

# Cours 6: Algorithmes approchés

Algorithmes approchés

Schémas d'approximation

Bin-packing: limite de l'approximabilité.

Voyageur de commerce : non approximabilité

# Un algorithme glouton pour COUVRANT

**Donnée:** Un graphe  $G = (X, E)$  non-orienté **NP-complet !**

**Problème:** Trouver un ensemble minimum de sommets couvrant les arêtes.

**Algorithme:**  $F := E; Y := \emptyset$

Tant que  $F$  est non vide: Choisir une arête  $f$  dans  $F$   
ajouter ses 2 extrémités dans  $Y$   
et supprimer de  $F$  toutes les arêtes couvertes par ces 2 sommets.

**Non optimalité:** pour un graphe réduit à une arête, 2 sommets au lieu d'1

L'algo peut il être encore plus mauvais que ce facteur 2 ?

**Remarque:** si  $H$  est un couplage et  $C$  un couvrant de  $G$  alors  $|H| < |C|$

Or les arêtes utilisées pour constituer  $Y$  forment un couplage:

$$|Y|/2 < |C_{\text{opt}}|$$

$\Rightarrow$  au pire on aura 2 fois trop de sommets

# Algorithmes approchés

**Problème:** Trouver parmi les solutions d'un problème celle qui optimise une fonction  $f$ .

Un algorithme est  $\varepsilon$ -**approché** s'il donne un  $X$  qui satisfait

$$\frac{f(X_{\text{opt}}) - f(X)}{f(X_{\text{opt}})} \leq \varepsilon \quad \text{si } X_{\text{opt}} \text{ maximise } f$$

On veut  $\varepsilon$  proche de 0.

$$\frac{f(X) - f(X_{\text{opt}})}{f(X)} \leq \varepsilon \quad \text{si } X_{\text{opt}} \text{ minimise } f$$

Un algorithme approche l'optimum à un **facteur**  $\theta$  si

$$\max\left(\frac{f(X)}{f(X_{\text{opt}})}, \frac{f(X_{\text{opt}})}{f(X)}\right) \leq \theta \quad \text{On veut } \theta \text{ proche de 1.}$$

Deux formulations équivalentes utilisées indifféremment.

# Un algorithme glouton pour COUVRANT

Donnée: Un graphe  $G = (X, E)$  non-orienté **NP-complet !**

Problème: Trouver un ensemble minimum de sommets couvrant les arêtes.

Algorithme:  $F := E; Y := \emptyset$

Tant que  $F$  est non vide: Choisir une arête  $f$  dans  $F$   
ajouter ses 2 extrémités dans  $Y$   
et supprimer de  $F$  toutes les arêtes couvertes par ces 2 sommets.

L'ensemble couvrant  $Y$  produit vérifie:  $|Y| < 2|C_{\text{opt}}|$

D'où  $\varepsilon = \frac{|Y| - |C_{\text{opt}}|}{|Y|} \leq \frac{1}{2}$ , ou encore  $\theta = \frac{|Y|}{|C_{\text{opt}}|} \leq 2$ .

$\Rightarrow$  Cet algorithme est  $\frac{1}{2}$ -approché ou approché à un facteur 2.

# Sac à dos et schéma d'approximation polynomial

**Donnée:** des poids  $p_1, \dots, p_n$ , des gains  $a_1, \dots, a_p$  et la capacité  $P$

**Problème:** Trouver  $\max (\sum_i a_i x_i \mid \sum_i p_i x_i \leq P, x_i \in \{0, 1\})$

**Algorithme glouton exact pour  $x_i$  réels:**

- Réordonner les objets de sorte que  $\frac{a_1}{p_1} \geq \frac{a_2}{p_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{p_n}$ .
- $s := 0$ ; Pour  $j := 1$  à  $n$  faire
  - si  $s + p_j \leq P$  faire  $s := s + p_j$  et  $x_j := 1$
  - sinon  $x_j := \frac{P-s}{p_j}$ ,  $x_k := 0$  pour  $k > j$  et sortir de la boucle.

