

# Cours 3: Flots et couplages

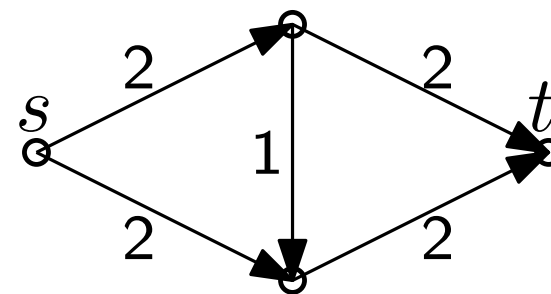
- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

# Cours 3: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

# Réseau de transport et flots

**Données:** Un graphe orienté  $G = (X, A)$ , une valuation  $c : A \rightarrow \mathbb{N}$ , et 2 sommets  $s$  et  $t$  avec  $d_{\text{in}}(s) = 0$  et  $d_{\text{out}}(t) = 0$ .

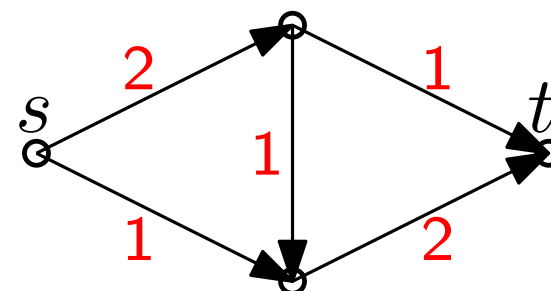


- Les sommets  $s$  et  $t$  sont la **source** et **puits**,  $c(a)$  la **capacité** de l'arc  $a$ .
- Un **flot** est une application  $\phi$  de  $A$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que
  - le flot en chaque arc  $a$  est inférieur à la capacité:  $\phi(a) \leq c(a)$
  - pour tout sommet de  $X \setminus \{s, t\}$ , flot entrant = flot sortant

La **valeur** du flot  $\phi$  est le flot sortant de  $s$  (égal au flot entrant en  $t$ ).

**Problème:** Trouver un flot de valeur maximale.

- Un flot  $\phi$  est **saturé** si sur tout chemin de  $s$  à  $t$  il existe un arc  $a$  tel que  $\phi(a) = c(a)$ .



# Les coupes d'un réseau de transport

- Une **coupe** est une partition de l'ensemble des sommets en 2 parties disjointes, l'une contenant la source et l'autre le puit:

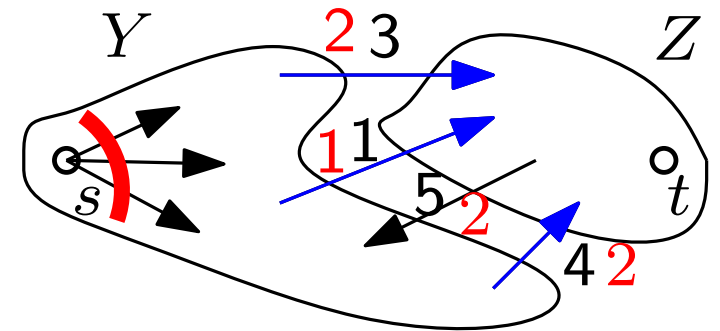
$$Y \cup Z = X, \quad Y \cap Z = \emptyset, \quad s \in Y, \quad t \in Z$$

- La **capacité**  $C(Y, Z)$  d'une coupe est la somme des capacités des arcs de  $Y$  à  $Z$ .
- Le **flux** de  $Y$  à  $Z$  dans un flot  $\phi$  est

$$\phi(Y, Z) = \sum_{u \in Y \times Z} \phi(u)$$

et le **flux orienté** de la coupe  $(Y, Z)$  est

$$\Delta(Y, Z) = \phi(Y, Z) - \phi(Z, Y).$$



$$C(Y, Z) = 8$$

$$\phi(Y, Z) = 5$$

$$\Delta(Y, Z) = 3$$

Tout flot a pour valeur  $V_\phi = \phi(\{s\}, X \setminus \{s\}) = \Delta(\{s\}, X \setminus \{s\})$ .

