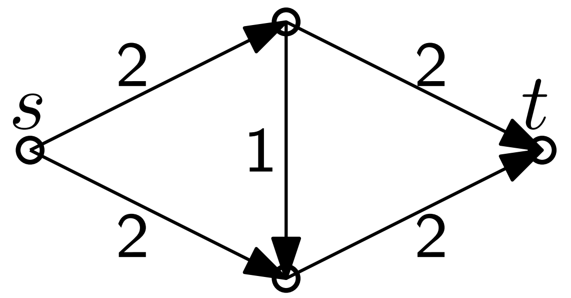
Cours 2: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

Réseau de transport et flots



Données: Un graphe orienté $G = (X, A)$, une valuation $c : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$, et 2 sommets s et t avec $d_{\text{in}}(s) = 0$ et $d_{\text{out}}(t) = 0$.

- Les sommets s et t sont la source et puit, $c(a)$ la capacité de l'arc a.

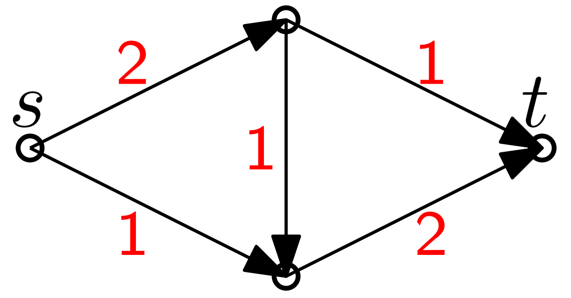
- Un flot est une application ϕ de A dans $\mathbb{R}^+$ telle que

  - le flot en chaque arc a est inférieur à la capacité: $\phi(a) \leq c(a)$
  - pour tout sommet de $X \setminus \{s, t\}$, flot entrant $=$ flot sortant

  La valeur du flot ϕ est le flot sortant de s (égal au flot entrant en t).

Problème: Trouver un flot de valeur maximale.

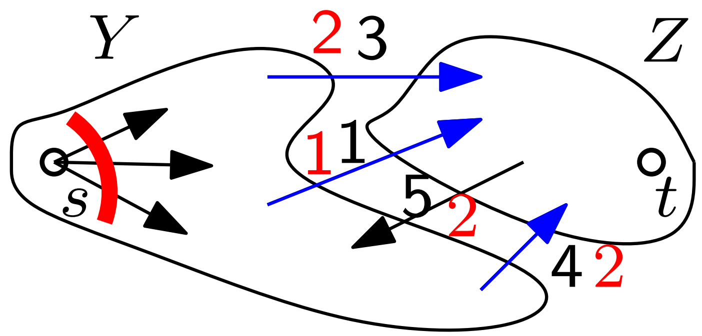
- Un flot ϕ est saturé si sur tout chemin de s à t il existe un arc a tel que $\phi(a) = c(a)$.



Les coupes d'un réseau de transport

- Une coupe est une partition de l'ensemble des sommets en 2 parties disjointes, l'une contenant la source et l'autre le puit:

$$Y \cup Z = X, \quad Y \cap Z = \emptyset, \quad s \in Y, \quad t \in Z$$



- La capacité $C(Y,Z)$ d'une coupe est la somme des capacités des arcs de Y à Z.
- Le flux de Y à Z dans un flot ϕ est

$$\phi(Y,Z) = \sum_{u \in Y \times Z} \phi(u)$$

et le flux orienté de la coupe (Y,Z) est

$$\Delta(Y,Z) = \phi(Y,Z) - \phi(Z,Y).$$

$$C(Y,Z) = 8$$

$$\phi(Y,Z) = 5$$

$$\Delta(Y,Z) = 3$$

Tout flot a pour valeur $V_\phi = \phi(\{s\}, X \setminus \{s\}) = \Delta(\{s\}, X \setminus \{s\})$.

