

Algorithmes. Modèles de calcul. PC 2.

1 Inverse d'une fonction bijective calculable

Montrer que l'inverse d'une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calculable et bijective, est calculable.

2 Décidabilité et énumération croissante

1. Soit $E \subset \mathbb{N}$ un ensemble récursivement énumérable, énuméré par une fonction calculable f strictement croissante. Montrer que E est décidable.
2. En déduire que tout sous-ensemble récursivement énumérable infini de \mathbb{N} contient un ensemble décidable infini.
3. Soit $E \subset \mathbb{N}$ un ensemble décidable. Montrer qu'il est énuméré par une fonction calculable f strictement croissante.

3 $RE = \exists R$

Soit $A \subset \mathbb{N}^2$ un ensemble décidable de couples d'entiers.

On note $\exists A$ pour la (première) projection de A , à savoir le sous-ensemble de \mathbb{N} défini par

$$\exists A = \{x | \exists y \in \mathbb{N} \text{ tel que } (x, y) \in A\}.$$

1. Montrer que la projection d'un ensemble décidable est récursivement énumérable.
2. Montrer que tout ensemble récursivement énumérable est la projection d'un ensemble décidable.

4 Quelques problèmes

Les problèmes suivants, où l'on se donne un algorithme A et l'on veut savoir

1. si $L(A)$ contient au moins deux entrées distinctes
2. si $L(A)$ accepte aucune entrée

sont-ils décidables ? semi-décidables ?

5 Réels calculables

Un nombre réel a est dit *récuratif* s'il existe des fonctions calculables F et G de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telles que pour tout $n > 0$ on ait $G(n) > 0$ et

$$\left| a - \frac{F(n)}{G(n)} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que tout nombre rationnel est récuratif.
2. Montrer que $\sqrt{2}$, π , e sont récuratifs.
3. Montrer que le nombre réel $0 < a < 1$ est récuratif si et seulement s'il existe un développement décimal récuratif de a , c'est-à-dire une fonction calculable $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > 0$ on ait $0 \leq H(n) \leq 9$ et

$$|a| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H(n)}{10^n}.$$

4. Montrer que l'ensemble des réels récuratifs forme un sous corps dénombrable de \mathbb{R} , tel que tout polynôme de degré impair possède une racine.
5. Donner un exemple de réel non-récuratif.

6 Algorithme de taille minimale

On appelle *taille d'un algorithme* le nombre de symboles nécessaire pour le décrire comme un mot. On dit qu'un algorithme est *minimal* s'il n'existe aucun autre algorithme équivalent avec une description plus courte.

Montrer que le problème de déterminer si un algorithme est minimal n'est pas décidable (indice : utiliser le théorème de récursion).

7 Quines

Proposer un programme JAVA qui produit son propre code.