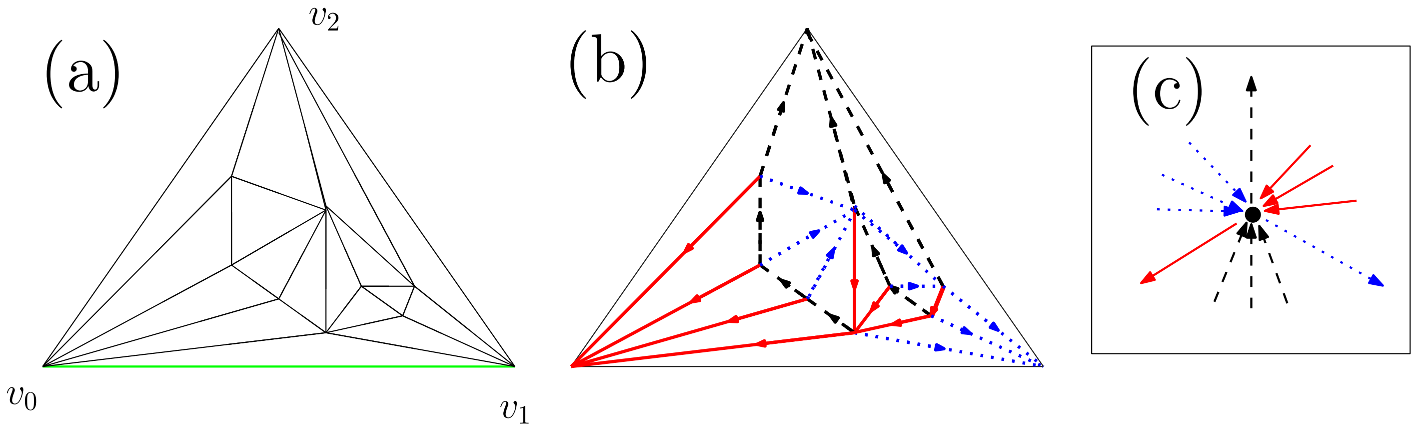
Séparateurs de graphes

Thm (Menger)
Si G est un graphe k-connexe, alors pour tout paire de sommets u, v il existe k chemins disjoints de u à v

Séparateurs de graphes

Thm (Menger)
Si G est un graphe k-connexe, alors pour tout paire de sommets u, v il existe k chemins disjoints de u à v

cas particuliers faciles: triangulations planaires (graphes 3-connexes)

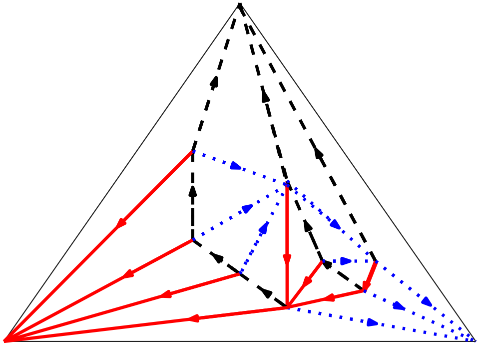


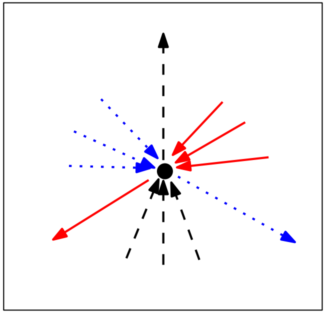
Séparateurs de graphes

Thm (Menger)

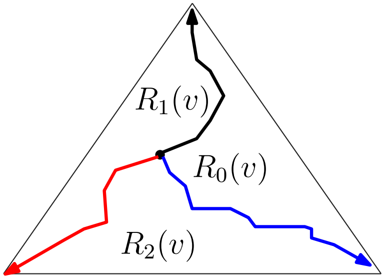
Si G est un graphe k-connexe, alors pour tout paire de sommets u, v il existe k chemins disjoints de u à v

cas particuliers faciles: triangulations planaires (graphes 3-connexes)





trois régions $R_i(v)$ disjointes

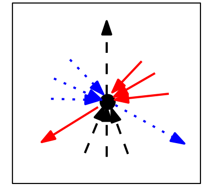


Séparateurs de graphes

Thm (Menger)

