INF 431

B. WERNER

Graphes I

3 mars 2010

La page des Projets est ouverte !

Fabrice LE FESSANT, responsable des projets

Ce n’est pas : premiers arrivés premiers servis !

À propos du Projet

Calendrier : Voir le web !

Conseils :

- bien réfléchir au choix de son binôme ;
- bien réfléchir avant de choisir le sujet ;
- réfléchir à la répartition du travail ; réfléchir avant de programmer ;
- ne pas s'y prendre au dernier moment ;
- écrire un rapport clair et précis, avec explication des choix de programmation, performances du programme, améliorations éventuelles, etc.
- Ne pas hésiter à contacter l'auteur du sujet **par email** en cas de problème lié au sujet.

Plan

0. À propos du projet.

I. À quoi servent les graphes.

II. Représentations des graphes.

III. Le package `grapheX`.

IV. Accessibilité.

I. À quoi servent les graphes ?

Jusqu'à présent :

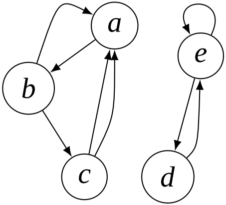
- tableau : informations sans corrélation ;
- liste, arbre : une adresse mémoire
- deux adresses mémoire : files de priorité ;
- que faire si les structures sont plus complexes ?

Quelques exemples :

- modélisation de réseaux de toutes sortes : plan du métro, train, guidage GPS, liaisons électriques, gazoducs, spatiales, INTERNET, le web ;
- représentations de liens logiques : écosystèmes ; graphe de dépendance entre fichiers source, diagramme d'héritage, etc. ;
- modélisation de l'état d'un système ;
- allocations de ressources, chemin de coûts minimaux, etc.

Abstraction !

Définition



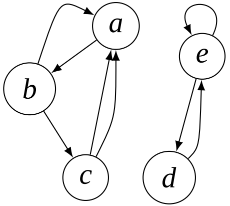
Un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ est donné par un ensemble $\mathcal{S}$ de sommets et un ensemble $\mathcal{A}$ d'arcs, $\mathcal{A} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

Ex. $\mathcal{S} = \{a, b, c, d, e\}$,
$\mathcal{A} = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, a), (d, e), (e, d)\}$.

Rem. La complexité des algorithmes sera fonction de $n = |\mathcal{S}|$ et souvent également de $m = |\mathcal{A}|$ (avec $m \leqslant n^2$).

$\boxed{\text{Nous parlerons essentiellement de graphes finis}}$

Terminologie



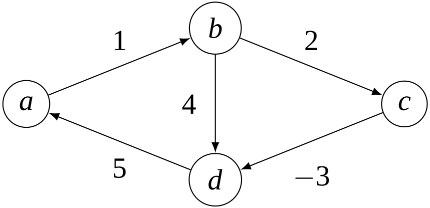
- $\alpha = (a, b)$ est orienté de a vers b ;
- α a pour origine a et destination b ;
- α est incident à a ainsi qu'à b ;
- a est un prédécesseur de b, et b un successeur de a ;
- a et b sont adjacents.

Graphe simple s'il ne comporte pas de boucles ou d'arcs multiples ; multigraphe s'il comporte des arcs multiples (mais pas de boucles).

L'arité (ou degré) de $x \in \mathcal{S}$ est le nombre d'arcs partant ou arrivant en x.

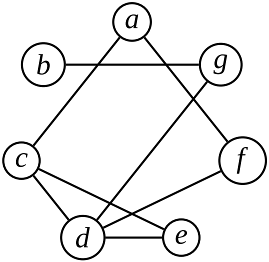
Graphe valué

Ex. Carte des distances, etc.

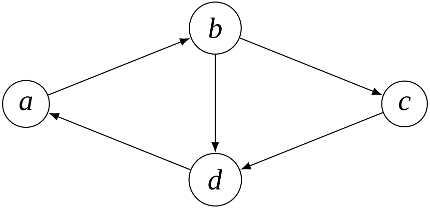


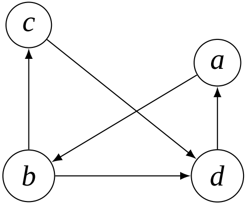
Graphe non orienté (ou symétrique)

Cas particulier (fréquent) où $(i, j) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{A}$; on parle alors plutôt d'ensemble d'arêtes.

