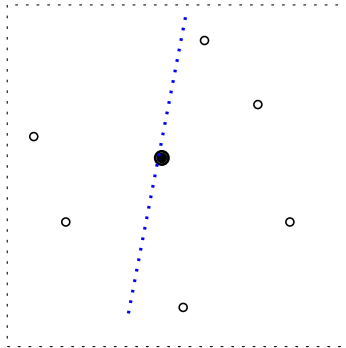
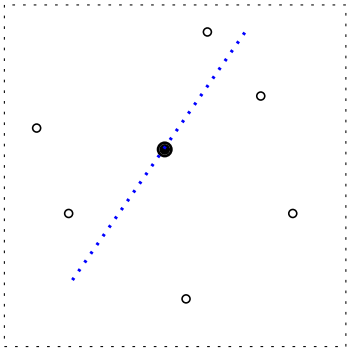
*Pour tout ensemble  $S = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$ , un point  $x$  est un center point de  $S$  si tout hyperplan passant par  $x$  sépare  $S$  en deux parties de taille au moins  $\frac{n}{d+1}$ .*



# Center points

**Center Point Theorem (Rado 1947, Danzer et al. 1963)**

*Tout ensemble fini  $S = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$  possède au moins un center point.*



# Center points: preuve d'existence

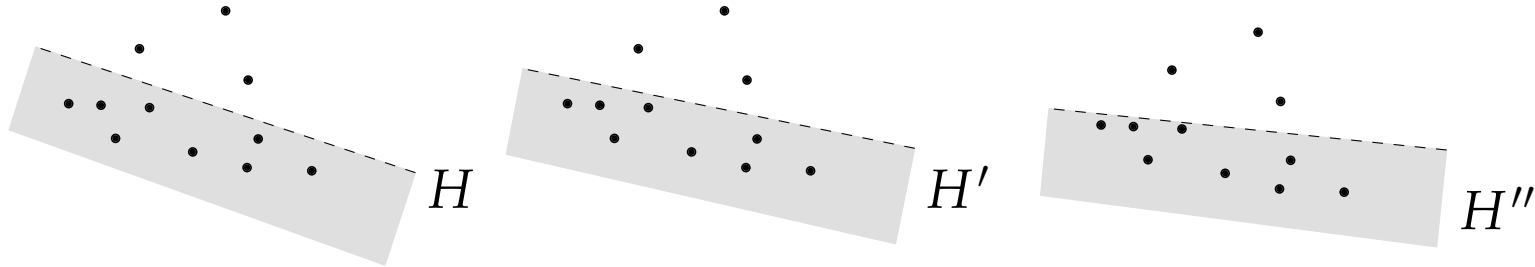
(stratégie)

Cherchons un center point dans l'intersection de tout les demi-espaces ouverts t.q.

$$|H \cap S| > \frac{d}{d+1}n$$

- un nombre infini de demi-espaces  $H_c$

$$\mathcal{H} := \{H \mid |H \cap S| > \frac{d}{d+1}n\} = \{H_i\}_i, \text{ famille infinie de demi-espaces}$$



# Center points: preuve d'existence

(stratégie)

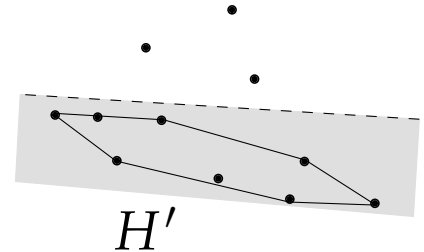
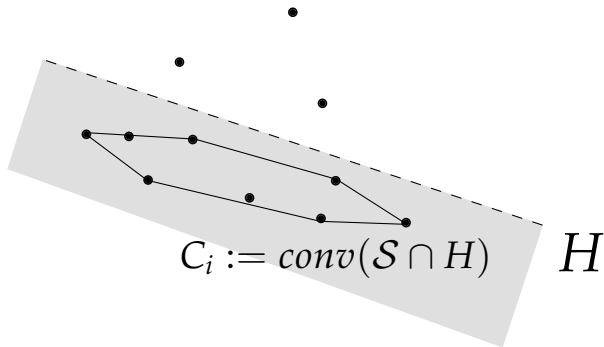
Cherchons un center point dans l'intersection de tout les demi-espaces ouverts t.q.

$$|H \cap S| > \frac{d}{d+1}n$$

- un nombre **infini** de demi-espaces  $H$   
un nombre **fini** de convexes  $\text{conv}(H \cap S)$

$$\mathcal{H} := \{H \mid |H \cap S| > \frac{d}{d+1}n\} = \{H_i\}_i, \text{ famille infinie de demi-espaces}$$

$$\mathcal{C} := \{C \mid C := \text{conv}(H \cap S), H \in \mathcal{H}\} = \{C_i\}_{i \leq N}, \text{ famille finie de convexes}$$



# Center points: preuve d'existence

Cherchons un center point dans l'intersection de tout les demi-espaces ouverts t.q.

$$|H \cap S| > \frac{d}{d+1}n$$

$\mathcal{H} := \{H \mid |H \cap S| > \frac{d}{d+1}n\} = \{H_i\}_i$ , famille infinie de demi-espaces

$\mathcal{C} := \{C \mid C := \text{conv}(H \cap S), H \in \mathcal{H}\} = \{C_i\}_{i \leq N}$ , famille finie de convexes

appliquer le theoreme de Helly à la famille  $\{C_i\}$

$$|C_i| > \frac{d}{d+1}n \longrightarrow C_{j_0} \cap C_{j_1} \cap \dots \cap C_{j_{d+1}} \neq \emptyset$$
$$c \in (C_{j_0} \cap C_{j_1} \cap \dots \cap C_{j_{d+1}})$$

(par absurde)

Si tout les  $C_i$  était disjoints

$$\sum_i |C_i| > (d+1) \frac{d}{d+1}n > dn$$

# Center points: preuve d'existence

$\mathcal{H} := \{H \mid |H \cap S| > \frac{d}{d+1}n\} = \{H_i\}_i$ , famille infinie de demi-espaces

$\mathcal{C} := \{C \mid C := \text{conv}(H \cap S), H \in \mathcal{H}\} = \{C_i\}_{i \leq N}$ , famille finie de convexes

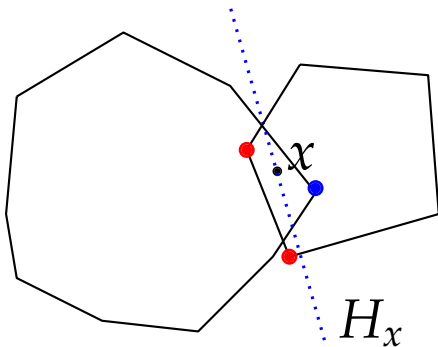
appliquer le theoreme de Helly à la famille  $\{C_i\}$

$|C_i| > \frac{d}{d+1}n \longrightarrow C_{j_0} \cap C_{j_1} \cap \dots \cap C_{j_{d+1}} \neq \emptyset$

$c \in (C_{j_0} \cap C_{j_1} \cap \dots \cap C_{j_{d+1}})$

Helly  
↓

$\bigcap_i C_i \neq \emptyset \longrightarrow x \in (\bigcap_i C_i)$



# Center points: preuve d'existence

$\mathcal{H} := \{H \mid |H \cap S| > \frac{d}{d+1}n\} = \{H_i\}_i$ , famille infinie de demi-espaces

$\mathcal{C} := \{C \mid C := \text{conv}(H \cap S), H \in \mathcal{H}\} = \{C_i\}_{i \leq N}$ , famille finie de convexes

appliquer le theoreme de Helly à la famille  $\{C_i\}$

$\bigcap_i C_i \neq \emptyset \longrightarrow x \in (\bigcap_i C_i) \longrightarrow x$  center point

soit  $H \subset \mathcal{H}$  un demi-espace ouvert contenant  $x$

son complémentaire  $H^c$  ne contient pas  $x$  et  
donc  $n'$  appartient pas à  $\mathcal{H}$

$$\longrightarrow |H^c| \leq \frac{dn}{d+1}$$

$$|H| \geq n - \frac{dn}{d+1} = \frac{n}{d+1} \quad \square$$

# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

## Lemma 2 (plan aléatoire)

Un plan aléatoire par l'origine conduit à un  $\frac{3}{4}$ -séparateur de taille  $2\sqrt{n}$ .