**Lemme.** Plus généralement  $V_\phi = \Delta(Y, Z)$  pour toute coupe.

Preuve par récurrence sur  $|Y|$ :  $Y' = Y \cup \{y\}$ ,  $i + i' = o + o'$ .

# Les coupes d'un réseau de transport

- Une **coupe** est une partition de l'ensemble des sommets en 2 parties disjointes, l'une contenant la source et l'autre le puit:

$$Y \cup Z = X, \quad Y \cap Z = \emptyset, \quad s \in Y, \quad t \in Z$$

- La **capacité**  $C(Y, Z)$  d'une coupe est la somme des capacités des arcs de  $Y$  à  $Z$ .
- Le **flux** de  $Y$  à  $Z$  dans un flot  $\phi$  est

$$\phi(Y, Z) = \sum_{u \in Y \times Z} \phi(u)$$

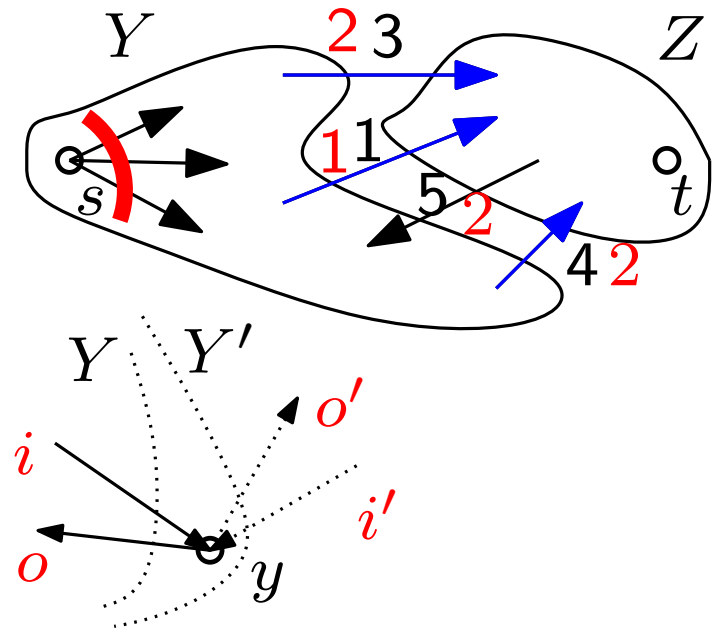
et le **flux orienté** de la coupe  $(Y, Z)$  est

$$\Delta(Y, Z) = \phi(Y, Z) - \phi(Z, Y).$$

Tout flot a pour valeur  $V_\phi = \phi(\{s\}, X \setminus \{s\}) = \Delta(\{s\}, X \setminus \{s\})$ .

**Lemme.** Plus généralement  $V_\phi = \Delta(Y, Z)$  pour toute coupe.

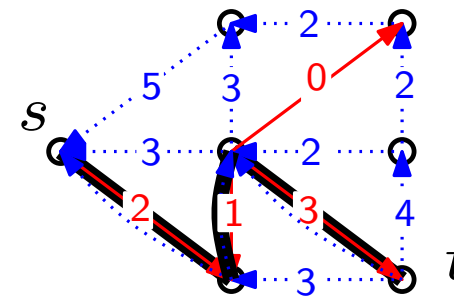
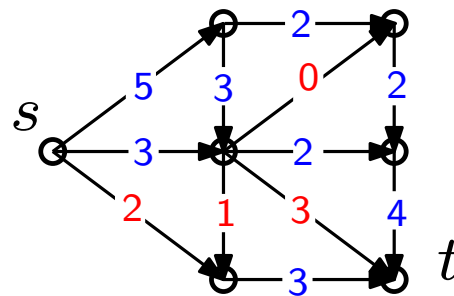
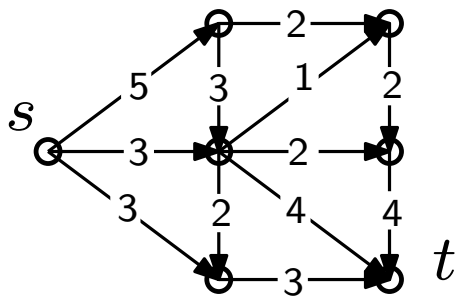
Preuve par récurrence sur  $|Y|$ :  $Y' = Y \cup \{y\}$ ,  $i + i' = o + o'$ .