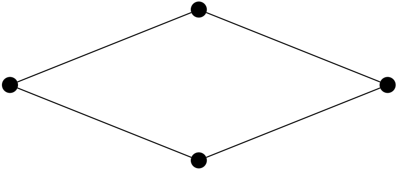


Graphes et dessins



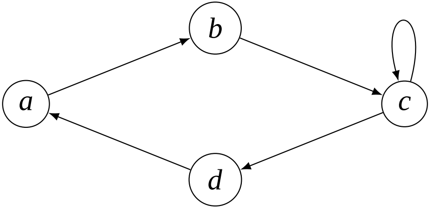


Graphe abstrait :



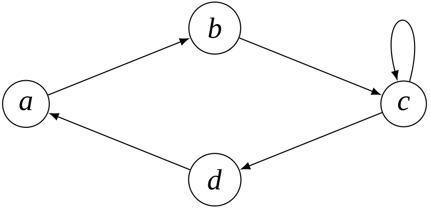
Graphe sous-jacent

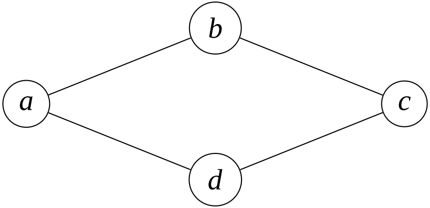
Graphe non-orienté obtenu en enlevant les flèches :



Graphe sous-jacent

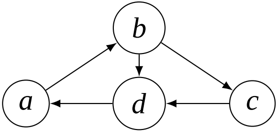
Graphe non-orienté obtenu en enlevant les flèches :

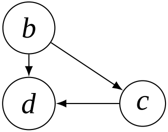




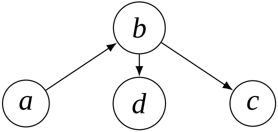
Sous-graphe

Si $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, on note $\mathcal{A}|\mathcal{S}'$ l'ensemble des arêtes de $\mathcal{A}$ qui ont leurs deux extrémités dans $\mathcal{S}'$.
Le graphe $\mathcal{G}' = \mathcal{G}|\mathcal{S}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}|\mathcal{S}')$ est appelé le graphe induit de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{S}'$.

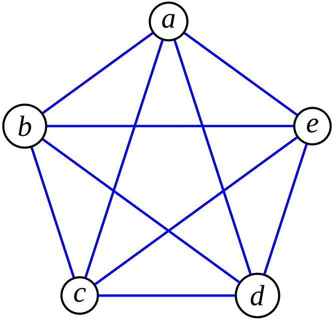




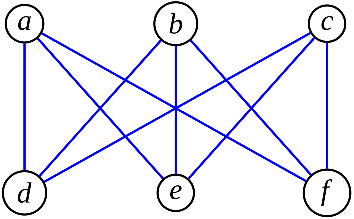
Tout graphe $(\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ avec $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ est appelé sous-graphe de $\mathcal{G}$; si $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$, on parle de graphe couvrant.



Quelques graphes classiques



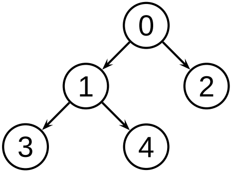
K_5
graphe complet



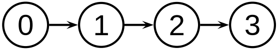
$K_{3,3}$
graphe complet biparti

Graphe/arbre/liste

Un arbre est un graphe particulier :



Une liste peut être vue comme un arbre filiforme, et donc un graphe :



Quelques problèmes fondamentaux

- Accessibilité, connexité, plus courts chemins.
- Planarité.
- Coloration (th. des 4 couleurs ; attribution des fréquences).
- Dessins : comment dessiner un graphe plan (circuit électronique) ?
- Visualisation : comment comprendre un graphe avec 10^6 sommets ?
- Optimisation combinatoire : voyageur de commerce, etc.

II. Représentations des graphes

Comment manipuler un graphe ?

- On doit d'abord modéliser le problème et trouver un codage adéquat. Cela peut se faire par acquisition, etc.

- **Attention :** il n'y a pas de représentation canonique (dessin) d'un graphe. . .

- Une fois cela fait, on peut passer au codage de l'information.

Quelles structures ?

Abstraitement : $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$.

Codage de $\mathcal{S}$: ensemble de sommets, par exemple $[0..n-1]$; en Java, n'importe quel objet de `Collection`.

Codage de $\mathcal{A}$:

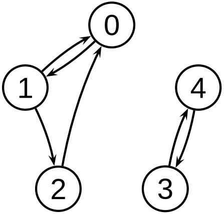
- graphe simple (pas de boucle ni arête multiple) : matrice, tableau de listes (ou autre structure garantissant l'unicité).
- multigraphe : tableau de listes (ou multi-ensembles).

Matrice d'adjacence

Pour $\mathcal{G}$ simple, matrice $n \times n$ telle que :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in \mathcal{A}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ex.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe valué : $M_{i,j} = v(i,j)$.

