Cours 8/2: Hiérarchie Polynomiale

Olivier Bournez

bournez@lix.polytechnique.fr
LIX, Ecole Polytechnique

Au menu

Motivation

- La hiérarchie polynomiale PH est une hiérarchie de problèmes entre P et PSPACE.
- Pour motiver l'étude de PH, nous allons présenter quelques problèmes qui semblent ne pas être capturés par la notion de NP-complétude.

Motivation : Exemple 1

- Rappelons qu'un *stable d'un graphe* $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $V' \subset V$ ne contenant aucune paire de sommets voisins dans G.

Motivation : Exemple 1

- Rappelons qu'un *stable d'un graphe* $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $V' \subset V$ ne contenant aucune paire de sommets voisins dans G.

- Etant donné un graphe G et un entier k, le problème de savoir s'il admet un stable de taille $\geq k$ est NP-complet.

Motivation : Exemple 1

- Rappelons qu'un *stable d'un graphe* $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $V' \subset V$ ne contenant aucune paire de sommets voisins dans G.

- Etant donné un graphe G et un entier k, le problème de savoir s'il admet un stable de taille $\geq k$ est NP-complet.

- Pour déterminer si une paire $< G, k >$ doit être acceptée, il suffit de savoir s'il existe un certificat, à savoir un stable de taille $\geq k$.

Motivation : Exemple 1

- Rappelons qu'un *stable d'un graphe* $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $V' \subset V$ ne contenant aucune paire de sommets voisins dans G.

- Etant donné un graphe G et un entier k, le problème de savoir s'il admet un stable de taille $\geq k$ est NP-complet.

- Pour déterminer si une paire $< G, k >$ doit être acceptée, il suffit de savoir s'il existe un certificat, à savoir un stable de taille $\geq k$.

- Supposons qu'étant donné un graphe G et un entier k, on souhaite savoir si le plus grand stable de G soit de taille exactement k.

Motivation : Exemple 1

- Rappelons qu'un *stable d'un graphe* $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $V' \subset V$ ne contenant aucune paire de sommets voisins dans G.

- Etant donné un graphe G et un entier k, le problème de savoir s'il admet un stable de taille $\geq k$ est NP-complet.

- Pour déterminer si une paire $< G, k >$ doit être acceptée, il suffit de savoir s'il existe un certificat, à savoir un stable de taille $\geq k$.

- Supposons qu'étant donné un graphe G et un entier k, on souhaite savoir si le plus grand stable de G soit de taille exactement k.

- Cette fois, il ne semble pas y avoir de certificat simple.

- En fait, pour déterminer si une paire $< G, k >$ doit être acceptée, il suffit de savoir
  - s'il existe un certificat, à savoir un stable de taille $\geq k$, tel que
  - toute autre stable soit de taille inférieure.

Motivation : Exemple 2

- Etant donnée une formule booléenne en forme normale disjonctive, le problème de savoir si elle est satisfiable est NP-complet.

Motivation : Exemple 2

- Etant donnée une formule booléenne en forme normale disjonctive, le problème de savoir si elle est satisfiable est NP-complet.

- Pour savoir si elle est satisfiable, il suffit de savoir s'il existe un certificat, à savoir une affectation des variables qui la rend vraie.

Motivation : Exemple 2

- Etant donnée une formule booléenne en forme normale disjonctive, le problème de savoir si elle est satisfiable est NP-complet.

- Pour savoir si elle est satisfiable, il suffit de savoir s'il existe un certificat, à savoir une affectation des variables qui la rend vraie.

- Supposons qu'étant donnée une formule booléenne en forme normale disjonctive, on souhaite savoir si elle est de taille minimale.

Motivation : Exemple 2

- Etant donnée une formule booléenne en forme normale disjonctive, le problème de savoir si elle est satisfiable est NP-complet.

- Pour savoir si elle est satisfiable, il suffit de savoir s'il existe un certificat, à savoir une affectation des variables qui la rend vraie.

- Supposons qu'étant donnée une formule booléenne en forme normale disjonctive, on souhaite savoir si elle est de taille minimale.

- Cette fois, il ne semble pas y avoir de certificat simple.

- En fait, pour déterminer si ϕ est de taille minimale, il suffit de vérifier que
  - pour toute autre formule ψ de taille inférieure,
  - il existe une affectation $\overline{x}$ des variables sur lesquelles $\phi(\overline{x}) \neq \psi(\overline{x})$.

Au menu

Motivation

Hiérarchie polynomiale

Sous menu

- La définition de la hiérarche polynomiale généralise NP, coNP.

- Cette classe est constituée de tous les langages qui peuvent se définir par une combinaison de prédicats calculables en utilisant un nombre polynomial de quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Classe Σ_i^P

Definition

Soit $i \geq 1$. Un langage L est dans Σ_i^P s'il existe un polynôme q et un problème A dans P tel que

$$w \in L$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \cdots Q_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)}$$

$$< w, u_1, u_2, \cdots, u_i > \in A,$$

où Q_i est $\forall$ ou $\exists$ selon si i est pair ou impair respectivement.

Classe Π_i^P

Definition

Soit $i \geq 1$. Un langage L est dans Π_i^P s'il existe un polynôme q et un problème A dans P tel que

$$w \in L$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \exists u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \cdots Q_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)}$$

$$< w, u_1, u_2, \cdots, u_i > \in A,$$

où Q_i est $\exists$ ou $\forall$ selon si i est pair ou impair respectivement.