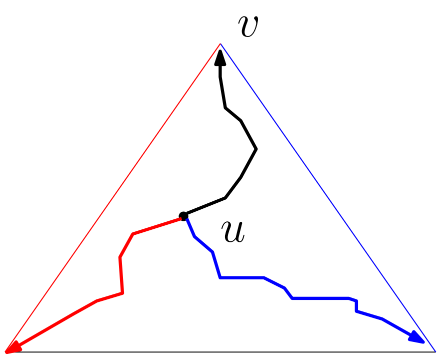
Si G est un graphe k-connexe, alors pour tout paire de sommets u, v il existe k chemins disjoints de u à v

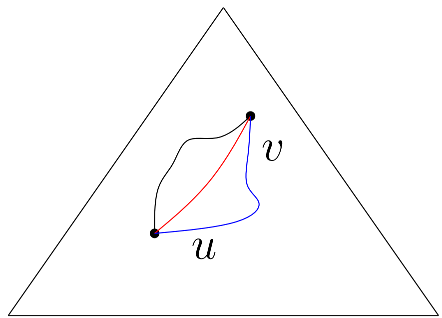
cas particuliers faciles: triangulations planaires (graphes 3-connexes)

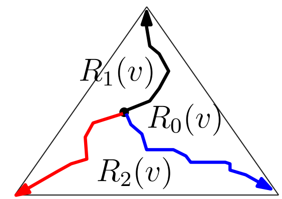


cas 1: $v \in F_{ext}$ cas 2: $u, v \notin F_{ext}$?

trois régions $R_i(v)$ disjointes





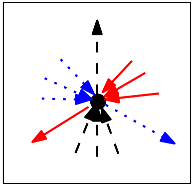


Séparateurs de graphes

Thm (Menger)

Si G est un graphe k-connexe, alors pour tout paire de sommets u, v il existe k chemins disjoints de u à v

cas particuliers faciles: triangulations planaires (graphes 3-connexes)

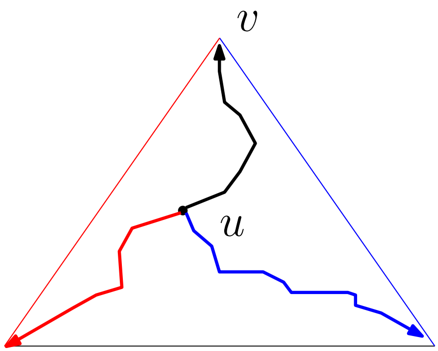


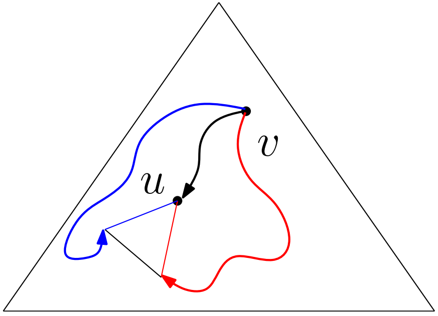
cas 1: $v \in F_{ext}$

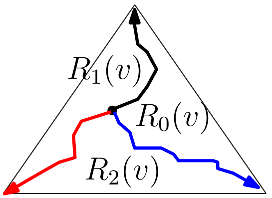
cas 2: $u \in F'_{ext}$

?

trois régions $R_i(v)$ disjointes







Quelques définitions

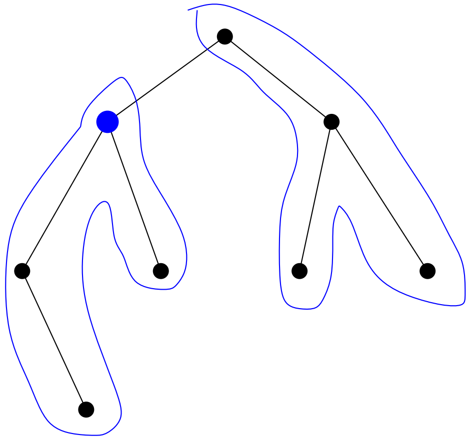
Def (vertex separator)

Etant donné $G = (V, E)$ à n sommets, un ε-séparateur est un ensemble $S \subset V$ tel que:

- *toute composante connexe de $G \setminus S$ a taille au plus εn*

exemples

arbres binaires: admettent des $\frac{2}{3}$-séparateurs de taille 1



Quelques définitions

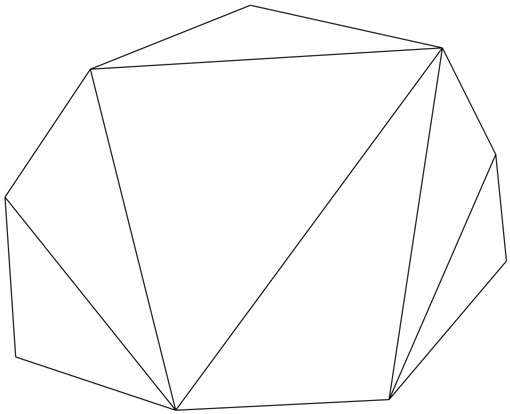
Def (vertex separator)

Etant donné $G = (V, E)$ *à* n *sommets, un* ε*-séparateur est un ensemble* $S \subset V$ *tel que:*

- *toute composante connexe de* $G \setminus S$ *a taille au plus* εn

exemples

graphes outerplanar?