Représentation par listes de successeurs

On associe à chaque sommet i la liste des sommets j tels que $(i,j) \in \mathcal{A}$.

Ex.

```
L[0] = (1)
L[1] = (0, 2)
L[2] = (0)
L[3] = (4)
L[4] = (3)
```

Comparaisons des deux représentations

On manipulera les deux représentations en fonction des contextes. On pourra aussi abstraire une partie des propriétés.

type	mémoire	utilisation
matrice	$O(n^2)$	graphe dense
listes	$O(\|\mathcal{A}\| + n)$	graphe creux

- Listes vs. matrices : on gagne quand $|\mathcal{A}| \ll n^2$.
- Matrices mal adaptées aux arcs multiples ; très adaptées aux petits graphes.

III. Le package `grapheX`

Forcément un compromis

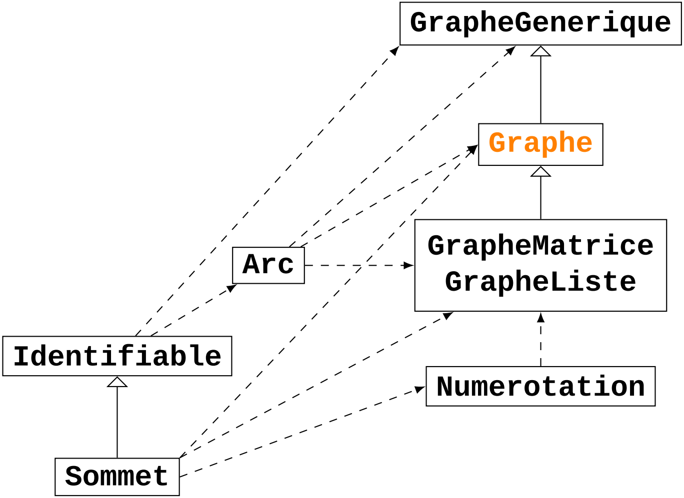
Remarque préliminaire : il est impossible d'écrire une classe de graphe qui soit universelle.

Il n'est pas dit que ce soit l'implantation la plus efficace.

Si les performances sont cruciales, il vaut peut-être mieux réécrireles structures adaptées à la main.

Toutefois, on utilisera souvent la classe abstraite pour les exemples.

Le schéma



j'hérite ⟶▷ de utilisé - - ► dans

La classe abstraite `GrapheGenerique`

```
public abstract class
 GrapheGenerique <S extends Identifiable>{

  public abstract int taille();

  public abstract void ajouterSommet(S s);

  public abstract Collection<S> sommets();

  public abstract boolean existeArc(S s, S t);

  public abstract void
   ajouterArc(S s, S t, int val);

  public abstract int valeurArc(S s, S t);

  public abstract void enleverArc(S s, S t);

  public abstract
   Collection<Arc<S>> voisins(S s);
}
```

Identifiable et Arc

```
public class Identifiable
 implements Comparable<Identifiable>{
  ...
  public Identifiable(String identifiant) {
    ident = identifiant;
  }
  ...
}
```

```
// L'arc o -> d avec valeur val
public class Arc<S extends Identifiable>
  implements Comparable<Arc<S>>{
  ...
  public Arc(S o0, S d0, int val0) {...}
  ...
}
```

`Identifiable` et `Arc`

```
public class Identifiable
 implements Comparable<Identifiable>{
   ...
   public Identifiable(String identifiant) {
     ident = identifiant;
   }
   ...
}


// L'arc o -> d avec valeur val
public class Arc<S extends Identifiable>
   implements Comparable<Arc<S>>{
   ...
   public Arc(S o0, S d0, int val0) {...}
   ...
}
```

Un exemple d'identifiable : **`Sommet`**

```java
package grapheX;

public class Sommet extends Identifiable {

  public Sommet(String nn) {
    super(nn);
  }

  public String toString() {
    return identifiant();
  }

}
```

La classe abstraite Graphe

Type de base : graphe orienté.

```
public abstract class Graphe
 extends GrapheGenerique <Sommet>{

  public abstract int taille();
  public abstract Graphe copie();

  public abstract void ajouterSommet(Sommet s);
  public abstract boolean
   existeArc(Sommet s, Sommet t);
  public abstract void
   ajouterArc(Sommet s, Sommet t, int val);
  public abstract int
   valeurArc(Sommet s, Sommet t);
  public abstract void
   enleverArc(Sommet s, Sommet t);

  public abstract Collection<Sommet> sommets();
  public abstract
   Collection<Arc<Sommet>> voisins(Sommet s);

  public boolean oriente;
```