preuve

◦ l'origine est un **center point** de  $\{\Phi(p_0), \dots, \Phi(p_{n-1})\}$

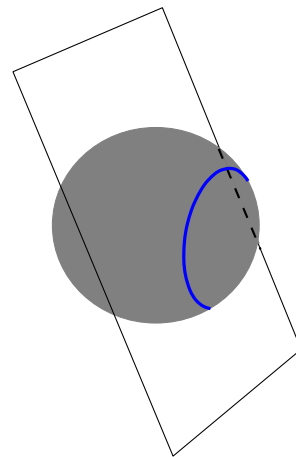
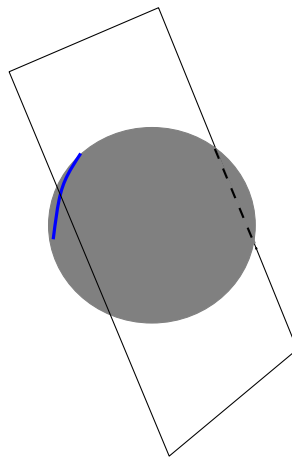
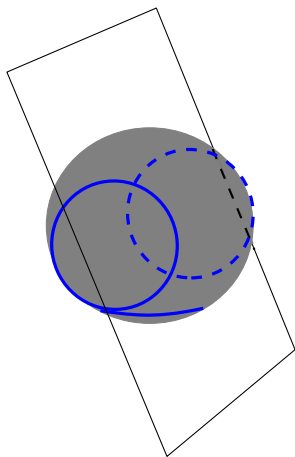
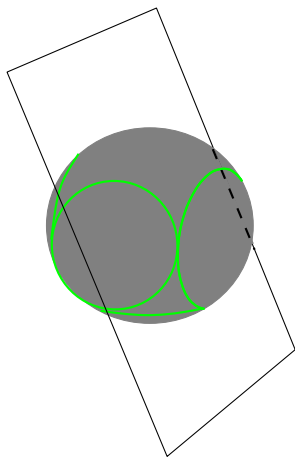
(Center point thm)  $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$   $\begin{cases} |A(C)| \leq \frac{3}{4}n \\ |B(C)| \leq \frac{3}{4}n \end{cases}$

$|A(C)| \geq \frac{1}{4}n$

$\Pi$  (plan aléatoire)

$H(C)$  = cercles intersectés

$B(C)$  = cercles au-dessous  $A(C)$  = cercles au-dessus



# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

**Claim** (Lemma 2)

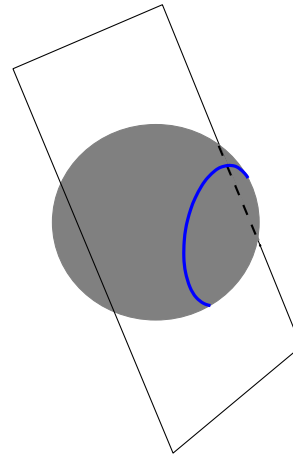
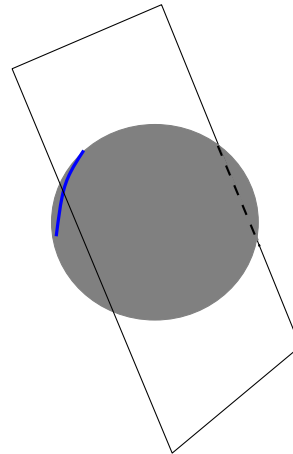
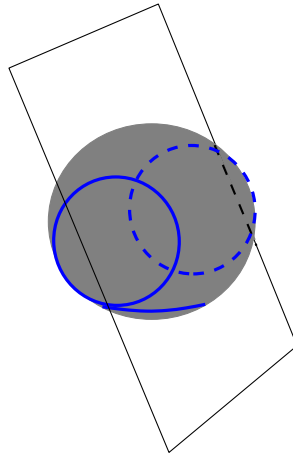
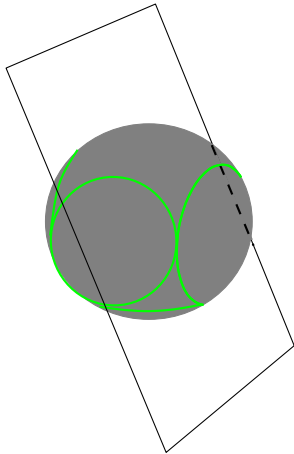
Il existe un plan  $\Pi$ , contenant l'origine, et tel que tel que  $|H(\mathcal{C})| < 2\sqrt{n}$ .

preuve

**But:** évaluer le nombre de plans qui intersectent une calotte donnée  $C_i$ .

$H(\mathcal{C}) =$  cercles intersectés

$B(\mathcal{C}) =$  cercles au-dessous  $A(\mathcal{C}) =$  cercles au-dessus



# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

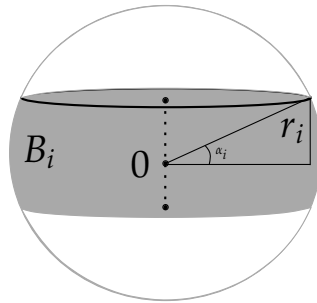
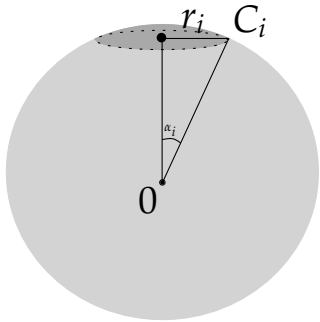
**Claim** (Lemma 2)

Il existe un plan  $\Pi$ , contenant l'origine, et tel que tel que  $|H(\mathcal{C})| < 2\sqrt{n}$ .

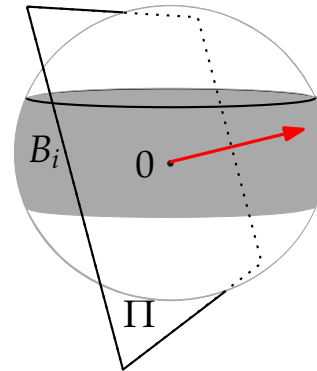
**But:** évaluer le nombre de plans qui intersectent une calotte donnée  $C_i$ .

$H(\mathcal{C}) =$  cercles intersectés par un plan aléatoire  $\Pi$

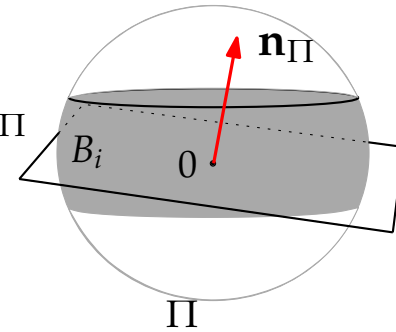
$C_i$  définit une calotte circulaire avec rayon  $r_i$



$\Pi \cap C_i \neq \emptyset$



$\Pi \cap C_i = \emptyset$



# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

## Claim (Lemma 2)

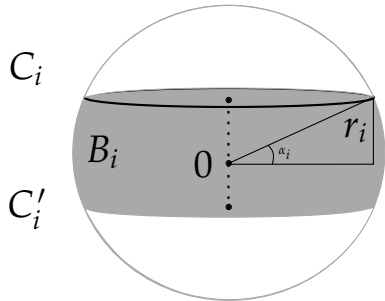
Il existe un plan  $\Pi$ , contenant l'origine, et tel que  $|H(\mathcal{C})| < 2\sqrt{n}$ .