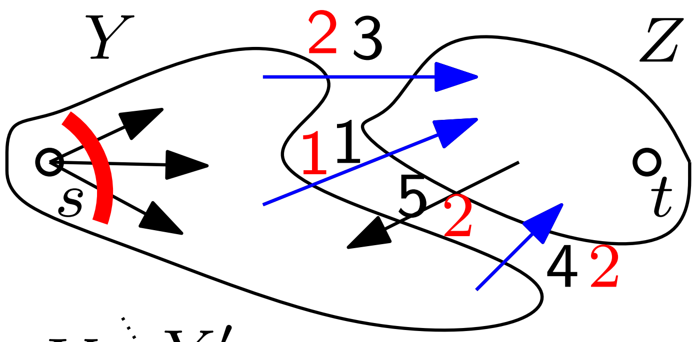
Lemme. Plus généralement $V_\phi = \Delta(Y,Z)$ pour toute coupe.

Preuve par récurrence sur $|Y|$: $Y' = Y \cup \{y\}$, $i + i' = o + o'$.

Les coupes d'un réseau de transport

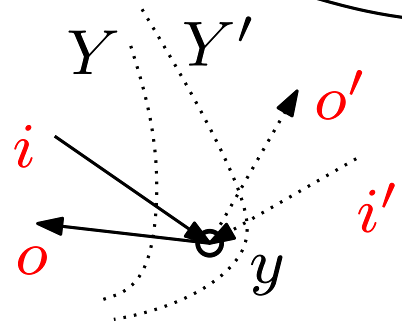
- Une coupe est une partition de l'ensemble des sommets en 2 parties disjointes, l'une contenant la source et l'autre le puit:

$$Y \cup Z = X, \quad Y \cap Z = \emptyset, \quad s \in Y, \quad t \in Z$$



- La capacité $C(Y, Z)$ d'une coupe est la somme des capacités des arcs de Y à Z.
- Le flux de Y à Z dans un flot ϕ est

$$\phi(Y, Z) = \sum_{u \in Y \times Z} \phi(u)$$



et le flux orienté de la coupe (Y, Z) est

$$\Delta(Y, Z) = \phi(Y, Z) - \phi(Z, Y).$$

Tout flot a pour valeur $V_\phi = \phi(\{s\}, X \setminus \{s\}) = \Delta(\{s\}, X \setminus \{s\})$.

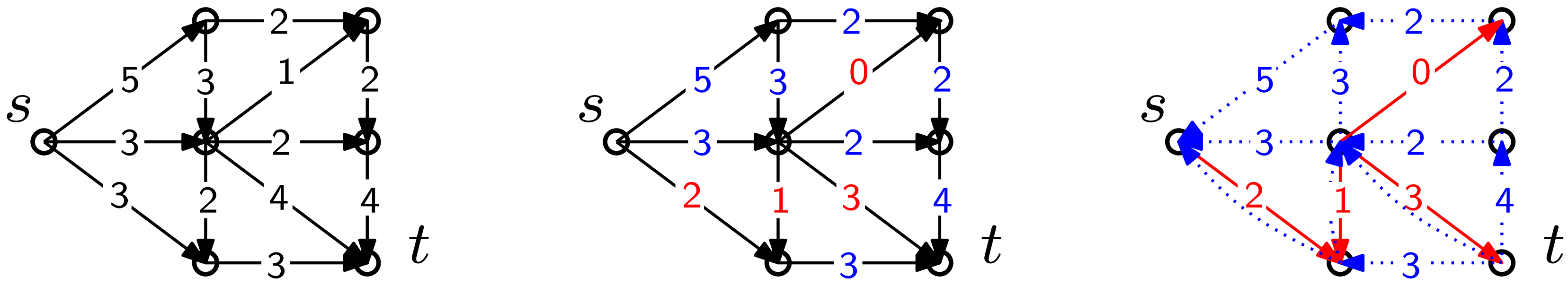
Lemme. Plus généralement $V_\phi = \Delta(Y, Z)$ pour toute coupe.

Preuve par récurrence sur $|Y|$: $Y' = Y \cup \{y\}$, $i + i' = o + o'$.

Le graphe des augmentations d'un flot

Le graphe des augmentations G_ϕ:

- Les sommets de G_ϕ sont ceux de G,
- Tout arc $a = (x, y)$ de G reste dans G_ϕ si $\phi(a) < c(a)$.
- L'opposé (y, z) de l'arc $a = (x, y)$ de G est dans G_ϕ si $\phi(a) > 0$.