Première classe concrète : `GrapheMatrice`

Implantation avec des "matrices".

```
package grapheX;

public class GrapheMatrice extends Graphe{
    private Vector<Vector<Arc<Sommet>>> M;
    private Numerotation numerotation; // pratique

    public int taille(){
        return M.size();
    }

    public GrapheMatrice(int n){
        numerotation = new Numerotation(n);
        M = new Vector<Vector<Arc<Sommet>>>(n);
        M.setSize(n);
    }
    ...
}
```

Seconde classe concrète : **`GrapheListe`**

```
package grapheX;

public class GrapheListe extends Graphe{
  private Vector<LinkedList<Arc<Sommet>>> L;
  private Numerotation numerotation;

  public int taille(){
    return L.size();
  }
  ...
```

Un programme de test

```
import java.io.*;
import java.util.*;
import grapheX.*;

class Test1{
  public static void main(String[] args){
    Sommet a = new Sommet("a");
    Sommet b = new Sommet("b");
    Sommet c = new Sommet("c");
    GrapheListe G = new GrapheListe(3);
    G.ajouterArc(a, b); // a -> b
    G.ajouterArc(b, c); // b -> c
    G.ajouterArc(c, a); // c -> a
    // affichage des sommets
    for(Sommet s : G.sommets())
      System.out.println(s);
    // affichage des voisins de a
    for(Arc<Sommet> alpha : G.voisins(a))
      System.out.println(alpha);
  } }
```

Un programme de test

```
import java.io.*;
import java.util.*;
import grapheX.*;

class Test1{
  public static void main(String[] args){
    Sommet a = new Sommet("a");
    Sommet b = new Sommet("b");
    Sommet c = new Sommet("c");
    GrapheListe G = new GrapheListe(3);
    G.ajouterArc(a, b); // a -> b
    G.ajouterArc(b, c); // b -> c
    G.ajouterArc(c, a); // c -> a
    // affichage des sommets
    for(Sommet s : G.sommets())
      System.out.println(s);
    // affichage des voisins de a
    for(Arc<Sommet> alpha : G.voisins(a))
      System.out.println(alpha);
  } }
```

Un programme de test

```
import java.io.*;
import java.util.*;
import grapheX.*;

class Test1{
  public static void main(String[] args){
    Sommet a = new Sommet("a");
    Sommet b = new Sommet("b");
    Sommet c = new Sommet("c");
    GrapheListe G = new GrapheListe(3);
    G.ajouterArc(a, b); // a -> b
    G.ajouterArc(b, c); // b -> c
    G.ajouterArc(c, a); // c -> a
    // affichage des sommets
    for(Sommet s : G.sommets())
      System.out.println(s);
    // affichage des voisins de a
    for(Arc<Sommet> alpha : G.voisins(a))
      System.out.println(alpha);
} }
```

Un programme de test

```
import java.io.*;
import java.util.*;
import grapheX.*;

class Test1{
  public static void main(String[] args){
    Sommet a = new Sommet("a");
    Sommet b = new Sommet("b");
    Sommet c = new Sommet("c");
    GrapheListe G = new GrapheListe(3);
    G.ajouterArc(a, b); // a -> b
    G.ajouterArc(b, c); // b -> c
    G.ajouterArc(c, a); // c -> a
    // affichage des sommets
    for(Sommet s : G.sommets())
      System.out.println(s);
    // affichage des voisins de a
    for(Arc<Sommet> alpha : G.voisins(a))
      System.out.println(alpha);
  } }
```

Un programme de test

```
import java.io.*;
import java.util.*;
import grapheX.*;

class Test1{
  public static void main(String[] args){
    Sommet a = new Sommet("a");
    Sommet b = new Sommet("b");
    Sommet c = new Sommet("c");
    GrapheListe G = new GrapheListe(3);
    G.ajouterArc(a, b); // a -> b
    G.ajouterArc(b, c); // b -> c
    G.ajouterArc(c, a); // c -> a
    // affichage des sommets
    for(Sommet s : G.sommets())
      System.out.println(s);
    // affichage des voisins de a
    for(Arc<Sommet> alpha : G.voisins(a))
      System.out.println(alpha);
  } }
```

Lecture à partir d'un fichier

```
#prim1
4 vs
u v w x
u 2 v 16 x 29
v 3 u 16 x 20 w 25
w 2 v 25 x 10
x 3 u 29 v 20 w 10
```

```java
public
 static GrapheListe deFichier(String nomfic){
  try{
   Scanner scan =
    new Scanner(
     new BufferedReader(new FileReader(nomfic)));
   GrapheListe G = new GrapheListe();
   remplirAvecScanner(G, scan);
   return G;
  }
  catch(Exception e) { }
  return null;
}
```