# Le graphe des augmentations d'un flot

Le graphe des augmentations  $G_\phi$ :

- Les sommets de  $G_\phi$  sont ceux de  $G$ ,
- Tout arc  $a = (x, y)$  de  $G$  reste dans  $G_\phi$  si  $\phi(a) < c(a)$ .
- L'opposé  $(y, z)$  de l'arc  $a = (x, y)$  de  $G$  est dans  $G_\phi$  si  $\phi(a) > 0$ .

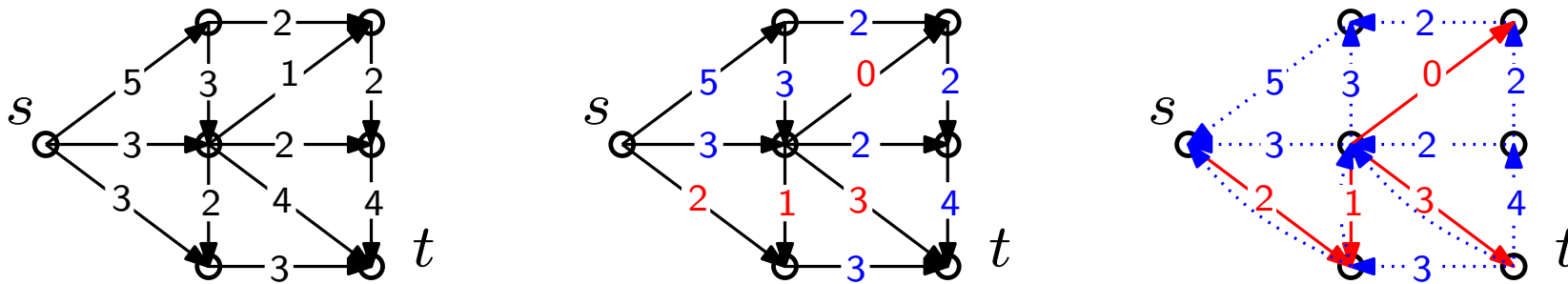


**Lemme.** S'il existe un chemin de  $s$  à  $t$  dans  $G_\phi$ , le flot peut être amélioré.

# Le graphe des augmentations d'un flot

Le graphe des augmentations  $G_\phi$ :

- Les sommets de  $G_\phi$  sont ceux de  $G$ ,
- Tout arc  $a = (x, y)$  de  $G$  reste dans  $G_\phi$  si  $\phi(a) < c(a)$ .
- L'opposé  $(y, z)$  de l'arc  $a = (x, y)$  de  $G$  est dans  $G_\phi$  si  $\phi(a) > 0$ .



**Lemme.** S'il existe un chemin de  $s$  à  $t$  dans  $G_\phi$ , le flot peut être amélioré.

**Lemme.** S'il n'existe pas de chemin de  $s$  à  $t$  dans  $G_\phi$ , alors il existe une coupe  $(Y, Z)$  telle que  $c(Y, Z) = V_\phi$ .

**Théorème.** Valeur du flot maximal = Capacité de la coupe minimale.

# Cours 3: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

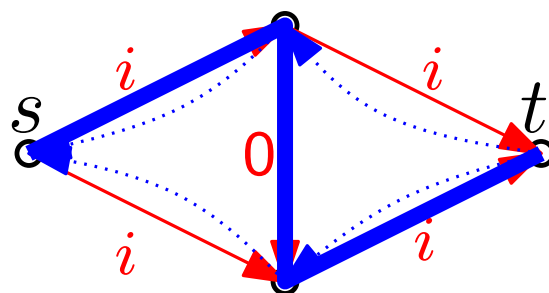
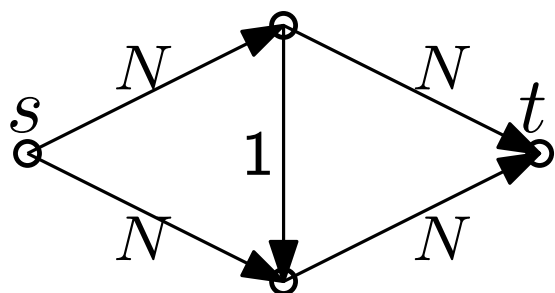
# Algorithme de Ford Fulkerson