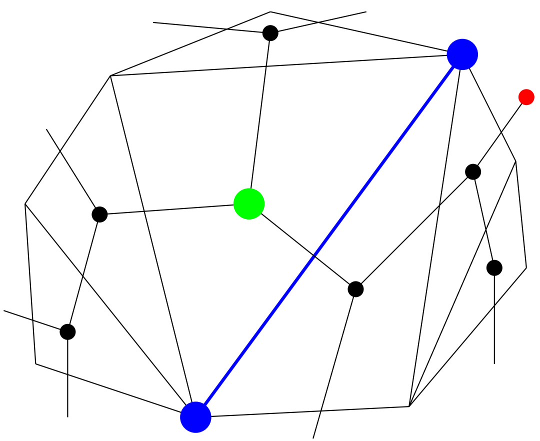
Quelques définitions

Def (vertex separator)

Etant donné $G = (V, E)$ à n sommets, un ε-séparateur est un ensemble $S \subset V$ tel que:

- *toute composante connexe de $G \setminus S$ a taille au plus εn*

exemples



graphes planaires outerplanar: admettent des $\frac{2}{3}$-séparateurs de taille 2

Quelques définitions

Def (vertex separator)

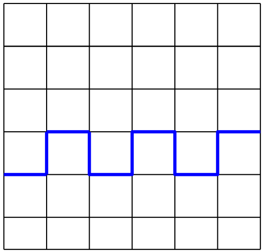
Etant donné $G = (V, E)$ à n sommets, un ε-séparateur est un ensemble $S \subset V$ tel que:

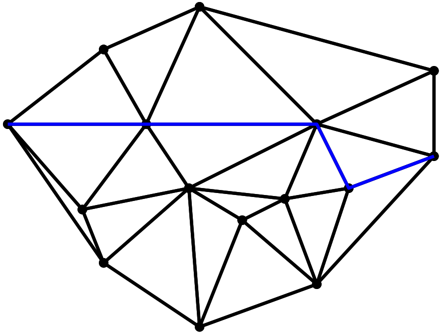
- *toute composante connexe de $G \setminus S$ a taille au plus εn*

exemples

graphes planaires généraux?

graphes généraux?





Graphes planaires et séparateurs

Thm (Lipton et Tarjan)

Tout graphe planaire à n sommets admet un $\frac{2}{3}$-séparateur de taille au plus $\sqrt{8n}$.

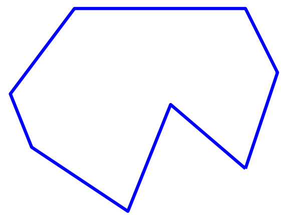
Graphes planaires et séparateurs

Thm (Lipton et Tarjan)

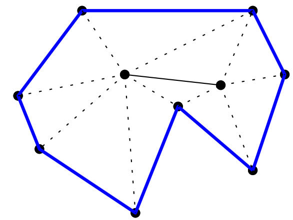
Tout graphe planaire à n sommets admet un $\frac{2}{3}$-séparateur de taille au plus $\sqrt{8n}$.

Quelques notations

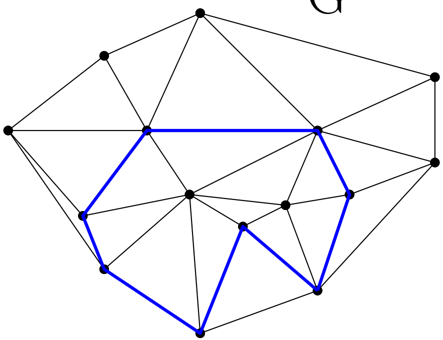
les sommets de $Int(C)$ ne sont pas adjacents à ceux de $Ext(C)$



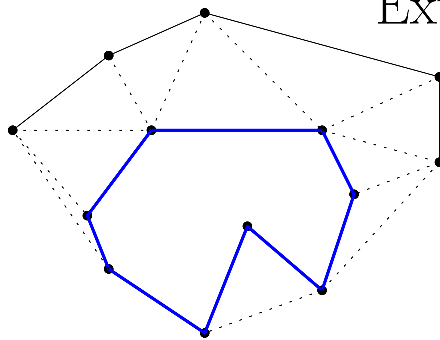
C



Int(C)