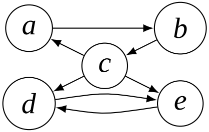
```
public static void
 remplirAvecScanner(GrapheListe G, Scanner scan){
  System.out.println(scan.next());
  int n = scan.nextInt();
  remplir(G, n);
  String str = scan.next();
  boolean estValue = option(str, 'v');
  boolean estSym = option(str, 's');
  boolean avecCouples = option(str, 'c');

  if(estSym)
    G.oriente = false;
  System.out.println("n = "+n);
  for(int i = 0; i < n; i++){
    Sommet s = new Sommet(scan.next());
    G.ajouterSommet(s);
  }
```

```java
if(avecCouples){
   ...
}
else{
  // format "s ns t0 t1 ... t{ns-1}"
  // ou     "s ns t0 v0 t1 v1 ... t{ns-1} v{ns-1
  System.out.println("Avec listes, estvalue="+es
  for(int r = 0; r < n; r++){
    Sommet s = new Sommet(scan.next());
    int si = G.numerotation.numero(s);
    int nj = (int)scan.nextInt();
    for(int k = 0; k < nj; k++){
      Sommet t = new Sommet(scan.next());
      int ti = G.numerotation.numero(t);
      if(estValue)
        G.ajouterArc(si, ti,
              (int)scan.nextInt());
      else
        G.ajouterArc(si, ti, 1);
    }
  }
}
```

IV. Accessibilité

Un chemin $(s_0, s_1, \ldots, s_p)$ dans $\mathcal{G}$ est une suite finie non vide de sommets telle que $(s_k, s_{k+1}) \in \mathcal{A}$. La longueur du chemin est p (== nombre d'arcs empruntés).

Ex. (c, a, b, c, e) est un chemin dans :



Un chemin est

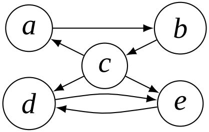
- simple si les arcs (s_{i-1}, s_i) pour $i = 1, \ldots, p$ sont deux à deux $\neq$.
- élémentaire si les sommets sont deux à deux distincts.
- un circuit si $p \geqslant 1$ et $s_p = s_0$; il est élémentaire si $(s_0, \ldots, s_{p-1})$ est élémentaire.

Rem. Graphe non orienté : chemin $\rightarrow$ chaîne (arêtes distinctes 2 à 2) ; circuit $\rightarrow$ cycle.

IV. Accessibilité

Un chemin $(s_0, s_1, \ldots, s_p)$ dans $\mathcal{G}$ est une suite finie non vide de sommets telle que $(s_k, s_{k+1}) \in \mathcal{A}$. La longueur du chemin est p (== nombre d'arcs empruntés).

Ex. (c, a, b, c, e) est un chemin dans :



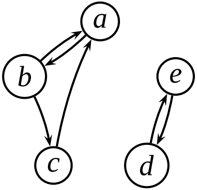
Un chemin est

- simple si les arcs (s_{i-1}, s_i) pour $i = 1, \ldots, p$ sont deux à deux $\neq$.
- élémentaire si les sommets sont deux à deux distincts.
- un circuit si $p \geqslant 1$ et $s_p = s_0$; il est élémentaire si $(s_0, \ldots, s_{p-1})$ est élémentaire.

Rem. Graphe non orienté : chemin $\rightarrow$ chaîne (arêtes distinctes 2 à 2) ; circuit $\rightarrow$ cycle.

A) Propriétés fondamentales

Lemme. L'ensemble des chemins d'un graphe est infini ssi le graphe possède des circuits.



Déf. c' est un chemin extrait de c si c' est chemin, c et c' ont même origine et extrêmité et la suite des arcs de c' est une sous-suite de la suite des arcs de c.

Ex. (a, b, c) est un chemin extrait de (a, b, c, a, b, c).

Lemme de König

Lemme. (König) De tout chemin, on peut extraire un chemin élémentaire.

Dém. Récurrence sur la longueur p d'un chemin :

- Si $p = 0$, le chemin est élémentaire.
- Soit $c = (s_0, s_1, \ldots, s_p)$ un chemin de longueur $p > 0$.

S'il n'est pas élémentaire, il existe deux sommets égaux $s_i = s_j$ avec $0 \leqslant i < j \leqslant p$.

$c' = (s_0, \ldots, s_i, s_{j+1}, \ldots, s_p)$ est strictement plus petit que c et on peut en extraire un chemin élémentaire par hypothèse de récurrence, qui sera lui-même extrait de c. □

Lemme de König

Lemme. (König) De tout chemin, on peut extraire un chemin élémentaire.

