Algorithmes. Modèles de calcul. PC 1.

1 Machines de Turing

1. Construire des machines de Turing qui acceptent le langage
   (a) $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$
   (b) $\{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$
   (c) constitué des mots de la forme ww^R, où w^R désigne le mot miroir.
2. Construire une machine de Turing qui transforme un entier en unaire en sa représentation binaire.
3. Construire une machine de Turing qui calcule la somme de deux nombres représentés en notation binaire.

2 Machines de Turing sur une structure

Construire une machine de Turing qui accepte l'ensemble de Mandelbrot.

3 Variantes du modèle

On se place dans le cas d'un alphabet fini.

1. Montrer que toute machine de Turing à $k \geq 2$ rubans peut être simulée par une machine à un unique ruban.
2. Montrer que toute machine de Turing sur l'alphabet fini M peut être simulée par une machine sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

4 Temps de simulation

Pour chacune des simulations vues en cours d'une classe de machines par une autre, évaluer le temps de simulation : quel est le temps $t(n)$ nécessaire pour simuler n étapes.

5 Théorème de l'accélération

Soit L un langage accepté en temps $f(n)$ par une machine de Turing sur un alphabet fini. Supposons[1] $n \in o(f(n))$. Montrer que $\forall \epsilon > 0$, L est aussi accepté en temps $f'(n) = \epsilon f(n)$.

6 Temps et réduction de rubans

Soit L un langage accepté en temps $f(n)$ par une machine de Turing à k rubans sur un alphabet fini.

1. Montrer que L est reconnu par une machine de Turing avec un ruban de travail en temps $\mathcal{O}(t(n)^2)$
2. deux rubans de travail en temps $\mathcal{O}(t(n) \log t(n))$.

7 Algorithme de Bissection

Quelle est la signature de l'algorithme suivant ? Quels sont les termes critiques ?

```
read e
par
  a ←0
  b ←1
endpar
repeat
   let m = (a+b)/2 in
   if |f(m)| < e then out ← m
   else if f(m)>0 then b ← m
   else a ← m
until out!=undef
write out
```

8 Termes et valeurs critiques

Montrer que dans tout algorithme sur une structure $\mathfrak{M}$, à toute étape t, chaque emplacement $(f, \overline{m})$ est tel que, si son contenu a déjà été modifié, alors ce contenu peut s'obtenir comme la sémantique d'un terme sur la signature de la structure.

[1] Rappel : $o(f) = \{g | \forall c \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, g(n) \leq c * f(n)\}$