- Initialiser avec un flot quelconque (nul par exemple).
- Tant qu'il existe un chemin dans le graphe des augmentations, augmenter le flot.

**Théorème.** L'algorithme de Ford Fulkerson constitue un flot maximal. Les sommets atteignables depuis  $s$  dans le graphe des augmentations forment une coupe minimale. **Complexité  $O(m\Phi)$**

**Remarques.** • Le flot maximal obtenu est à valeur entière.

- On a pas spécifié quel chemin on choisit à chaque étape.



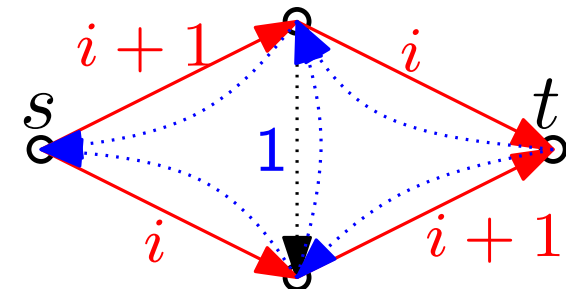
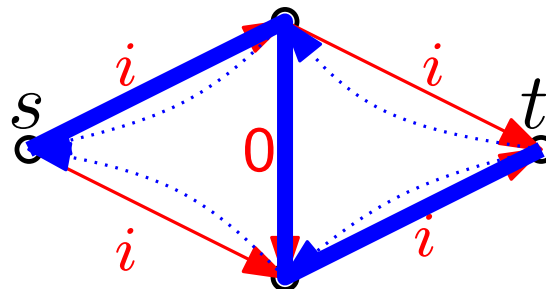
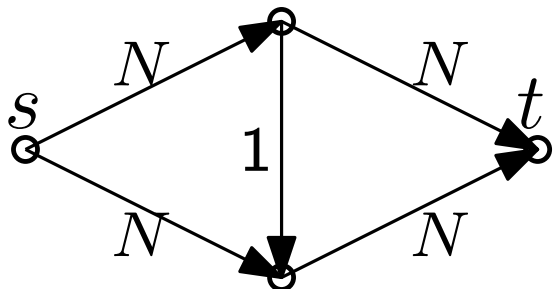
# Algorithme de Ford Fulkerson

- Initialiser avec un flot quelconque (nul par exemple).
- Tant qu'il existe un chemin dans le graphe des augmentations, augmenter le flot.

**Théorème.** L'algorithme de Ford Fulkerson constitue un flot maximal. Les sommets atteignables depuis  $s$  dans le graphe des augmentations forment une coupe minimale. **Complexité  $O(m\Phi)$**

**Remarques.** • Le flot maximal obtenu est à valeur entière.

- On a pas spécifié quel chemin on choisit à chaque étape.