**But:** évaluer le nombre de plans qui intersectent une calotte donnée  $C_i$ .

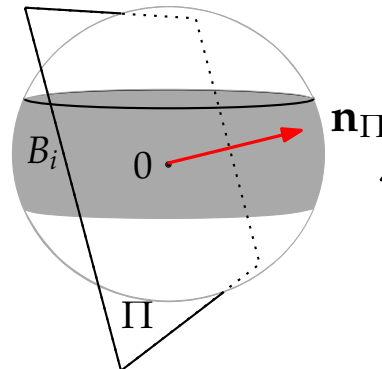
- $\Pi \cap C_i \neq \emptyset$  si et seulement si  $n_{\Pi} \in B_i$  (où  $\|n_{\Pi}\| = 1$ )

$$\bullet \text{ } Prob(\Pi \cap C_i \neq \emptyset) = Prob(\mathbf{n} \in B_i) = \frac{\text{aire}(B_i)}{\text{aire}(S^2)} = \frac{4\pi r_i}{4\pi}$$

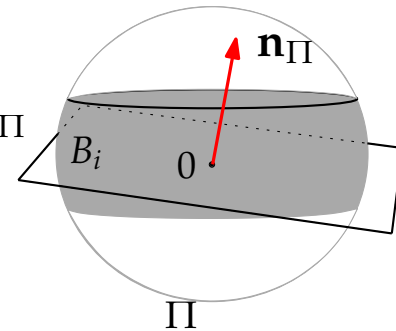
$C_i$  et  $C'_i$  définissent une surface annulaire  $B_i$  d'hauteur  $2r_i$



$\Pi \cap C_i \neq \emptyset$



$\Pi \cap C_i = \emptyset$



# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

## Claim (Lemma 2)

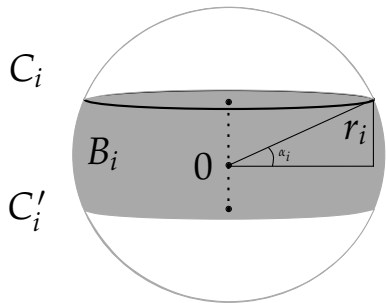
Il existe un plan  $\Pi$ , contenant l'origine, et tel que  $|H(\mathcal{C})| < 2\sqrt{n}$ .

But:

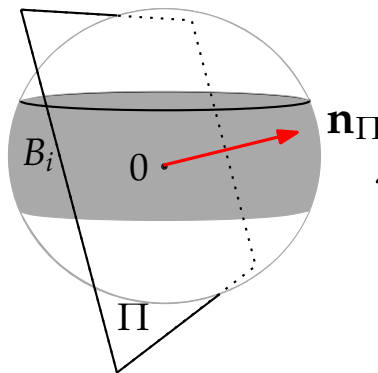
évaluer l'esperance du nombre de calottes  $C_i$  intersectées par un plan aléatoire

$$E(|H(\mathcal{C})|) = E(|\{B_i \text{ intersectés par un point } \mathbf{n} \text{ aléatoire}\}|) = \sum_i r_i$$

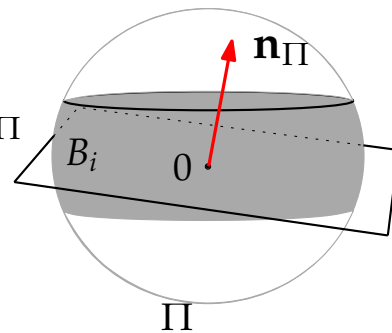
$C_i$  et  $C'_i$  définissent une surface annulaire  $B_i$  d'hauteur  $2r_i$



$\Pi \cap C_i \neq \emptyset$



$\Pi \cap C_i = \emptyset$



# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

(Lemma 2)

Il existe un plan  $\Pi$ , contenant l'origine, et tel que  $|H(\mathcal{C})| < 2\sqrt{n}$ .

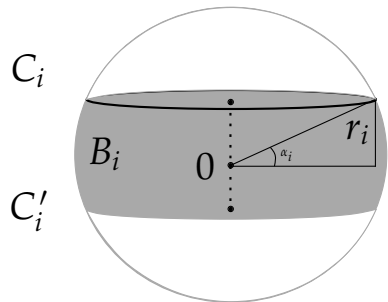
Conclusion:

les  $C_i$  sont disjoints

- $\text{aire}(C_i) \geq \pi r_i^2$
- $\text{aire}(S^2) = 4\pi$

$$\left. \begin{array}{l} \text{les } C_i \text{ sont disjoints} \\ \text{aire}(C_i) \geq \pi r_i^2 \\ \text{aire}(S^2) = 4\pi \end{array} \right\} \longrightarrow \sum_i \pi r_i^2 < \sum_i \text{aire}(C_i) \leq 4\pi \longrightarrow \boxed{\sum_i r_i^2 < 4}$$

$$\frac{1}{n} \left( \sum_i^n r_i \right)^2 \leq \sum_i^n r_i^2 < 4$$



$$\boxed{E(|H(\mathcal{C})|) = \sum_i^n r_i < 2\sqrt{n}}$$

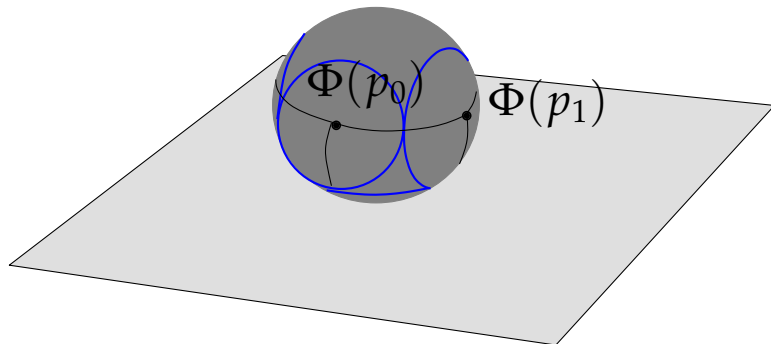
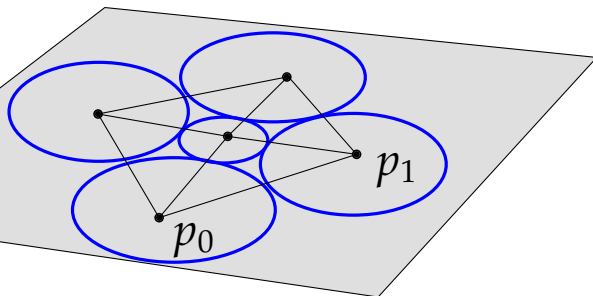
□

Claim et Lemma 2

# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

- *Pour trouver un séparateur on choisit un plan aléatoire passant par l'origine*

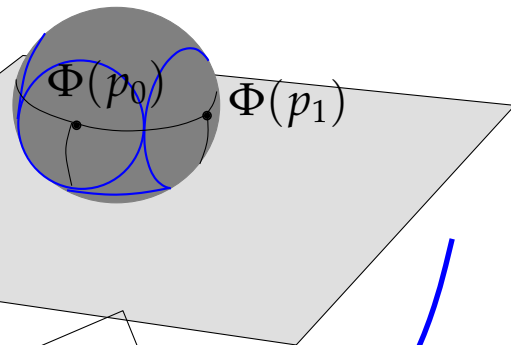
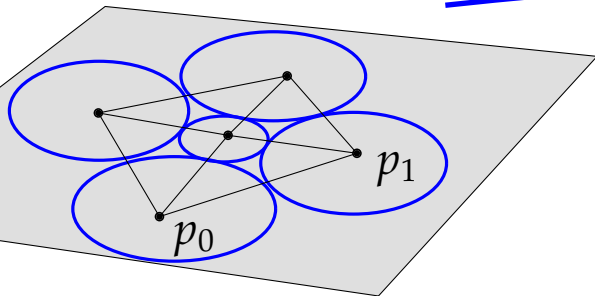
G