Lemme. S'il existe un chemin de s à t dans G_ϕ, le flot peut être amélioré.

Lemme. S'il n'existe pas de chemin de s à t dans G_ϕ, alors il existe une coupe (Y, Z) telle que $c(Y, Z) = V_\phi$.

Théorème. **Valeur du flot maximal = Capacité de la coupe minimale.**

Cours 2: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

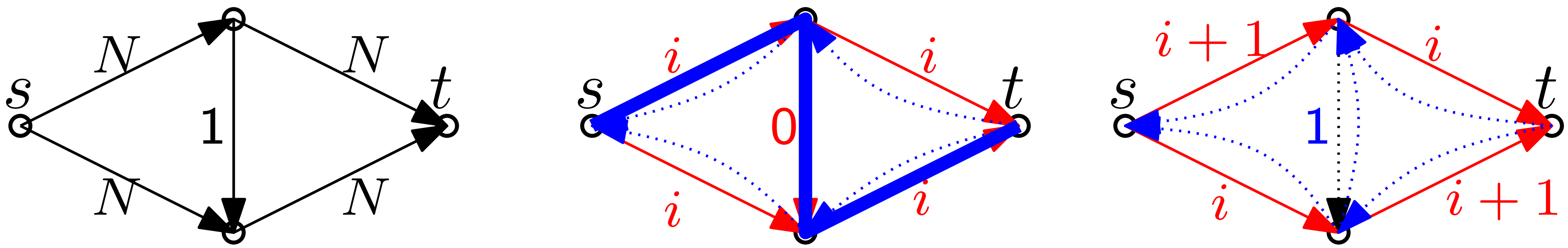
Algorithme de Ford Fulkerson

- Initialiser avec un flot quelconque (nul par exemple).
- Tant qu'il existe un chemin dans le graphe des augmentations, augmenter le flot.

Théorème. L'algorithme de Ford Fulkerson constuit un flot maximal. Les sommets atteignables depuis s dans le graphe des augmentations forment une coupe minimale. Complexité $O(m\Phi)$

Remarques. • Le flot maximal obtenu est à valeur entière.

- On a pas spécifié quel chemin on choisit à chaque étape.



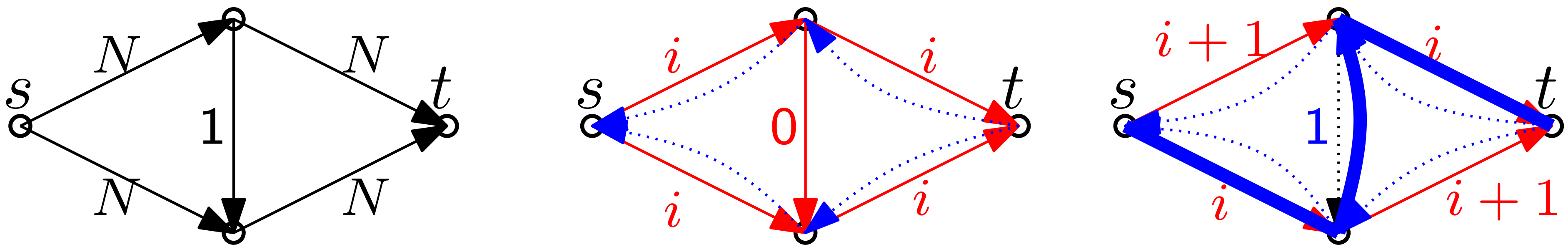
Algorithme de Ford Fulkerson

- Initialiser avec un flot quelconque (nul par exemple).
- Tant qu'il existe un chemin dans le graphe des augmentations, augmenter le flot.

Théorème. L'algorithme de Ford Fulkerson constuit un flot maximal. Les sommets atteignables depuis s dans le graphe des augmentations forment une coupe minimale. Complexité $O(m\Phi)$

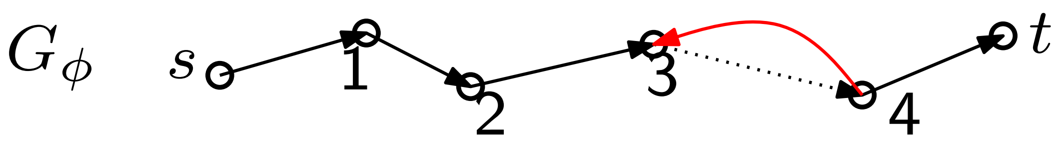
Remarques. • Le flot maximal obtenu est à valeur entière.