G



Ext(C)

Graphes planaires et séparateurs

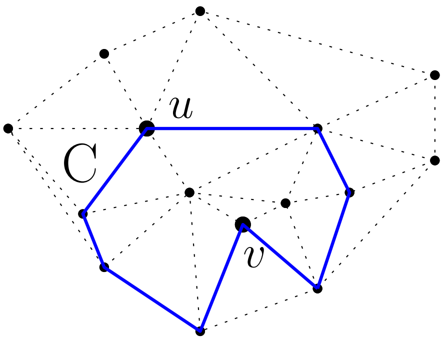
preuve (Lipton et Tarjan)

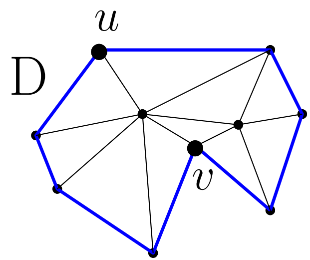
Conditions sur C

- $k = \sqrt{2n}$
- C a au plus $2k = \lfloor 2\sqrt{2n} \rfloor$ sommets
- $|Ext(C)| < \frac{2n}{3}$
- $|Int(C)| - |Ext(C)|$ est minimal

$$c(u,v) := dist_C(u,v) = 4$$

$$d(u,v) := dist_D(u,v) = 2$$



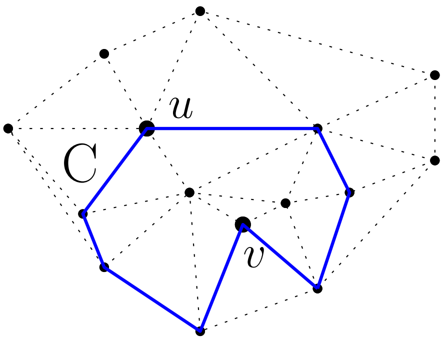


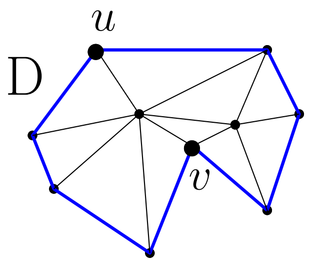
Graphes planaires et séparateurs

Lemme 1

Admettons, par absurde, que $|Int(C)| \geq \frac{2n}{3}$. *Alors pour toute paire de sommets* $u, v \in C$

$$c(u, v) = d(u, v)$$

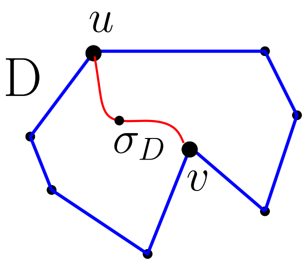




Graphes planaires et séparateurs

preuve (Lemme 1)

- C sous-graphe de D $\longrightarrow$ $d(u,v) \leq c(u,v)$
- considérons les sommets u_m et v_m tels que $\begin{cases} d(u_m, v_m) < c(u_m, v_m) \\ d(u_m, v_m) \text{ est minimale} \end{cases}$
- considérons le plus court chemin σ_D de u à v (dans D)



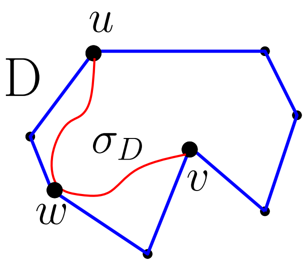
Graphes planaires et séparateurs

preuve (Lemme 1)

- C sous-graphe de D $\longrightarrow$ $d(u,v) \leq c(u,v)$

- considérons les sommets u et v tels que $\begin{cases} d(u,v) < c(u,v) \\ d(u,v) \text{ est minimale} \end{cases}$

- considérons le plus court chemin σ_D de u à v (dans D)



claim
Il n'existe pas de sommet $w \in C$ contenu dans σ_D
car on aurait

$$d(u,w) + d(w,v) = d(u,v) < c(u,v) \leq c(u,w) + c(w,v)$$

et donc on obtiendrait

$$d(u,w) < c(w,v) \text{ ou bien } d(w,v) < c(w,v)$$

ce qui contredit la minimalité du couple u, v.