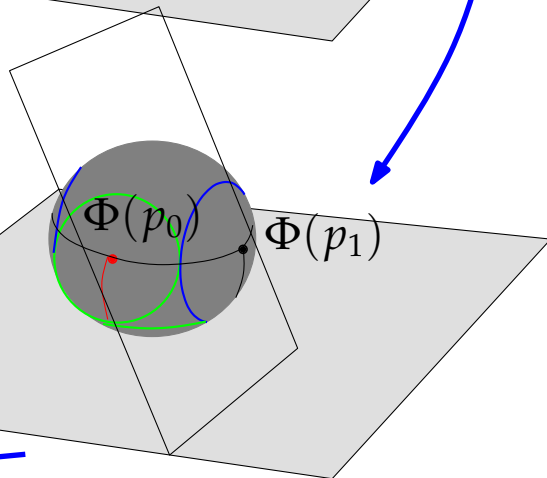
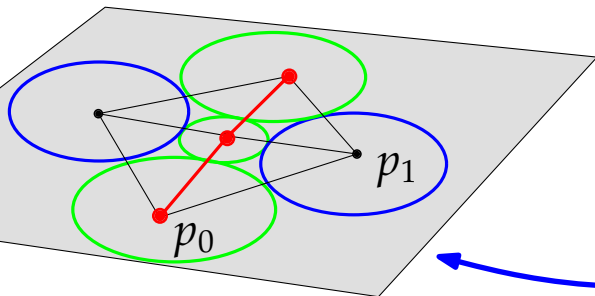
# Théorème de Koebe et séparateurs géométriques

- Pour trouver un séparateur on choisit un plan aléatoire passant par l'origine

$G$



$S$



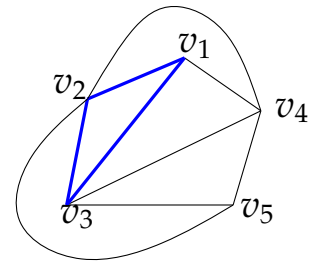
# Graph separators applications

# Représentations de graphes (classiques)

matrice d'adjacence de  $G$

$$A_G[i, j] = \begin{cases} 1 & v_i \text{ adjacent } v_j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad O(n^2) \text{ bits}$$

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



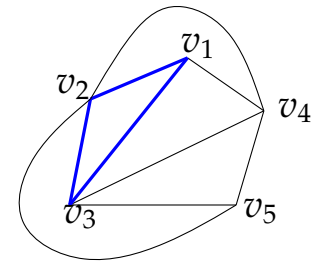
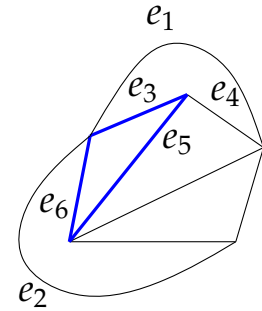
# Représentations de graphes (classiques)

matrice d'incidence de  $G$

$O(n^2)$  bits

$$D_G[i, k] = \begin{cases} 1 & v_i \text{ adjacent à l'arête } e_k \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$D_G = \begin{array}{cccccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\ \left[ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ \dots \end{array} \end{array}$$



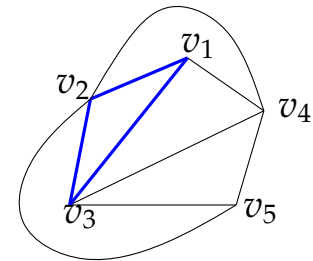
# Représentations de graphes (classiques)

## Listes d'adjacences

$$L_G = \begin{array}{c|cccc} d_i & \text{neighbors} & & & \\ \hline 3 & 2 & 3 & 4 & \\ 4 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ & \dots & & & \end{array}$$

$O(n \log n)$  bits

$\left. \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \end{array} \right\}$

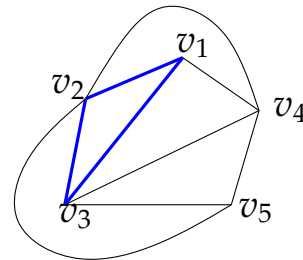


# Représentations de graphes (classiques)

## Listes d'adjacences, avec codage par différences

encore  $O(n \log n)$  bits?

$$L_G = \begin{array}{c|cccc} d_i & \text{sorted neighbors} & & & \\ \hline 3 & 2 & 3 & 4 & \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ & \dots & & & \\ & & & & \dots \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$
$$L_G = \begin{array}{c|cccc} d_i & \text{differences} & & & \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 & \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ & \dots & & & \\ & & & & \dots \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$



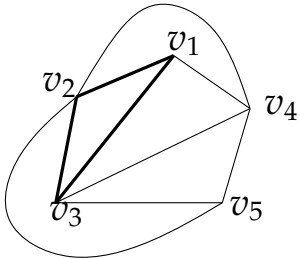
# Représentations de graphes (classiques)

## Listes d'adjacences, avec codage par différences

	$d_i$	sorted neighbors	$d_i$	differences
$v_1$	3	2 3 4	3	1 1 1
$v_2$	4	1 3 4 5	4	-1 2 1 1
$v_3$	4	1 2 4 5	4	-2 1 2 1
...	...	...	...	...

encore  $O(n \log n)$   
bits ?

$d_i$	sign	positive differences
3	1	1 1 1
4	0	1 2 1 1
4	0	2 1 2 1
...	...	...

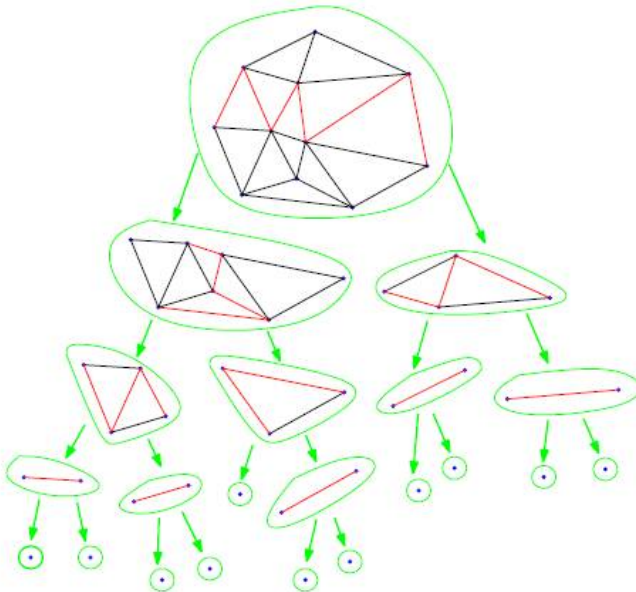


# Représentations de graphes (récentes)

Codage par différences + séparateurs  
renumérotation des sommets

cette fois  $O(n)$  bits

sommets "proches"  
étiquettes proches

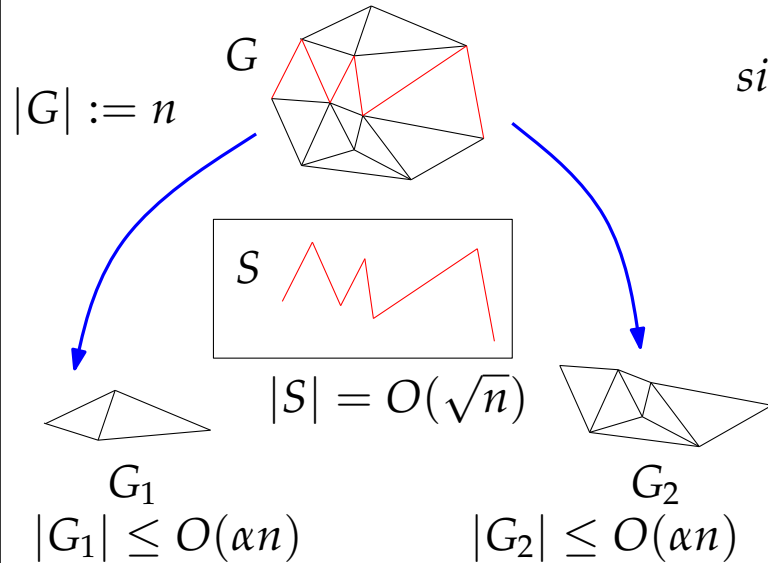


$d_i$	sign	positive differences			
3	1	1	1	1	
4	0	1	2	1	1
4	0	2	1	2	1
...	...	...			