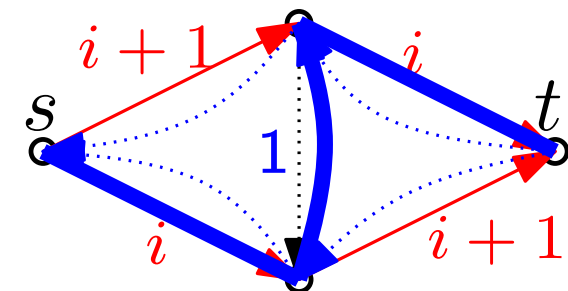
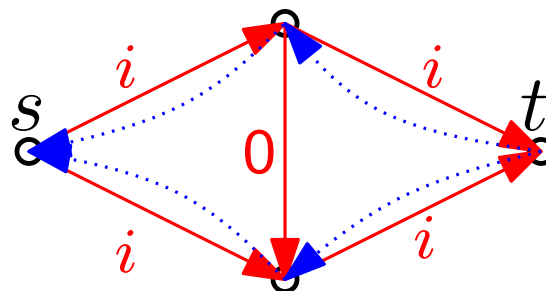
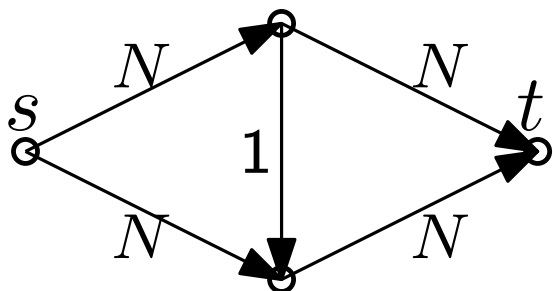
# Algorithme de Ford Fulkerson

- Initialiser avec un flot quelconque (nul par exemple).
- Tant qu'il existe un chemin dans le graphe des augmentations, augmenter le flot.

**Théorème.** L'algorithme de Ford Fulkerson constitue un flot maximal. Les sommets atteignables depuis  $s$  dans le graphe des augmentations forment une coupe minimale. **Complexité  $O(m\Phi)$**

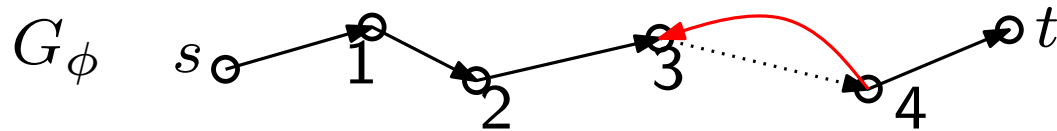
**Remarques.** • Le flot maximal obtenu est à valeur entière.

- On a pas spécifié quel chemin on choisit à chaque étape.



# Algorithme de Dinic, Edmonds et Karp

- Effectuer Ford-Fulkerson en choisissant à chaque étape le premier chemin d'augmentation obtenu par recherche en largeur dans  $G_\phi$ .



autrement dit on choisit un plus court chemin d'augmentation.

**Théorème.** L'algorithme DEK effectue au plus  $O(nm^2)$  opérations si le graphe  $G$  à  $n$  sommets et  $m$  arcs.

- Preuve.**
- Lorsqu'un chemin d'augmentation est utilisé, le flot devient nul ou maximal sur au moins l'une des arêtes: celle-ci est retournée.
  - Quand l'arc  $(x, y)$  du chemin se retourne, les distances à  $s$  ne peuvent qu'augmenter. Si  $(y, x)$  revient sur le chemin ce sera plus loin.
  - Donc chacun des  $m$  arcs peut être retourné au plus  $n$  fois.
  - Le nombre de chemins d'augmentation utilisés est donc  $O(nm)$ .
  - Le coût de la recherche d'un chemin d'augmentation est  $O(m)$ .

# Cours 3: Flots et couplages

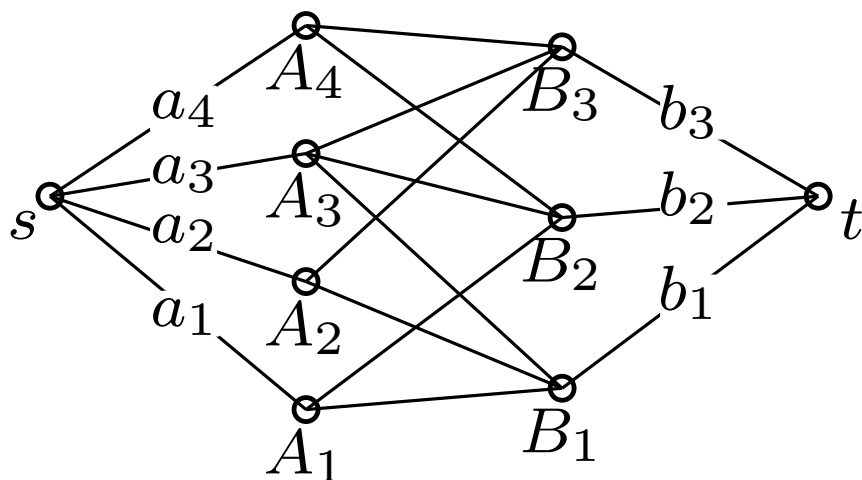
- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