- On a pas spécifié quel chemin on choisit à chaque étape.



Algorithme de Dinic, Edmonds et Karp

- Effectuer Ford-Fulkerson en choisissant à chaque étape le premier chemin d'augmentation obtenu par recherche en largeur dans G_ϕ.



autrement dit on choisit un plus court chemin d'augmentation.

Théorème. L'algorithme DEK effectue au plus $O(nm^2)$ opérations si le graphe G à n sommets et m arcs.

Preuve.
- Lorsqu'un chemin d'augmentation est utilisé, le flot devient nul ou maximal sur au moins l'une des arêtes: celle-ci est retournée.
- Quand l'arc (x, y) du chemin se retourne, les distances à s ne peuvent qu'augmenter. Si (y, x) revient sur le chemin ce sera plus loin.
- Donc chacun des m arcs peut être retourné au plus n fois.
- Le nombre de chemins d'augmentation utilisés est donc $O(nm)$.
- Le coût de la recherche d'un chemin d'augmentation est $O(m)$.

Cours 2: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

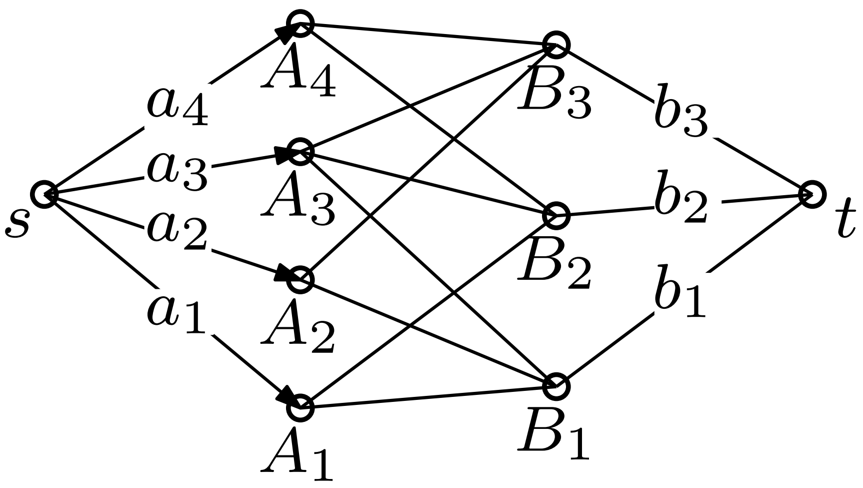
Répartition d'approvisionnement

Données: • les fournisseurs $A_1, \ldots, A_p$, avec A_i de capacité a_i.

- les clients $B_1, \ldots, B_q$, le client B_i demande une quantité b_i.
- les contraintes: B_j ne peut être livré que par les $\{A_i\}_{i \in C_j}$.

Problème: maximiser l'approvisionnement mutuel.

Modélisation en flot: sommets $X = \{s, t, A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q\}$



arête (A_i, B_j) si $i \in C_j$ de capacité ∞.

arête (s, A_i) de capacité a_i

arête (B_j, t) de capacité b_j

Approvisionnement mutuel maximal $=$ flot maximal dans ce graphe.