# Représentations de graphes (récentes)

## Thm

Tout graphe planaire à  $n$  sommets peut se coder avec au plus  $O(n)$  bits.



$$\text{size}(G) = \text{size}(G_1) + \text{size}(G_2) + \text{size}(S)$$

$$\text{size}(S) = O(|S| \log |S|)$$

$$\text{size}(S) = O(\sqrt{|G|} \log |G|)$$

$$\text{size}(n) = C \cdot \sqrt{n \log n} + \text{size}(\alpha n) + \text{size}(\alpha n)$$

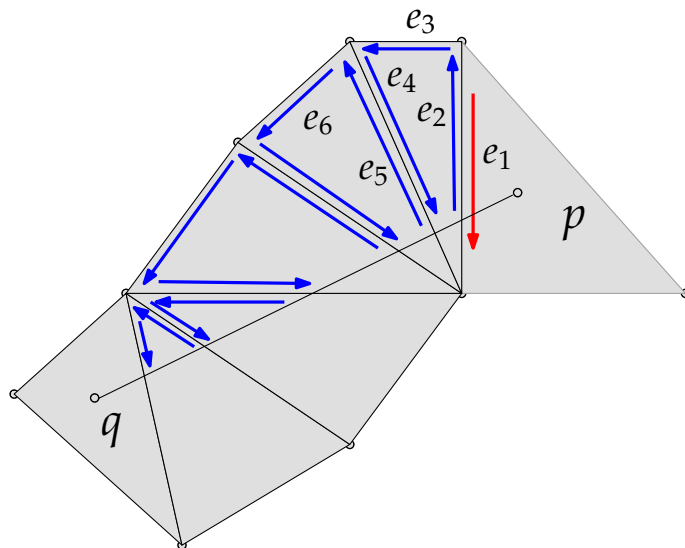
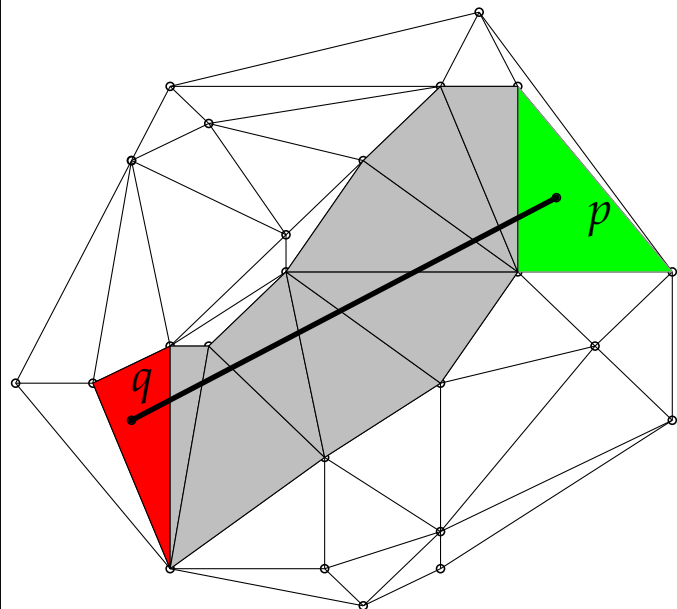
$$\text{size}(n) = O(n)$$

Application: planar point location

# Séparateurs et applications: localisation planaire

## visibility walk

complexité  $O(\sqrt{n})$



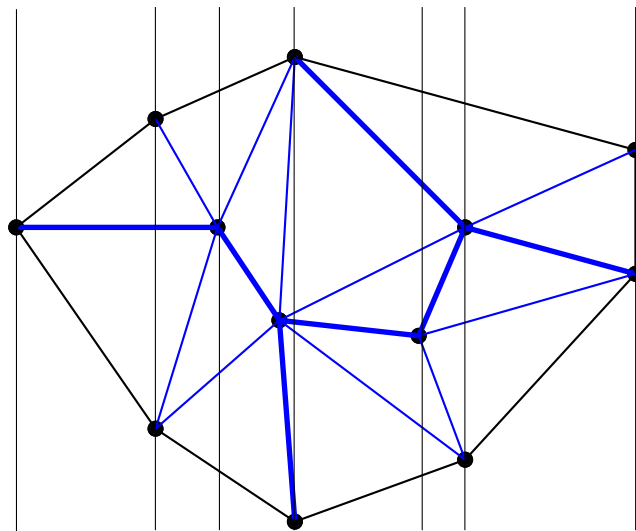
# Séparateurs et applications: localisation planaire

**DS1**:= structure de données de localisation en espace quadratique

**Slab method**

$$Espace(n) = O(n^2)$$

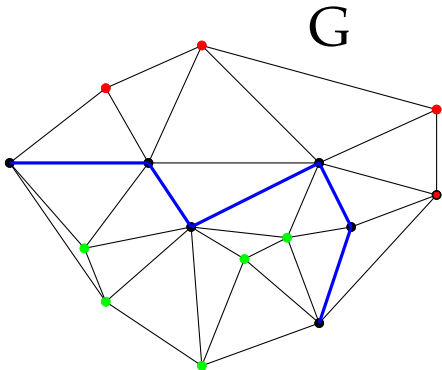
$$Temps(n) = O(\log n)$$



# Graphes planaires et séparateurs

**Thm (Lipton Tarjan 1977)**

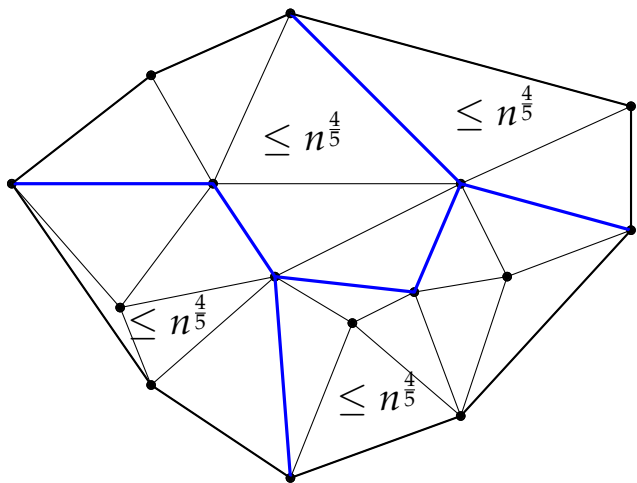
*Etant donnée une triangulation planaire de taille  $n$ , on peut effectuer la localisation d'un point en temps  $O(\log n)$ , avec espace  $O(n)$  et un pretraitement  $O(n \log n)$*



Taille du separateur	Taille de chaque composante
$O(\sqrt{n})$	$O(n)$
$O(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}})$	$O(n\varepsilon)$
$O(n^c)$	$O(n^{2-2c})$
$O(n^{\frac{2}{3}})$	$O(n^{\frac{2}{3}})$
$O(n^{\frac{3}{5}})$	$O(n^{\frac{4}{5}})$