Quelques propriétés

Quelques propriétés

- Corollary
  $\Sigma_1^P = \mathrm{NP}.$

Quelques propriétés

- Corollary
  $\Sigma_1^P = \mathrm{NP}$.

Quelques propriétés

- Corollary
  $\Sigma_1^P = \mathrm{NP}.$
- Corollary
  $co\Sigma_i^P = \Pi_i^P$ *et* $co\Pi_i^P = \Sigma_i^P.$

Quelques propriétés

- Corollary
  $\Sigma_1^P = \mathrm{NP}.$
- Corollary
  $co\Sigma_i^P = \Pi_i^P$ *et* $co\Pi_i^P = \Sigma_i^P.$

Quelques propriétés

- Corollary
  $\Sigma_1^P = \mathrm{NP}.$
- Corollary
  $co\Sigma_i^P = \Pi_i^P$ *et* $co\Pi_i^P = \Sigma_i^P.$
- Corollary
  $\Pi_1^P = \mathrm{coNP}.$

Quelques propriétés

- Corollary
  $\Sigma_1^P = \mathrm{NP}.$
- Corollary
  $co\Sigma_i^P = \Pi_i^P \ et \ co\Pi_i^P = \Sigma_i^P.$
- Corollary
  $\Pi_1^P = \mathrm{coNP}.$

Quelques propriétés

- Corollary
  $\Sigma_1^P = \mathrm{NP}$.
- Corollary
  $co\Sigma_i^P = \Pi_i^P$ *et* $co\Pi_i^P = \Sigma_i^P$.
- Corollary
  $\Pi_1^P = \mathrm{coNP}$.
- Corollary
  Pour tout i, $\Sigma_i^P \subset \Pi_{i+1}^p$ *et* $\Pi_i^P \subset \Sigma_{i+1}^p$.

Definition

$$\mathrm{PH} = \bigcup_i \Sigma_i^P = \bigcup_i \Pi_i^p.$$

Théorème

$$\mathrm{P} \subset \mathrm{PH} \subset \mathrm{PSPACE}.$$

Stricte ? Effondrement ?

- On pense généralement que $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ et $\mathrm{NP} \neq \mathrm{coNP}$.

Stricte ? Effondrement ?

- On pense généralement que $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ et $\mathrm{NP} \neq \mathrm{coNP}$.
- On peut être tenté de généraliser cela en disant que pour tout entier i, Σ_i^P est strictement inclus dans Σ_{i+1}^P, et que Π_i^P est strictement inclus dans Π_{i+1}^P.

Stricte ? Effondrement ?

- On pense généralement que $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ et $\mathrm{NP} \neq \mathrm{coNP}$.

- On peut être tenté de généraliser cela en disant que pour tout entier i, Σ_i^P est strictement inclus dans Σ_{i+1}^P, et que Π_i^P est strictement inclus dans Π_{i+1}^P.

- Cette conjecture est souvent formulée en théorie de la complexité sous la terminologie de *la hiérarchie polynomiale ne s'effondre pas* :

Stricte ? Effondrement ?

- On pense généralement que $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ et $\mathrm{NP} \neq \mathrm{coNP}$.
- On peut être tenté de généraliser cela en disant que pour tout entier i, Σ_i^P est strictement inclus dans Σ_{i+1}^P, et que Π_i^P est strictement inclus dans Π_{i+1}^P.
- Cette conjecture est souvent formulée en théorie de la complexité sous la terminologie de *la hiérarchie polynomiale ne s'effondre pas* :
  - la hiéarchie polynomiale serait dite *effondrée* s'il existe un entier i tel que $\Sigma_i^P = \Pi_i^P$

Théorème

- *Si pour un entier* i, $\Sigma_i^P = \Pi_i^P$ *alors* $\mathrm{PH} = \Sigma_i^P$ *: la hiérarchie est dite effondrée au niveau* i*, et la propriété est vraie alors pour tous les niveaux supérieurs.*
- *Si* $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ *alors* $\mathrm{PH} = \mathrm{P}$ *: la hiérarchie s'effondre en* P*.*

- Théorème

  Pour tout $i \geq 1$, *les classes* Σ_i^P *et* Π_i^P *possèdent des problèmes complets.*

- Théorème

  Pour tout $i \geq 1$, *les classes* Σ_i^P *et* Π_i^P *possèdent des problèmes complets.*

- Théorème

  Pour tout $i \geq 1$*, les classes* Σ_i^P *et* Π_i^P *possèdent des problèmes complets.*

- Théorème

  Si PH *possède un problème complet, alors la hiérarchie polynomiale s'effondre.*

Théorème
Pour tout $i \geq 1$, les classes Σ_i^P et Π_i^P possèdent des problèmes complets.

Théorème
Si PH *possède un problème complet, alors la hiérarchie polynomiale s'effondre.*

- Théorème
  Pour tout $i \geq 1$, les classes Σ_i^P et Π_i^P possèdent des problèmes complets.

- Théorème
  Si PH *possède un problème complet, alors la hiérarchie polynomiale s'effondre.*

- Corollary
  Si $\mathrm{PH} = \mathrm{PSPACE}$, *alors la hiérarchie polynomiale s'effondre.*

Théorème

$$\mathrm{BPP} \subset \Sigma_2^P \cap \Pi_2^P.$$