

Cours 8/2: Hiérarchie Polynomiale

Olivier Bournez

bournez@lix.polytechnique.fr
LIX, Ecole Polytechnique

INF561

Algorithmes et Complexité

1

Au menu

Motivation

Hiérarchie polynomiale

2

Motivation

- La hiérarchie polynomiale PH est une hiérarchie de problèmes entre P et PSPACE.
- Pour motiver l'étude de PH, nous allons présenter quelques problèmes qui semblent ne pas être capturés par la notion de NP-complétude.

3

Motivation : Exemple 1

- Rappelons qu'un *stable* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $V' \subset V$ ne contenant aucune paire de sommets voisins dans G .
- Etant donné un graphe G et un entier k , le problème de savoir s'il admet un stable de taille $\geq k$ est NP-complet.
- Pour déterminer si une paire $\langle G, k \rangle$ doit être acceptée, il suffit de savoir s'il existe un certificat, à savoir un stable de taille $\geq k$.
- Supposons qu'étant donné un graphe G et un entier k , on souhaite savoir si le plus grand stable de G soit de taille exactement k .
- Cette fois, il ne semble pas y avoir de certificat simple.

4

- En fait, pour déterminer si une paire $\langle G, k \rangle$ doit être acceptée, il suffit de savoir
 - ▶ s'il existe un certificat, à savoir un stable de taille $\geq k$, tel que
 - ▶ toute autre stable soit de taille inférieure.

5

Motivation : Exemple 2

- Etant donnée une formule booléenne en forme normale disjonctive, le problème de savoir si elle est satisfiable est NP-complet.
- Pour savoir si elle est satisfiable, il suffit de savoir s'il existe un certificat, à savoir une affectation des variables qui la rend vraie.
- Supposons qu'étant donnée une formule booléenne en forme normale disjonctive, on souhaite savoir si elle est de taille minimale.
- Cette fois, il ne semble pas y avoir de certificat simple.

6

- En fait, pour déterminer si ϕ est de taille minimale, il suffit de vérifier que
 - ▶ pour toute autre formule ψ de taille inférieure,
 - ▶ il existe une affectation \bar{x} des variables sur lesquelles $\phi(\bar{x}) \neq \psi(\bar{x})$.

7

Au menu

Motivation

Hiérarchie polynomiale

8

Hiérarchie polynomiale
Définitions

- La définition de la hiérarchie polynomiale généralise NP, coNP.
- Cette classe est constituée de tous les langages qui peuvent se définir par une combinaison de prédicats calculables en utilisant un nombre polynomial de quantificateurs \forall et \exists .

Classe Σ_i^P

Definition

Soit $i \geq 1$. Un langage L est dans Σ_i^P s'il existe un polynôme q et un problème A dans P tel que

$$\begin{aligned}
 &w \in L \\
 &\Leftrightarrow \\
 &\exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \dots Q_i u_i \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \\
 &\quad \langle w, u_1, u_2, \dots, u_i \rangle \in A,
 \end{aligned}$$

où Q_i est \forall ou \exists selon si i est pair ou impair respectivement.

Classe Π_i^P

Definition

Soit $i \geq 1$. Un langage L est dans Π_i^P s'il existe un polynôme q et un problème A dans P tel que

$$\begin{aligned}
 &w \in L \\
 &\Leftrightarrow \\
 &\forall u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \exists u_2 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \dots Q_i u_i \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \\
 &\quad \langle w, u_1, u_2, \dots, u_i \rangle \in A,
 \end{aligned}$$

où Q_i est \exists ou \forall selon si i est pair ou impair respectivement.

Quelques propriétés

- Corollary

$$\Sigma_1^P = \text{NP}.$$

- Corollary

$$\text{co}\Sigma_i^P = \Pi_i^P \text{ et } \text{co}\Pi_i^P = \Sigma_i^P.$$

- Corollary

$$\Pi_1^P = \text{coNP}.$$

- Corollary

$$\text{Pour tout } i, \Sigma_i^P \subset \Pi_{i+1}^P \text{ et } \Pi_i^P \subset \Sigma_{i+1}^P.$$

13

Definition

$$\text{PH} = \bigcup_i \Sigma_i^P = \bigcup_i \Pi_i^P.$$

14

Théorème

$$P \subset \text{PH} \subset \text{PSPACE}.$$

15

Stricte? Effondrement ?

- On pense généralement que $P \neq \text{NP}$ et $\text{NP} \neq \text{coNP}$.
- On peut être tenté de généraliser cela en disant que pour tout entier i , Σ_i^P est strictement inclus dans Σ_{i+1}^P , et que Π_i^P est strictement inclus dans Π_{i+1}^P .
- Cette conjecture est souvent formulée en théorie de la complexité sous la terminologie de la *hiérarchie polynomiale ne s'effondre pas* :
 - ▶ la hiérarchie polynomiale serait dite *effondrée* s'il existe un entier i tel que $\Sigma_i^P = \Pi_i^P$

16

Théorème

- Si pour un entier i , $\Sigma_i^P = \Pi_i^P$ alors $\text{PH} = \Sigma_i^P$: la hiérarchie est dite effondrée au niveau i , et la propriété est vraie alors pour tous les niveaux supérieurs.
- Si $P = \text{NP}$ alors $\text{PH} = P$: la hiérarchie s'effondre en P .

17

■ Théorème

Pour tout $i \geq 1$, les classes Σ_i^P et Π_i^P possèdent des problèmes complets.

■ Théorème

Si PH possède un problème complet, alors la hiérarchie polynomiale s'effondre.

■ Corollary

Si $\text{PH} = \text{PSPACE}$, alors la hiérarchie polynomiale s'effondre.

18

Théorème

$$\text{BPP} \subset \Sigma_2^P \cap \Pi_2^P.$$

19