# Répartition d'approvisionnement

- Données:**
- les fournisseurs  $A_1, \dots, A_p$ , avec  $A_i$  de capacité  $a_i$ .
  - les clients  $B_1, \dots, B_q$ , le client  $B_i$  demande une quantité  $b_i$ .
  - les contraintes:  $B_j$  ne peut être livré que par les  $\{A_i\}_{i \in C_j}$ .

**Problème:** maximiser l'approvisionnement mutuel.

**Modélisation en flot:** sommets  $X = \{s, t, A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q\}$



arête  $(A_i, B_j)$  si  $i \in C_j$   
de capacité  $\infty$ .

arête  $(s, A_i)$  de capacité  $a_i$

arête  $(B_j, t)$  de capacité  $b_j$

Approvisionnement mutuel maximal = flot maximal dans ce graphe.

# Problème de l'expédition idéale

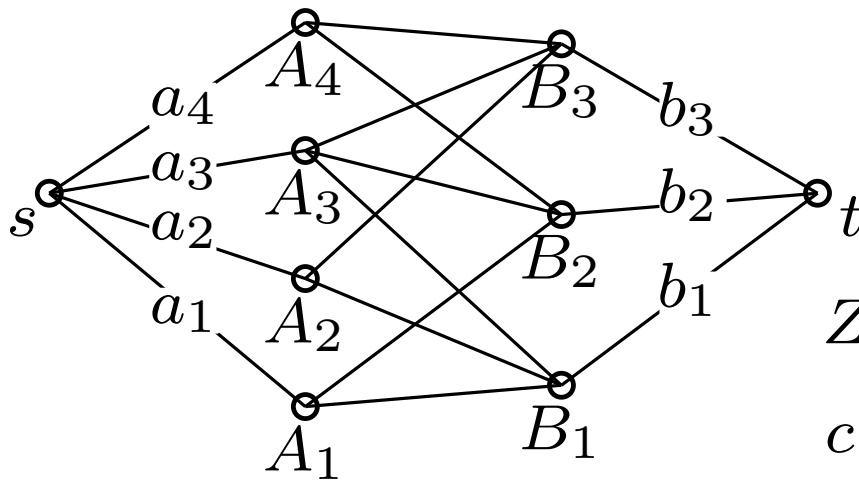
**Données:** • les instruments  $A_1, \dots, A_p$ , avec  $A_i$  de coût  $c_i$ .

• des expériences  $B_1, \dots, B_q$  à faire,  $B_i$  rapporte  $b_i$ .

• pour pouvoir effectuer  $B_j$  il faut avoir  $\{A_i\}_{i \in C_j}$ .

**Problème:** maximiser le gain de l'expédition.

**Modélisation en flot:** on utilise le même graphe



une coupe minimale doit éviter les arcs  $(A_i, B_j)$

une expédition  $\Leftrightarrow$  une coupe  $(Y, Z)$ :  
 $Z = \{A_i \text{ emportés}\} \cup \{B_i \text{ effectués}\} \cup \{z\}$

$$c(Y, Z) = \sum_{A_i \in Z} a_i + \sum_{B_i \notin Z} b_j$$

Gain maximal =  $\sum b_j - c(Y, Z)$  pour la coupe de capacité minimale.