# Séparateurs et applications: localisation planaire

$$|S| = O(n^{\frac{3}{5}}) \quad |G_i| = O(n^{\frac{4}{5}})$$

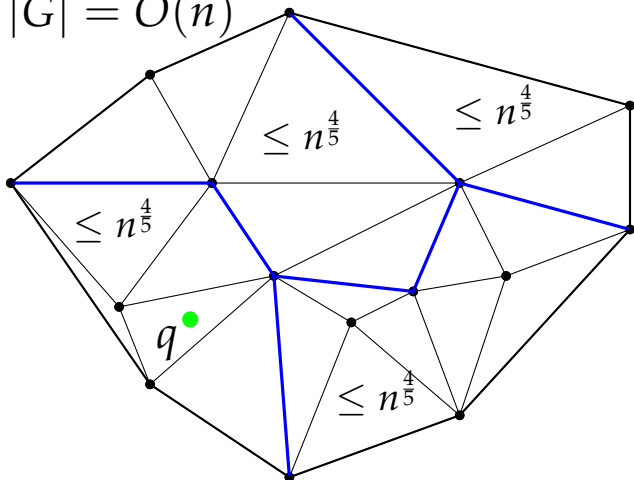


# Séparateurs et applications: localisation planaire

$$|S| = O(n^{\frac{3}{5}})$$

$$|G_i| = O(n^{\frac{4}{5}})$$

$$|G| = O(n)$$

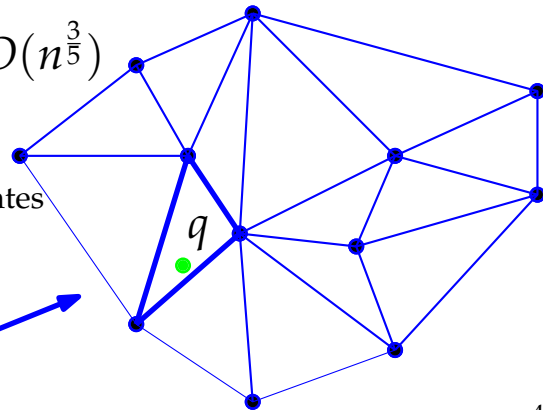


$$\text{Espace}(n) = O(n^2)$$

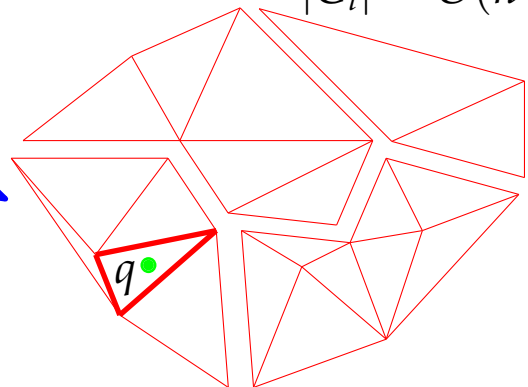
$$\text{Temps}(n) = O(\log n)$$

$$|G'| = O(n^{\frac{3}{5}})$$

suppression des composantes  
+  
retriangulation



$$|G_i| = O(n^{\frac{4}{5}})$$

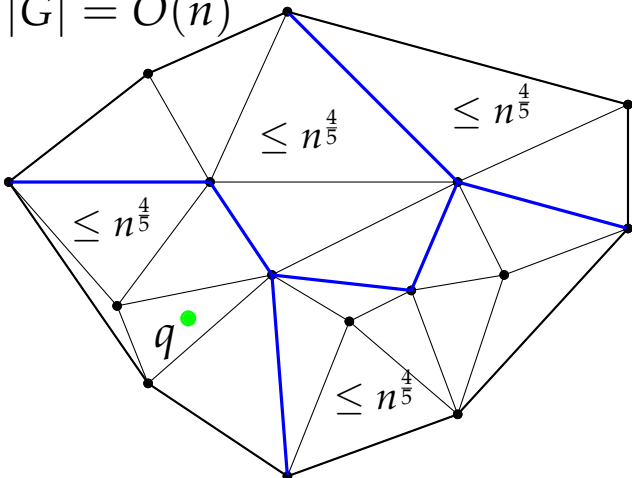


# Séparateurs et applications: localisation planaire

$$|S| = O(n^{\frac{3}{5}})$$

$$|G_i| = O(n^{\frac{4}{5}})$$

$$|G| = O(n)$$



**Localisation** dans  $G$  (avec DS1)

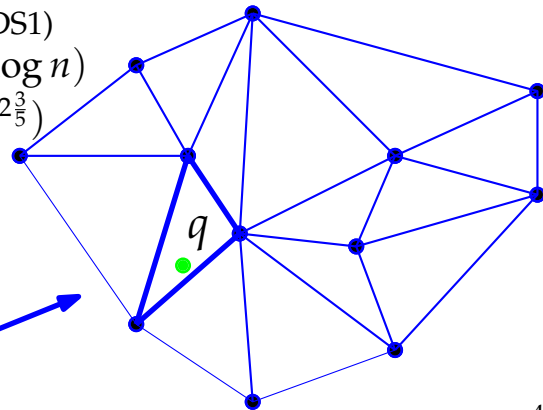
$$\text{Temps}(n) = O(\log n)$$

$$\text{Espace}(n) = O(n^2)$$

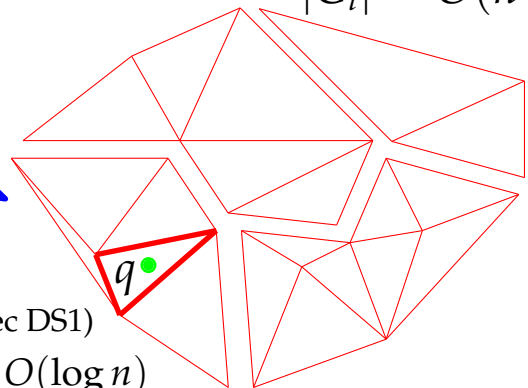
**Localisation** dans les  $G'$  (avec DS1)

$$\text{Temps} = O(\log |G'|) = O(\log n)$$

$$\text{Espace} = O(|G'|^2) = O(n^{\frac{3}{5}})$$



$$|G_i| = O(n^{\frac{4}{5}})$$



**Localisation** dans les  $G_i$  (avec DS1)

$$\text{Temps} = O(\log |G_i|) = O(\log n)$$

$$\text{Espace} = O(\sum_i |G_i|^2) = O(n^{1/5}) \cdot O((n^{\frac{4}{5}})^2)$$



# Missing proofs

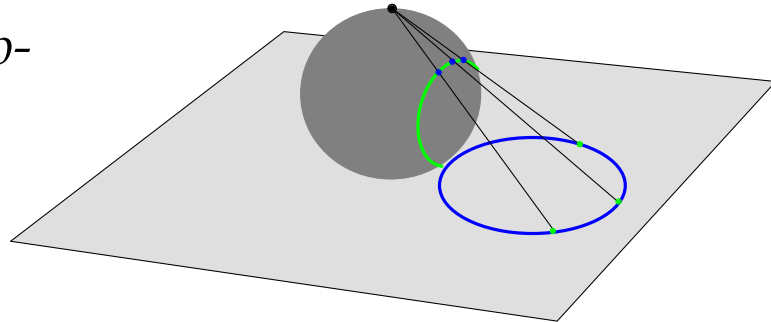
Stereographic projection (preserves circles)

# Projection Stéréographique

## Def: applications conformes

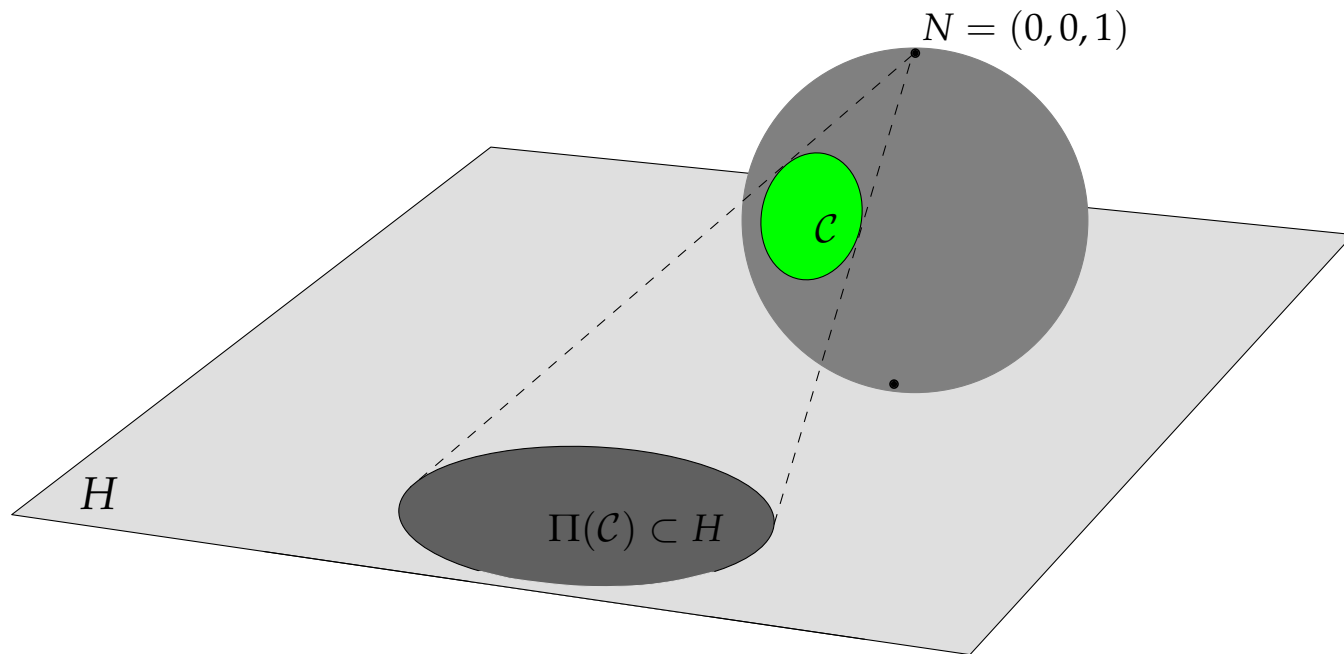
*Ces sont les applications  $\Phi$  qui préservent les angles: l'image d'un cercle par  $\Phi$  est un cercle.*