La dernière étape  $j_*$  complète le sac:  $\sum p_j x_j = P$  (sauf si  $P > \sum p_j$ )

et l'optimum est  $A_* = \sum a_j x_j = \sum_{j < j_*} a_j + \frac{P - \sum_{j < j_*} p_j}{p_{j_*}} a_{j_*}$ .

**Algorithme glouton naïf pour  $x_i$  entiers:** idem sauf la dernière étape où on ne prend rien.

C'est arbitrairement mauvais même avec 2 objets: si  $p_2 = (k + 1)p_1$ ,  $a_2 = ka_1$  et  $P = p_2$ , alors on a bien  $\frac{a_1}{p_1} \geq \frac{a_2}{p_2}$  et on perd un facteur  $k$ .

# Sac à dos et schéma d'approximation polynomial

**Donnée:** des poids  $p_1, \dots, p_n$ , des gains  $a_1, \dots, a_p$  et la capacité  $P$

**Problème:** Trouver  $\max (\sum_i a_i x_i \mid \sum_i p_i x_i \leq P, x_i \in \{0, 1\})$

**Amélioration triviale du glouton:** On choisit le meilleur gain entre la solution du glouton et  $\max(a_i)$  (on suppose que  $p_i \leq P$  pour tout  $i$ ).

**Théorème:** Le glouton amélioré trouve une solution dont le bénéfice  $A_+$  est au moins la moitié de l'optimum entier  $A_{\text{opt}}$ .

**Preuve:** L'optimal entier  $A_{\text{opt}}$  est au plus l'optimal réel:

$$A_{\text{opt}} \leq A_* = \sum_{j < j_*} a_j + \frac{P - \sum_{j < j_*} p_j}{p_{j_*}} a_{j_*} \leq \sum_{j < j_*} a_j + a_{j_*}.$$

Comme on s'est arrêté sur  $j_*$ , on a  $P < \sum_{j < j_*} p_j + p_{j_*}$ .

Or le glouton amélioré fait au moins  $\sum_{j < j_*} a_j$  (glouton) ou  $a_{j_*}$ .

**Glouton amélioré est  $\frac{1}{2}$ -approché !**

# Sac à dos et schéma d'approximation polynomial

**Donnée:** des poids  $p_1, \dots, p_n$ , des gains  $a_1, \dots, a_p$  et la capacité  $P$

**Problème:** Trouver  $\max \left( \sum_i a_i x_i \mid \sum_i p_i x_i \leq P, x_i \in \{0, 1\} \right)$

**Théorème (Schéma d'approximation polynomial):** Pour tout  $\varepsilon$  il existe un algorithme  $\varepsilon$ -approché pour le problème SAC-À-DOS de complexité  $O(n^3/\varepsilon)$ .

**Idée:** • On utilise la programmation dynamique sur des données arrondies:

On pose  $b_i = \lfloor \frac{a_i}{10^k} \rfloor$  pour un  $k$  bien choisi.

Par programmation dynamique, on obtient l'optimum  $\{x'_i\}$  du problème arrondi en temps  $O(n^2 M') = O(\frac{n^2 M}{10^k})$  où  $M = \max(a_i)$ .

• On compare l'approximation du problème exact donnée par  $\{x'_i\}$  à un optimum  $\{x_i\}$ :

$$\sum_i a_i x'_i \geq \sum_i 10^k b_i x'_i \geq \sum_i 10^k b_i x_i \geq \sum_i (a_i - 10^k) x_i \geq \sum_i a_i x_i - n 10^k$$

Si  $k \leq \log_{10} \frac{A_0 \varepsilon}{n} \leq \log_{10} \frac{M \varepsilon}{n}$ , on a une  $\varepsilon$ -approximation; temps  $O(\frac{n^3}{\varepsilon})$ .