# Cours 3: Flots et couplages

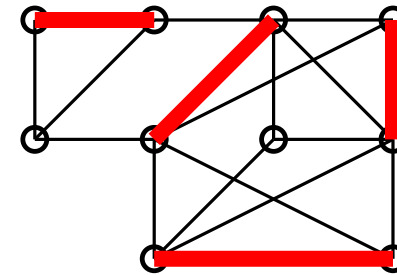
- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

# Couplages dans un graphe non orienté

**Données:** un graphe non orienté (ou symétrique)

Un **couplage** est un ensemble d'arêtes sans extrémités communes

**Problème:** déterminer un couplage de cardinalité maximale.



maximal pour l'inclusion

# Couplages dans un graphe non orienté

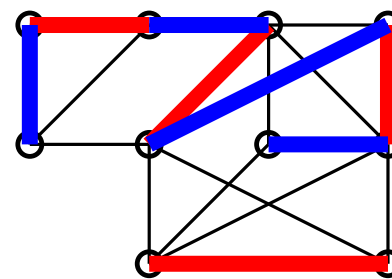
**Données:** un graphe non orienté (ou symétrique)

Un **couplage** est un ensemble d'arêtes sans extrémités communes

**Problème:** déterminer un couplage de cardinalité maximale.

Un **chemin alternant** alterne les arêtes libres et couplées.

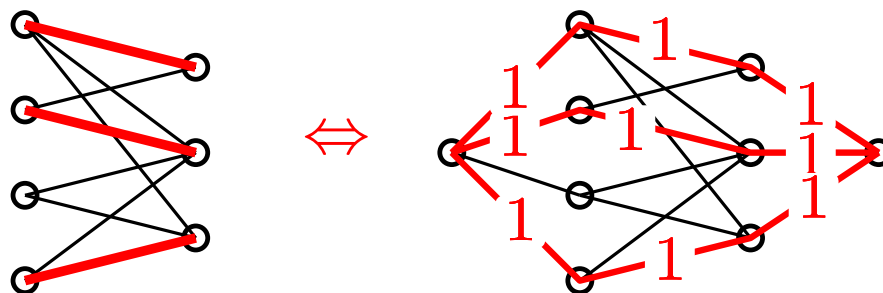
**Théorème.** Couplage maximum  $\Leftrightarrow$  pas de chemins alternants entre 2 sommets libres.



maximal pour l'inclusion

On peut trouver les chemins alternants en temps polynomial (Edmonds).

Pour les graphes bipartis, on se ramène à un problème de flot avec des arcs de capacité 1.



INF-550-3: Flots et couplages

# Couplages et matroïdes

Soit  $G = (Y \cup Z, E)$  un graphe biparti.

La famille  $\mathcal{F}$  des **parties couplables de  $Y$**  est l'ensemble des  $Y' \subset Y$  tels qu'il existe un couplage parfait entre  $Y'$  et un  $Z' \subset Z$ .

**Lemme.**  $\mathcal{F}$  est un matroïde.

**Preuve.** Si  $|Y''| > |Y'|$  on superpose les couplages associés à  $Y'$  et  $Y''$  pour trouver une chaîne alternante qui permet d'étendre  $Y'$ .

**Corollaire (Cours 1).** Les transversaux d'un ensemble de parties forment un matroïde.

**Remarques.**

- La famille des couplages ne forme pas un matroïde.  
mais c'est l'intersection de 2 matroïdes: les ensembles d'arêtes sans extrémité commune dans  $Y$  et dans  $Z$  respectivement.
- Par augmentation on a trouvé un élément max de cette intersection.

# Intersection de matroïdes

**Données:** un graphe à  $n$  sommets dont les arêtes sont partitionnées en  $E_1, \dots, E_k$  sous-ensembles disjoints (couleurs).

**Problème:** Trouver une forêt multicolore maximale.

**Remarque:** ces forêts sont dans l'intersection de 2 matroïdes.

**Algorithme glouton:**  $T := \emptyset$ ; tant qu'il existe une arête  $e$  d'une couleur n'apparaissant pas dans  $T$ , et ne créant pas de cycle, faire  $T := T \cup \{e\}$ .

Ça ne donne pas l'optimum !

# Intersection de matroïdes

**Données:** un graphe à  $n$  sommets dont les arêtes sont partitionnées en  $E_1, \dots, E_k$  sous-ensembles disjoints (couleurs).