- *La projection stéréographique (et son inverse) est conforme*
- *autres exemples: translations, rotations, dilatations*



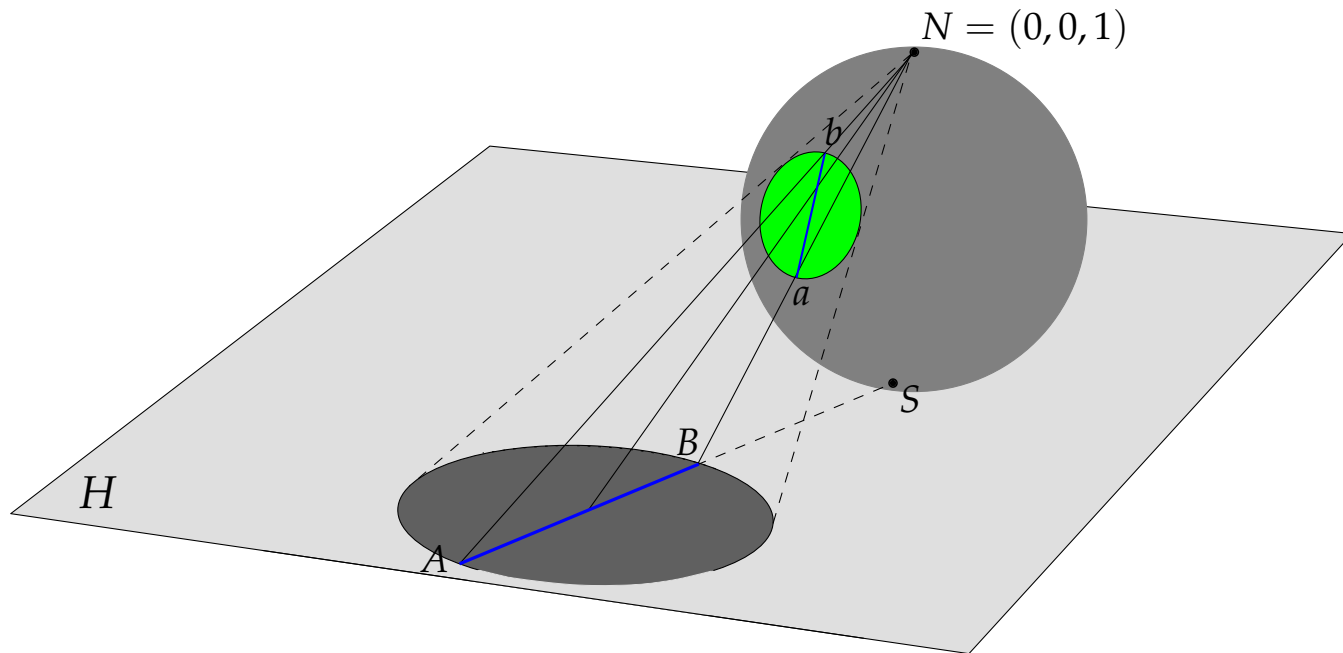
# $\Pi : S^2 \setminus N \rightarrow R^2$    Projection Stéréographique

**Lemme:** Etant donné un cercle  $\mathcal{C}$  l'image  $\Pi(\mathcal{C})$  est un cercle



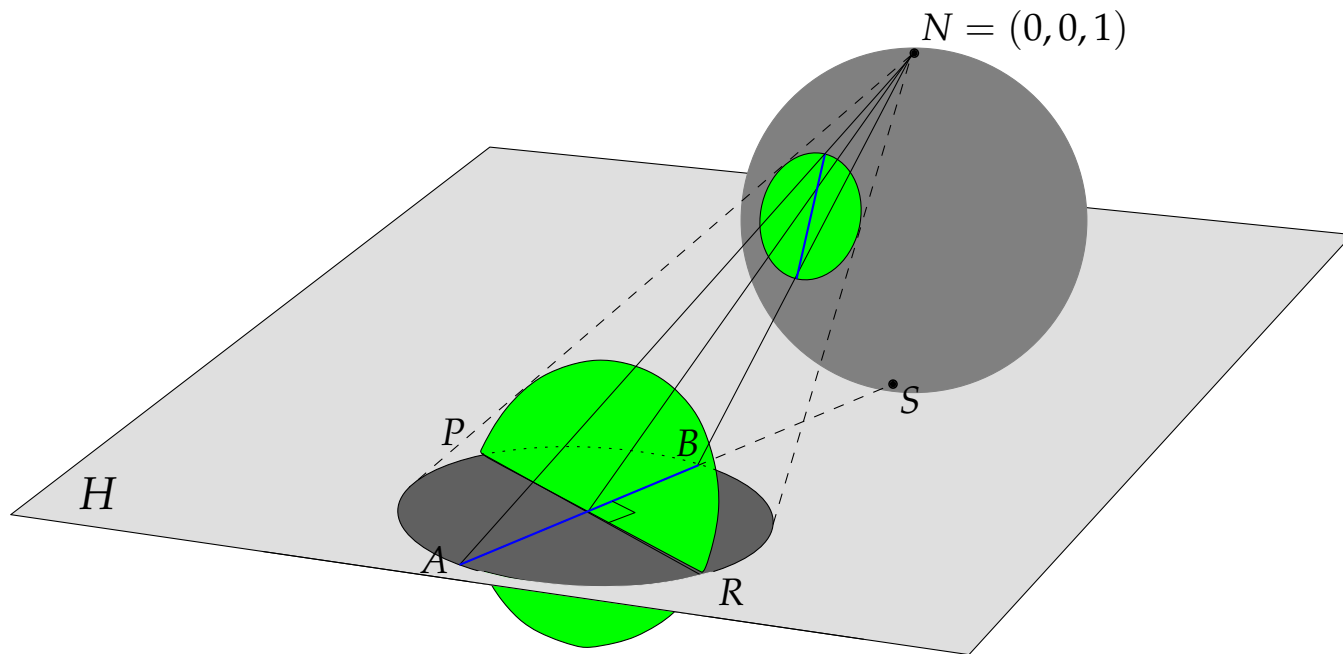
# $\Pi : S^2 \setminus N \rightarrow R^2$    Projection Stéréographique

**Step 1:** Soit  $AB$  l'image du diamètre  $ab$ , obtenu comme intersection de l'hyperplan  $H$ , avec le plan passant par  $N$  and  $S$  et orthogonal à  $H$