Dém. Récurrence sur la longueur p d'un chemin :

- Si $p = 0$, le chemin est élémentaire.
- Soit $c = (s_0, s_1, \ldots, s_p)$ un chemin de longueur $p > 0$.

S'il n'est pas élémentaire, il existe deux sommets égaux $s_i = s_j$ avec $0 \leqslant i < j \leqslant p$.

$c' = (s_0, \ldots, s_i, s_{j+1}, \ldots, s_p)$ est strictement plus petit que c et on peut en extraire un chemin élémentaire par hypothèse de récurrence, qui sera lui-même extrait de c. □

Lemme de König

Lemme. (König) De tout chemin, on peut extraire un chemin élémentaire.

Dém. Récurrence sur la longueur p d'un chemin :

- Si $p = 0$, le chemin est élémentaire.
- Soit $c = (s_0, s_1, \ldots, s_p)$ un chemin de longueur $p > 0$.

S'il n'est pas élémentaire, il existe deux sommets égaux $s_i = s_j$ avec $0 \leqslant i < j \leqslant p$.

$c' = (s_0, \ldots, s_i, s_{j+1}, \ldots, s_p)$ est strictement plus petit que c et on peut en extraire un chemin élémentaire par hypothèse de récurrence, qui sera lui-même extrait de c. □

Lemme de König

Lemme. (König) De tout chemin, on peut extraire un chemin élémentaire.

Dém. Récurrence sur la longueur p d'un chemin :

- Si $p = 0$, le chemin est élémentaire.
- Soit $c = (s_0, s_1, \ldots, s_p)$ un chemin de longueur $p > 0$.

S'il n'est pas élémentaire, il existe deux sommets égaux $s_i = s_j$ avec $0 \leqslant i < j \leqslant p$.

$c' = (s_0, \ldots, s_i, s_{j+1}, \ldots, s_p)$ est strictement plus petit que c et on peut en extraire un chemin élémentaire par hypothèse de récurrence, qui sera lui-même extrait de c. $\square$

Premières propriétés de connexité

Déf. Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Il est connexe ssi deux sommets sont toujours joignables par un chemin.

Lemme 1. Un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes.

Lemme 2. Un graphe à n sommets ayant au moins n arêtes possède un cycle.

Dém. du Lemme 1 (récurrence sur n)

- vraie pour $n = 1$.

$\square$

Premières propriétés de connexité

Déf. Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Il est connexe ssi deux sommets sont toujours joignables par un chemin.

Lemme 1. Un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes.

Lemme 2. Un graphe à n sommets ayant au moins n arêtes possède un cycle.

Dém. du Lemme 1 (récurrence sur n)

- vraie pour $n = 1$.

Premières propriétés de connexité

Déf. Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Il est connexe ssi deux sommets sont toujours joignables par un chemin.

Lemme 1. Un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes.

Lemme 2. Un graphe à n sommets ayant au moins n arêtes possède un cycle.

Dém. du Lemme 1 (récurrence sur n)

- vraie pour $n = 1$.

□

Premières propriétés de connexité

Déf. Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Il est connexe ssi deux sommets sont toujours joignables par un chemin.

Lemme 1. Un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes.

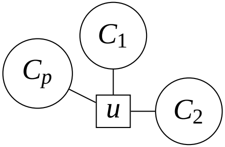
Lemme 2. Un graphe à n sommets ayant au moins n arêtes possède un cycle.

Dém. du Lemme 1 (récurrence sur n)

• vraie pour $n=1$.

$\square$

• Supposons $n \geqslant 2$.
Soit $u \in \mathcal{S}$ et considérons le graphe $\mathcal{G}_u$ induit de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{S} - \{u\}$, C_1, C_2, ..., C_p ses composantes connexes :

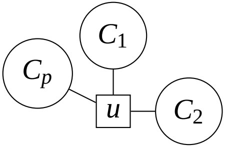


Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, il existe au moins une arête liant u à un sommet de C_k (sinon $\mathcal{G}$ ne serait pas connexe).

Soit $\mathcal{G}^{(k)}$ le sous-graphe induit par C_k. Par hypothèse de récurrence : $m_k \geqslant n_k - 1$.

$$m \geqslant p + \left(\sum_{k=1}^{p} m_k \right) \geqslant \sum_{k=1}^{p} n_k = n - 1. \square$$

• Supposons $n \geqslant 2$.
Soit $u \in \mathcal{S}$ et considérons le graphe $\mathcal{G}_u$ induit de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{S} - \{u\}$, C_1, C_2, ..., C_p ses composantes connexes :

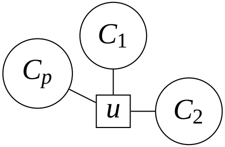


Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, il existe au moins une arête liant u à un sommet de C_k (sinon $\mathcal{G}$ ne serait pas connexe).