# Rangement optimal et approximation

**Donnée:**  $n$  objets de poids  $p_1, \dots, p_n$ , et des boites de capacité  $P$ .

**Problème:** Mettre les objets dans un nombre minimum de boites.

**Exemple:** 61, 41, 40, 40, 20, 19, 19     $P = 120$

avec 2 boites:  $61+40+19=120$      $41+40+20+19=120$ .

**Algorithme glouton:** ordonner les objets  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ , et les ranger dans cet ordre dans la première boite possible:

**Exemple:** 61 + 41  
40 + 40 + 20 + 19  
19

**Théorème:** L'algorithme glouton utilise au plus  $1 + \frac{3}{2}N_{\text{opt}}$  boites.

**Preuve:** • Si tous les objets ont poids  $\geq P/3$ , alors glouton est optimum:

$$p_1 \geq \dots \geq p_i > \frac{2}{3}P \geq p_{i+1} \geq \dots \geq p_j > \frac{1}{2}P \geq p_{j+1} \geq \dots \geq p_n > \frac{1}{3}P$$

• Si chaque boite contient un objet de poids  $> \frac{1}{3}P$  alors glouton optimum.

• Sinon toutes les boites sauf une sont remplies à plus des  $2/3$ .

# Rangement optimal et limite de l'approximabilité

**Théorème:** algorithme polynomial  $\varepsilon < \frac{1}{3}$  approché pour RANGE OPT  
 $\Rightarrow$  algorithme polynomial pour PARTITION  $\Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

**Problème PARTITION:** trouver une partition  $S_1, S_2$  d'un ensemble fini d'entiers  $S$  telle que  $\sum_{s \in S_1} s = \sum_{s \in S_2} s = S/2$ .

**Preuve que PARTITION est  $\mathcal{NP}$ -complet:** clairement dans  $\mathcal{NP}$   
Réduction de SOMMEPARTIELLE à PARTITION.

**Preuve du théorème:**  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une instance de PARTITION  
On considère le problème RANGE OPT avec  $P = \frac{1}{2} \sum e_i$   
et on suppose d'y appliquer un algorithme  $\varepsilon < \frac{1}{3}$  approché.

- si la réponse est 2, il y a une solution à PARTITION
- sinon, la réponse est 3 ou plus et il n'y a pas de solution avec 2 boîtes (car  $\frac{3-2}{3} > \varepsilon$ ), et donc pas de solution à PARTITION

# Voyageur du commerce et inapproximabilité

**Donnée:** un graphe  $G$  et une valuation des arêtes ("distances entre villes")

**Problème:** Trouver un ordre de visite des villes qui minimise la distance.

**Théorème:** algo polynomial  $\varepsilon < 1$  approché pour le voyageur de commerce  
 $\Rightarrow$  algorithme polynomial pour HAMILTONIEN  $\Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

**Problème HAMILTONIEN:** étant donné un graphe, trouver un cycle qui visite une et une seule fois les sommets.  $\mathcal{NP}$ -complet (cf poly)

**Preuve du théorème:** soit  $G$  un graphe (instance de HAMILTONIEN)

• On pose  $k$  entier  $\geq \frac{1}{1-\varepsilon}$  et on construit la valuation:

$$v(x, y) = 1 \text{ si } (x, y) \text{ arête de } G, \quad v(x, y) = nk + 1 \text{ sinon.}$$

• Si on a une  $\varepsilon$ -approx de valuation  $n$  alors  $G$  admet un cycle hamiltonien, sinon la valuation trouvée est  $x \geq (n-1) + (nk+1)$  et comme  $\frac{n+nk-C_o}{n+nk} \leq \varepsilon$ , on a  $C_o \geq n(1+k)(1-\varepsilon) > n$ .

# Cours 6: Algorithmes approchés

Algorithmes approchés

Schémas d'approximation

Bin-packing: limite de l'approximabilité.

Voyageur de commerce : non approximabilité

## Que retenir ?

Algorithme approché : chercher une borne sur l'optimum !

Limite de l'approximabilité : via la NP-complétude

Des résultats d'approximabilités très différents  
pour des problèmes tous NP-complets !