# $\Pi : S^2 \setminus N \rightarrow R^2$    Projection Stéréographique

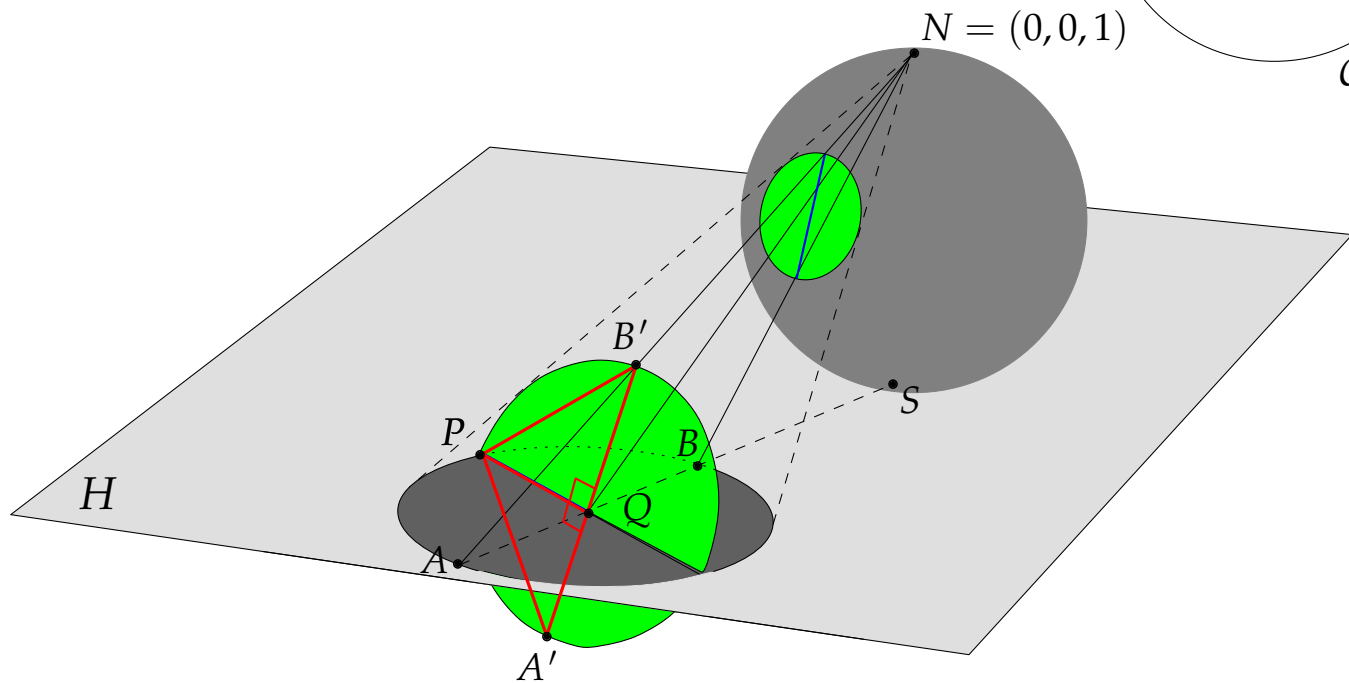
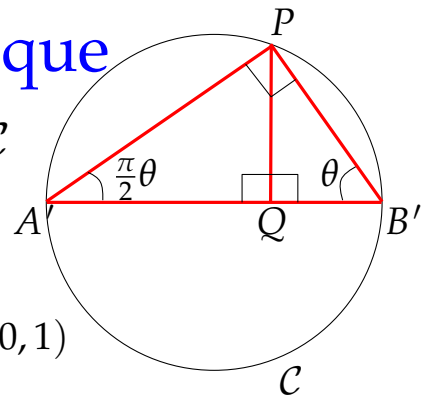
**Step 2:** Soit  $C'$  le cercle (vert), ayant diamètre  $PR$  et appartenant à un plan parallèle à celui contenant  $C$  ( $PR$  et  $AB$  sont orthogonaux)



$$\Pi : S^2 \setminus N \rightarrow R^2$$

# Projection Stéréographique

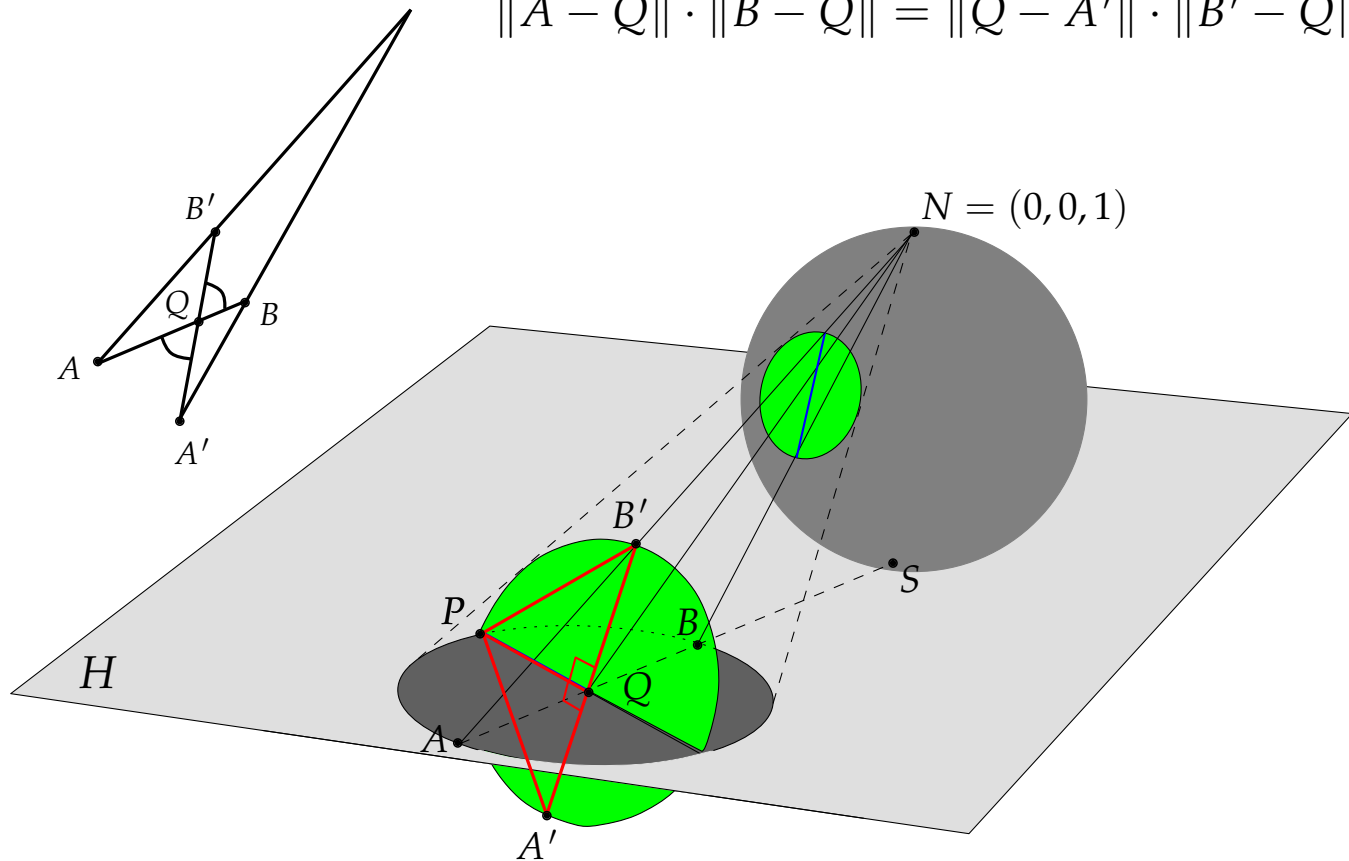
$$\frac{\|P-Q\|}{\|A'-Q\|} = \frac{\|Q-B'\|}{\|P-Q\|} \iff P \in \mathcal{C}$$



$$\Pi : S^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2$$

# Projection Stéréographique

$$\|A - Q\| \cdot \|B - Q\| = \|Q - A'\| \cdot \|B' - Q\|$$



$$\Pi : S^2 \setminus N \rightarrow R^2$$

# Projection Stéréographique

$$\left. \begin{aligned} \|A - Q\| \cdot \|B - Q\| &= \|Q - A'\| \cdot \|B' - Q\| \\ \frac{\|P - Q\|}{\|A' - Q\|} &= \frac{\|Q - B'\|}{\|P - Q\|} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \|P - Q\|^2 = \|A - Q\| \cdot \|B - Q\|$$