Soit $\mathcal{G}^{(k)}$ le sous-graphe induit par C_k. Par hypothèse de récurrence : $m_k \geqslant n_k - 1$.

$$m \geqslant p + \left(\sum_{k=1}^{p} m_k \right) \geqslant \sum_{k=1}^{p} n_k = n - 1. \square$$

• Supposons $n \geqslant 2$.
Soit $u \in \mathcal{S}$ et considérons le graphe $\mathcal{G}_u$ induit de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{S} - \{u\}$, C_1, C_2, ..., C_p ses composantes connexes :



Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, il existe au moins une arête liant u à un sommet de C_k (sinon $\mathcal{G}$ ne serait pas connexe).

Soit $\mathcal{G}^{(k)}$ le sous-graphe induit par C_k. Par hypothèse de récurrence : $m_k \geqslant n_k - 1$.

$$m \geqslant p + \left(\sum_{k=1}^{p} m_k \right) \geqslant \sum_{k=1}^{p} n_k = n - 1. \square$$

Caractérisation des arbres

Prop. soit $\mathcal{G}$ un graphe simple à n sommets. Les propriétés suivantes sont équivalentes et caractérisent le fait que $\mathcal{G}$ est un arbre.

(i) $\mathcal{G}$ est un graphe connexe sans cycle ;

(ii) $\mathcal{G}$ est un graphe connexe ayant $n-1$ arêtes ;

(iii) $\mathcal{G}$ est un graphe sans cycle possédant $n-1$ arêtes ;

(iv) $\mathcal{G}$ est un graphe dans lequel deux sommets quelconques sont liés par une seule chaîne ;

(v) $\mathcal{G}$ est un graphe connexe dont la connexité disparaît dès qu'on enlève une arête quelconque ;

(vi) $\mathcal{G}$ est un graphe sans cycle tel que l'ajout d'une arête quelconque crée un cycle et un seul.

B) Fermeture transitive

Pb. existe-il un chemin (de longueur $\geqslant 0$) entre deux sommets donnés de $\mathcal{G}$?

Déf. On appelle fermeture transitive du graphe $\mathcal{G}$ le graphe $\mathcal{G}^* = (\mathcal{S}, \mathcal{A}^*)$ avec $(s, t) \in \mathcal{A}^*$ ssi il existe un chemin entre s et t dans $\mathcal{G}$.

Deux solutions : matrice d'adjacence ; parcours.

Pour simplifier : $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Premier algorithme de calcul

Première idée : on construit une suite de graphes $(\mathcal{G}^{(r)})_{1 \leqslant r \leqslant n}$,

- $\mathcal{G}^{(1)}$ est le graphe initial ;
- pour $r \geqslant 2$, $\mathcal{G}^{(r)} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}^{(r)}, \mathcal{M}^{(r)})$ est défini par $(i,j) \in \mathcal{A}^{(r)}$ ssi il existe un chemin de i à j de longueur exactement r.

Un chemin de longueur $r > 1$ entre i et j s'écrit $(i, k, \ldots, j)$ avec k voisin de i et $(k, \ldots, j)$ un chemin de longueur $r - 1$.
En booléens :

$$\mathcal{M}_{i,j}^{(r)} = \bigvee_{k=0}^{n-1} \mathcal{M}_{i,k}^{(1)} \wedge \mathcal{M}_{k,j}^{(r-1)}.$$

$\leftrightarrow$ produit des matrices $\mathcal{M}^{(1)}$ et $\mathcal{M}^{(r-1)}$ où on a remplacé l'addition par le OU logique, et la multiplication par le ET logique.

	0	1
0	0	1
1	1	1

OU logique $\vee$

	0	1
0	0	0
1	0	1

ET logique $\wedge$

Premier algorithme de calcul

Première idée : on construit une suite de graphes $(\mathcal{G}^{(r)})_{1\leqslant r\leqslant n}$,

- $\mathcal{G}^{(1)}$ est le graphe initial ;
- pour $r \geqslant 2$, $\mathcal{G}^{(r)} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}^{(r)}, \mathcal{M}^{(r)})$ est défini par $(i,j) \in \mathcal{A}^{(r)}$ ssi il existe un chemin de i à j de longueur exactement r.

Un chemin de longueur $r > 1$ entre i et j s'écrit $(i, k, \ldots, j)$ avec k voisin de i et $(k, \ldots, j)$ un chemin de longueur $r - 1$.