Graphes planaires et séparateurs

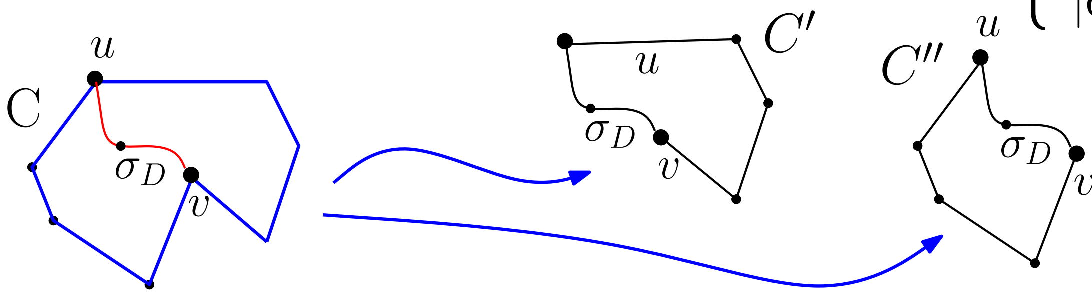
preuve (Lemme 1) (claim)

- Il n'existe pas de sommet $w \in C$ contenu dans σ_D

- C et σ définissent deux cycles C' et C''

$$\begin{cases} |C'| < |C| \leq 2k \\ |C''| < |C| \leq 2k \end{cases}$$

car $d(u,v) < c(u,v)$



- supposons $Int(C') \geq Int(C'')$

hypothèse absurde

$$n - |Ext(C')| = |Int(C')| + |V(C')|$$

$$> \frac{1}{2}(|Int(C')| + |Int(C'')| + |V(\sigma)| - 2) = \frac{1}{2}|Int(C)| \geq \frac{n}{3}$$

preuve (Lemme 1)

- $|C'| < |C| \leq 2k$
- $n - Ext(C') > \frac{n}{3} \longrightarrow Ext(C') < \frac{2n}{3}$
- $Ext(C') > Ext(C)$ $\quad$ $Int(C') < Int(C)$

$$\downarrow$$

- $|Int(C)| - |Ext(C)|$ n'est pas minimal

$\square$

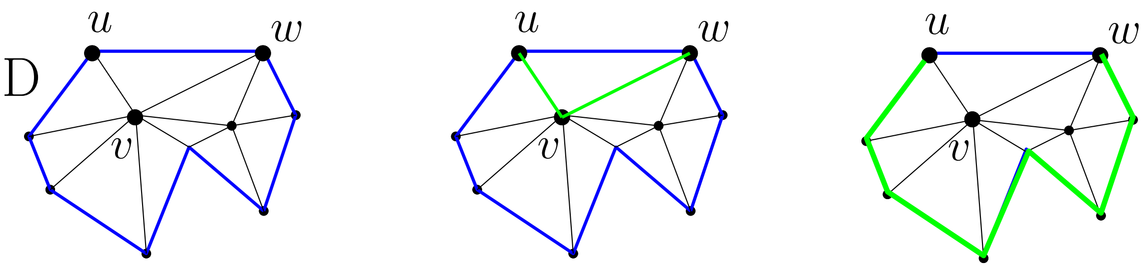
(Lemme 1)

Graphes planaires et séparateurs

Lemme 2 Le cycle C contient exactement $2k$ sommets

supposons $|C| < 2k$, par absurde

$$\alpha = uv \cdot vw$$



$\beta = C \setminus uv$

- v n'est pas dans C
- $\overline{C} = \alpha \cdot \beta$ est un cycle simple et $\begin{cases} |\overline{C}| \leq 2k \\ |Ext(\overline{C})| < \frac{2n}{3} \end{cases}$
- $|Int(\overline{C})| < |Int(C)| \qquad |Ext(\overline{C})| = |Ext(C)| + 1$

- la minimalité de C est violée $\square$ **(Lemme 2)**

Graphes planaires et séparateurs

Preuve (Thm Lipton et Tarjan)

- soit $C = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k} = v_0\}$
- $d(v_0, v_k) = c(v_0, v_k) = k \longrightarrow |\sigma_D(v_0, v_k)| = k$

(Lemme 1) σ_D plus court chemin

(Thm Menger)

- ∘ Il existe $k+1$ chemins disjoints dans D, $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$, de $\{v_0, \ldots, v_k\}$ à $\{v_k, \ldots, v_{2k}\}$ $\quad \pi_i : v_i \longrightarrow v_{2k-i}$

- ∘ $$n \geq \sum_{i=0}^{k} |V(\pi_i)| \geq \sum_i \min\{2i+1, 2k-2i-1\} \geq \frac{(k+1)^2}{2}$$

$\longrightarrow \quad k \leq \sqrt{2n} - 1 \quad$ absurde, car on avait $k = \sqrt{2n}$

(thm) $\square$