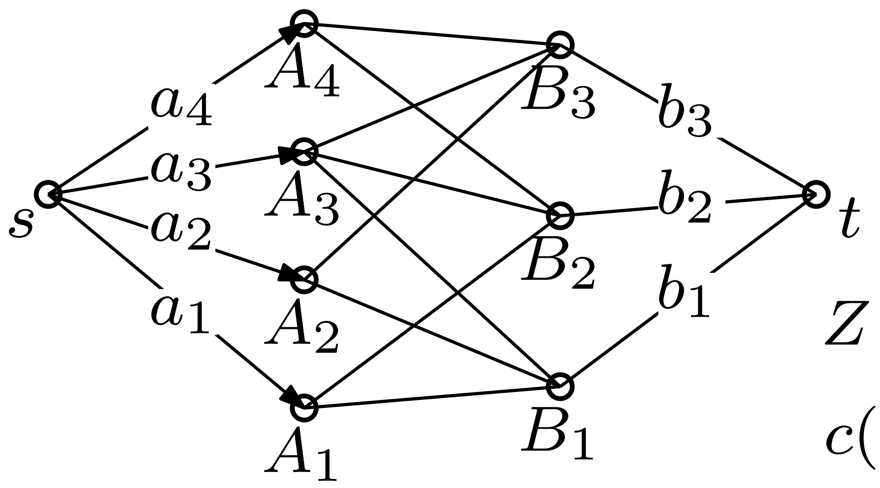
Problème de l'expédition idéale

Données: • les instruments $A_1, \ldots, A_p$, avec A_i de coût c_i.

- des expériences $B_1, \ldots, B_q$ à faire, B_i rapporte b_i.
- pour pouvoir effectuer B_j il faut avoir $\{A_i\}_{i \in C_j}$.

Problème: maximiser le gain de l'expédition.

Modélisation en flot: on utilise le même graphe



une coupe minimale doit éviter les arcs (A_i, B_j)

une expédition $\Leftrightarrow$ une coupe (Y, Z):

$Z = \{A_i \text{ emportés}\} \cup \{B_i \text{ effectués}\} \cup \{z\}$

$c(Y, Z) = \sum_{A_i \in Z} a_i + \sum_{B_i \notin Z} b_j$

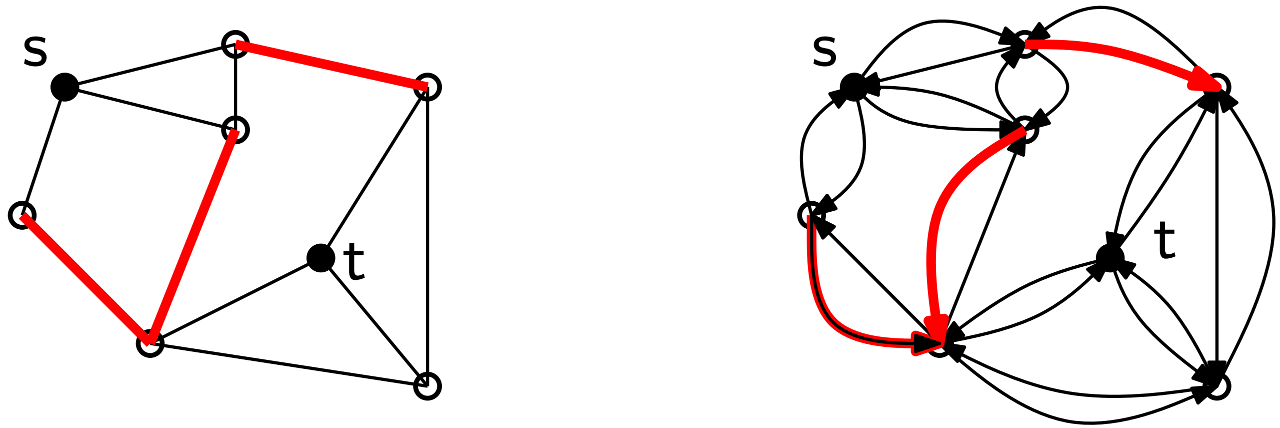
Gain maximal $= \sum b_j - c(Y, Z)$ pour la coupe de capacité minimale.

Résistance aux pannes

Données: Un graphe G, non orienté.

Problème: Nb minimum d'arêtes à retirer pour déconnecter G ?

Modélisation en flot: le nb min d'arêtes à enlever pour séparer deux sommets s et t de G est la capacité de la coupe minimale dans le graphe symétrique associé avec capacité 1 sur chaque arête



On trouve la résistance aux pannes en appliquant un calcul de flot au réseau $(R(G), s, t)$ pour chaque sommet t du graphe, avec s fixé arbitrairement.

