

Jeux stratégiques et PSPACE-complétude PC 5.

1 Jeu GEOGRAPHY

Le jeu GEOGRAPHY consiste à se donner un graphe orienté $G = (V, E)$. Le joueur 1 choisit un sommet u_1 du graphe. Le joueur 2 doit alors choisir un sommet v_1 tel qu'il y ait un arc de u_1 vers v_1 . C'est alors au joueur 1 de choisir un autre sommet u_2 tel qu'il y ait un arc de v_1 vers u_2 , et ainsi de suite. Il est interdit de repasser deux fois par le même sommet. Le premier joueur qui ne peut pas continuer le chemin $u_1v_1u_2v_2 \dots$ perd.

1. Le problème GEOGRAPHY consiste à déterminer étant donné un graphe G et un sommet de départ pour le joueur 1, s'il existe une stratégie gagnante pour le joueur 1. Montrer sa PSPACE-complétude (on pourra utiliser la PSPACE-complétude de QBF).

2 Jeu de GO

2.1 Le vrai jeu de GO

Le plateau du jeu de GO est une grille de 19×19 points. Un point est soit inoccupé, soit occupé par une pierre noire, soit occupé par une pierre blanche. Chaque point a quatre voisins : ceux situés directement au-dessus, au-dessous, à droite et à gauche. Les points en diagonale ne sont pas voisins. Alice joue en posant ou non une pierre blanche et Bob en posant ou non une pierre noire sur la grille. Grossièrement, le but du jeu est de former de grands groupes de pierres de sa couleur qui soient en sécurité et de capturer le plus possible de pierres de la couleur de l'adversaire. Les définitions et règles suivantes sont symétriques pour les noirs et les blancs. Un groupe noir est un ensemble maximal de pierres noires connexe sur la grille. Un groupe noir est encerclé si aucune pierre du groupe n'a de voisin inoccupé. Sitôt qu'un groupe noir devient encerclé, en général parce qu'une pierre blanche a été posée, il est capturé et enlevé du plateau. Alice n'a pas le droit de poser une pierre blanche qui provoque l'encercllement d'un groupe blanc sans provoquer l'encercllement d'un groupe noir. Par contre si un groupe noir et un groupe blanc se retrouvent simultanément encerclés par le dépôt d'une pierre blanche, alors le groupe noir est capturé.

2.2 Règles modifiées

Nous altérons maintenant les véritables règles du jeu. La grille est constituée de $n \times n$ points. Une partie dure exactement n^2 coups. Le gagnant est celui dont il reste le plus de pierres sur la grille. En cas d'égalité des nombres de pierres restantes, les blancs sont déclarés vainqueurs. GO est l'ensemble des couples formés d'une configuration du plateau et d'un entier $k < n^2$ tels que les joueurs se retrouvent dans cette configuration après k coups, c'est à Alice de jouer et elle a une stratégie gagnante.

1. Montrer que GO est dans PSPACE.
2. On va montrer que GO est PSPACE-complet en réduisant GEOGRAPHY à GO :
 - (a) Montrer que pour GEOGRAPHY, il suffit de considérer le cas où le graphe est obtenu par réduction de QBF.
 - (b) Montrer qu'il suffit également de considérer les cas où tout sommet du graphe est soit de degré entrant un et de degré sortant au plus deux, soit de degré sortant un et de degré entrant au plus deux.
 - (c) Montrer qu'il suffit de considérer des graphes planaires.
 - (d) Décrire les différents types de sommets qui finalement peuvent être présents dans le graphe.
 - (e) Le graphe est simulé à l'aide d'un plateau sur lequel se trouve un large rectangle blanc entouré de noirs, à l'exception d'un fil blanc bordé de noir qui s'en échappe. Il reste p coups à jouer. Montrer qu'on peut prendre la taille de la zone blanche suffisamment grande de manière à ce que l'issue de la partie ne dépende que du fait que ce groupe soit ou non capturé. Montrer comment le graphe peut être simulé.