**Problème:** Trouver une forêt multicolore maximale.

**Remarque:** ces forêts sont dans l'intersection de 2 matroïdes.

**Algorithme Améliorant.** Initialiser  $T := \emptyset$  et itérer:

- Soit  $D(T)$  le graphe d'amélioration  $(E, X)$  biparti avec arêtes:
  - de  $a \in T$  à  $b \in E \setminus T$  si  $T - a + b$  est sans cycle
  - de  $b \in E \setminus T$  à  $a \in T$  si  $T - a + b$  est multicolore
- Soit  $E_1 = \{b \mid T + b \text{ sans cycle}\}$ ,  $E_2 = \{b \mid T + b \text{ multicolore}\}$
- Si  $D(T)$  a un chemin  $C$  de  $E_1 \setminus T$  à  $E_2 \setminus T$   
faire  $T := T \Delta C_{\min}$  où  $C_{\min}$  est un plus court tel chemin.

**Théorème.** L'algorithme Améliorant trouve l'indépendant maximal dans l'intersection de 2 matroïdes.

# Cours 3: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

# Mariages stables

- Données:
- Deux ensembles  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$  et  $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$
  - Les listes de préférences  $F_i$  de  $x_i$  et  $G_j$  de  $y_j$  pour tous  $i, j$ .
  - Le graphe des mariages est le graphe biparti sur  $X \cup Y$  avec une arête  $(x_i, y_j)$  si  $x_i \in G_j$  et  $y_j \in F_i$ .

# Mariages stables

- Données:**
- Deux ensembles  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$  et  $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$
  - Les listes de préférences  $F_i$  de  $x_i$  et  $G_j$  de  $y_j$  pour tous  $i, j$ .
  - Le graphe des mariages est le graphe biparti sur  $X \cup Y$  avec une arête  $(x_i, y_j)$  si  $x_i \in G_j$  et  $y_j \in F_i$ .
  - Un couplage dans ce graphe décrit un (multi)mariage acceptable. Si  $x$  est couplé à  $y$  on note  $\alpha(x) = y$  et  $\beta(y) = x$ .

exemple:  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| $F_1$ | $y_2$ | $y_1$ | $y_3$ |
| $F_2$ | $y_1$ | $y_3$ | $y_2$ |
| $F_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| $G_1$ | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ |
| $G_2$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ |
| $G_3$ | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ |

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$   
**instable:**  $x_1 \leftrightarrow y_2$   
 $(x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_2)$   
**stable**

- Un mariage stable est un couplage tel que si  $x$  et  $y$  ne sont pas couplés alors  $x$  préfère  $\alpha(x)$  à  $y$  ou  $y$  préfère  $\beta(y)$  à  $x$ .

# Mariages stables, algorithme de Gale Shapley.

- Initialiser  $\alpha(x_i)$  au premier élément de la liste  $F_i$ , et  $\beta(y)$  indéfini.
- Itérer:
  1. pour chaque  $y_j$  choisir l'élément  $x_i$  le plus intéressant dans  $G_j$  parmi les  $x_i$  tels que  $\alpha(x_i) = y_j$  et poser  $\beta(y_j) = x_i$ .
  2. pour chaque  $x_i$ 
    - s'il existe  $y_j$  tel que  $\beta(y_j) = x_i$ , alors  $\alpha(x_i) = y_j$ ,
    - sinon, si  $\alpha(x_i)$  n'est pas le dernier dans  $F_i$ , descendre d'un rang
    - sinon laisser  $\alpha(x)$  indéfini.

**Théorème.** Si les toutes les listes de préférences sont complètes, l'algorithme de Gale-Shapley constitue un mariage stable.

# Cours 3: Flots et couplages

- Flots et coupes
- Algorithmes de calcul du flot maximal
- Modélisation par flots
- Couplages et graphes des augmentations
- Mariages stables

Retenir: **Modélisation par flots et coupes, algorithmes de Ford-Fulkerson/Edmonds Karp, dualité MaxFlow=MinCut**