Cours 2: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

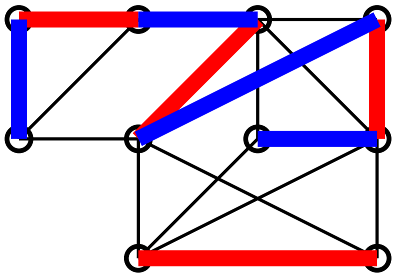
Couplages dans un graphe non orienté

Données: un graphe non orienté (ou symétrique)

Un couplage est un ensemble d'arêtes sans extrémités comunes

Problème: déterminer un couplage de cardinalité maximale.

Un chemin alternant alterne les arêtes libres et couplées.



Théorème. Couplage maximum $\Leftrightarrow$ pas de chemins alternants entre 2 sommets libres.

maximal pour l'inclusion

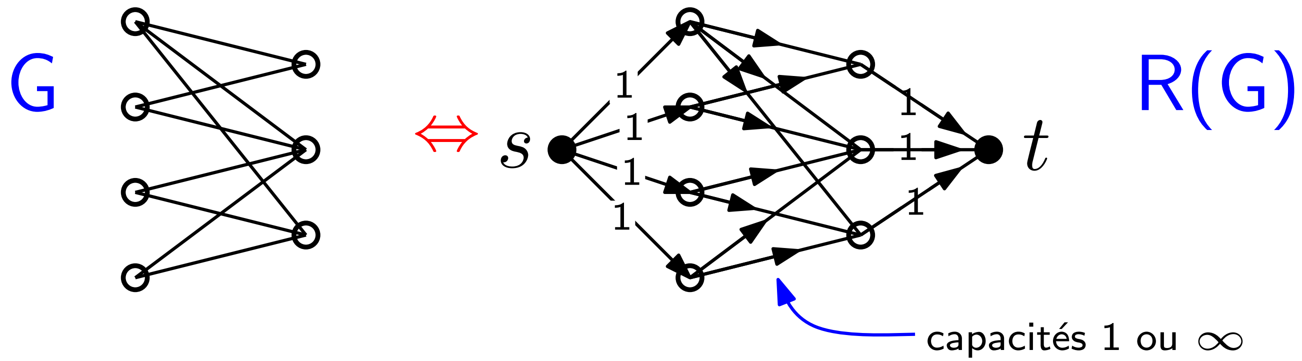
Preuve de la réciproque: comparer un couplage maximal (sans chemin augmentant) avec un couplage optimum en les superposant.

Théorème (Edmonds 1965) On peut trouver les chemins alternants en temps polynomial.

Couplages dans un graphe biparti

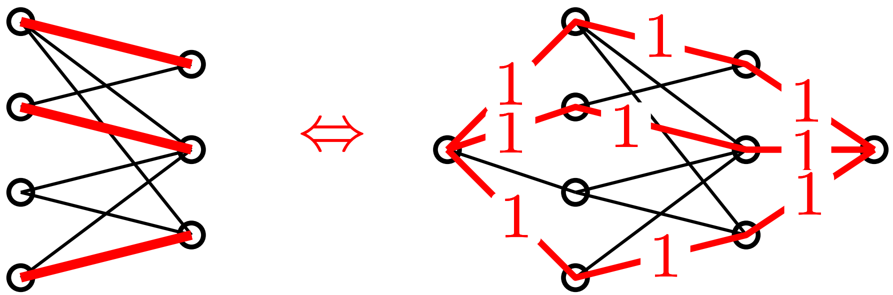
Pour les graphes bipartis, on se ramène à un problème de flot:

1. Décrire le problème de flots associé



2. Montrer l'équivalence entre pbl initial et maximisation du flot

ici: bijection entre couplages sur G et flots à valeur entière sur $R(G)$



démarche à retenir!!

telle que le cardinal du couplage maximum est égal au flot maximum.

Couplages et matroïdes

Soit $G = (Y \cup Z, E)$ un graphe biparti.

La famille $\mathcal{F}$ des parties couplables de Y est l'ensemble des $Y' \subset Y$ tels qu'il existe un couplage parfait entre Y' et un $Z' \subset Z$.

Lemme. $\mathcal{F}$ est un matroïde.

Preuve. Si $|Y''| > |Y'|$ on superpose les couplages associés à Y' et Y'' pour trouver une chaine alternante qui permet d'étendre Y'.

Corollaire (Cours 1). Les transversaux d'un ensemble de parties forment un matroïde.

Remarques. • La famille des couplages ne forme pas un matroïde.
mais c'est l'intersection de 2 matroïdes: les ensembles d'arêtes sans extrémité commune dans Y et dans Z respectivement.

• Par augmentation on a trouvé un élément max de cette intersection.

Intersection de matroïdes

Données: un graphe à n sommets dont les arêtes sont partitionnées en $E_1, \ldots, E_k$ sous-ensembles disjoints (couleurs).
Problème: Trouver une forêt multicolore maximale.
Remarque: ces forêts sont dans l'intersection de 2 matroïdes.

Algorithme glouton: $T := \emptyset$; tant qu'il existe une arête e d'une couleur n'apparaissant pas dans T, et ne créant pas de cycle, faire $T := T \cup \{e\}$.

Ça ne donne pas l'optimum !

Intersection de matroïdes

Données: un graphe à n sommets dont les arêtes sont partitionnées en $E_1, \ldots, E_k$ sous-ensembles disjoints (couleurs).

Problème: Trouver une forêt multicolore maximale.

Remarque: ces forêts sont dans l'intersection de 2 matroïdes.

Algorithme Améliorant. Initialiser $T := \emptyset$ et itérer:

- Soit $D(T)$ le graphe d'amélioration (E, X) biparti avec arêtes:
  — de $a \in T$ à $b \in E \setminus T$ si $T - a + b$ est sans cycle
  — de $b \in E \setminus T$ à $a \in T$ si $T - a + b$ est multicolore
- Soit $E_1 = \{b \mid T + b$ sans cycle$\}$, $E_2 = \{b \mid T + b$ multicolore$\}$
- Si $D(T)$ a un chemin C de $E_1 \setminus T$ à $E_2 \setminus T$
  faire $T := T \Delta C_{\min}$ où $C_{\min}$ est un plus court tel chemin.

Théorème. L'algorithme Améliorant trouve l'indépendant maximal dans l'intersection de 2 matroïdes.

Cours 2: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

Mariages stables

Données: • Deux ensembles $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$

- Les listes de préférences F_i de x_i et G_j de y_j pour tous i, j.
- Le graphe des mariages est le graphe biparti sur $X \cup Y$ avec une arête (x_i, y_j) si $x_i \in G_j$ et $y_j \in F_i$.
- Un couplage dans ce graphe décrit un (multi)mariage acceptable. Si x est couplé à y on note $\alpha(x) = y$ et $\beta(y) = x$.

exemple: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$

F_1	y_2	y_1	y_3
F_2	y_1	y_3	y_2
F_3	y_1	y_2	y_3

G_1	x_1	x_3	x_2
G_2	x_3	x_1	x_2
G_3	x_1	x_3	x_2

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$
instable: $x_1 \leftrightarrow y_2$

$(x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_2)$
stable

- Un mariage stable est un couplage tel que si x et y ne sont pas couplés alors x préfère $\alpha(x)$ à y ou y préfère $\beta(y)$ à x.

Mariages stables, algorithme de Gale Shapley.

- Initialiser $\alpha(x_i)$ au premier élément de la liste F_i, et $\beta(y)$ indéfini.
- Itérer:

1. pour chaque y_j choisir l'élément x_i le plus intéressant dans G_j parmi les x_i tels que $\alpha(x_i) = y_j$ et poser $\beta(y_j) = x_i$.
2. pour chaque x_i
   - s'il existe y_j tel que $\beta(y_j) = x_i$, alors $\alpha(x_i) = y_j$,
   - sinon, si $\alpha(x_i)$ n'est pas le dernier dans F_i, descendre d'un rang
   - sinon laisser $\alpha(x)$ indéfini.

Théorème. Si les toutes les listes de préférences sont complètes, l'algorithme de Gale-Shapley constuit un mariage stable.

Cours 2: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

Retenir: **Modélisation par flots et coupes**, **algorithmes de Ford-Fulkerson/Edmonds Karp**, **dualité MaxFlow=MinCut**