En booléens :

$$\mathcal{M}_{i,j}^{(r)} = \bigvee_{k=0}^{n-1} \mathcal{M}_{i,k}^{(1)} \wedge \mathcal{M}_{k,j}^{(r-1)}.$$

$\leftrightarrow$ produit des matrices $\mathcal{M}^{(1)}$ et $\mathcal{M}^{(r-1)}$ où on a remplacé l'addition par le OU logique, et la multiplication par le ET logique.

	0	1
0	0	1
1	1	1

OU logique $\vee$

	0	1
0	0	0
1	0	1

ET logique $\wedge$

Premier algorithme de calcul

Première idée : on construit une suite de graphes $(\mathcal{G}^{(r)})_{1 \leqslant r \leqslant n}$,

- $\mathcal{G}^{(1)}$ est le graphe initial ;
- pour $r \geqslant 2$, $\mathcal{G}^{(r)} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}^{(r)}, \mathcal{M}^{(r)})$ est défini par $(i,j) \in \mathcal{A}^{(r)}$ ssi il existe un chemin de i à j de longueur exactement r.

Un chemin de longueur $r > 1$ entre i et j s'écrit $(i, k, \ldots, j)$ avec k voisin de i et $(k, \ldots, j)$ un chemin de longueur $r - 1$.

En booléens :

$$\mathcal{M}_{i,j}^{(r)} = \bigvee_{k=0}^{n-1} \mathcal{M}_{i,k}^{(1)} \wedge \mathcal{M}_{k,j}^{(r-1)}.$$

$\leftrightarrow$ produit des matrices $\mathcal{M}^{(1)}$ et $\mathcal{M}^{(r-1)}$ où on a remplacé l'addition par le OU logique, et la multiplication par le ET logique.

	0	1
0	0	1
1	1	1

OU logique $\vee$

	0	1
0	0	0
1	0	1

ET logique $\wedge$

Premier algorithme de calcul

Première idée : on construit une suite de graphes $(\mathcal{G}^{(r)})_{1\leqslant r\leqslant n}$,

- $\mathcal{G}^{(1)}$ est le graphe initial ;
- pour $r \geqslant 2$, $\mathcal{G}^{(r)} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}^{(r)}, \mathcal{M}^{(r)})$ est défini par $(i,j) \in \mathcal{A}^{(r)}$ ssi il existe un chemin de i à j de longueur exactement r.

Un chemin de longueur $r > 1$ entre i et j s'écrit $(i, k, \ldots, j)$ avec k voisin de i et $(k, \ldots, j)$ un chemin de longueur $r - 1$.

En booléens :

$$\mathcal{M}_{i,j}^{(r)} = \bigvee_{k=0}^{n-1} \mathcal{M}_{i,k}^{(1)} \wedge \mathcal{M}_{k,j}^{(r-1)}.$$

$\leftrightarrow$ produit des matrices $\mathcal{M}^{(1)}$ et $\mathcal{M}^{(r-1)}$ où on a remplacé l'addition par le OU logique, et la multiplication par le ET logique.

	0	1
0	0	1
1	1	1

OU logique $\vee$

	0	1
0	0	0
1	0	1

ET logique $\wedge$

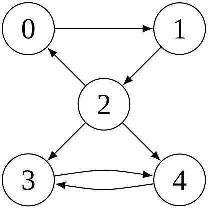
Plus généralement, si $(i,j) \in \mathcal{G}^*$, c'est qu'il existe un chemin de longueur $< n$ entre les deux (par le lemme de König).

D'où :

$$\mathcal{M}^* = I_n + \mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)} + \cdots + \mathcal{M}^{(n-1)}.$$

La matrice identité d'ordre n, notée I_n, a été ajoutée pour tenir compte de l'accessibilité de tout sommet avec lui-même.

Exemple



$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ 1 & & & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 1 \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}^{(4)} = \begin{pmatrix} & 1 & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thm. Le produit de deux matrices se fait en temps $O(n^{\omega})$ (où ω est un exposant compris entre 2 et 3).

Coro. $O(n^{1+\omega})$ opérations, soit généralement $O(n^4)$ en pratique.

Prop. En booléens :

$$\mathcal{M}^* = (I + \mathcal{M})^{n-1}$$

$\Rightarrow O((\log n)n^{\omega})$ (exponentiation binaire).

Prop. Le nombre de chemins de longueur ℓ entre i et j est $\mathcal{M}^{(\ell)}_{i,j}$, $\mathcal{M}$ étant considérée comme une matrice entière.

L'algorithme de Roy et Warshall

Idée : construire de proche en proche des chemins (élémentaires) de plus en plus longs.

On construit $\mathcal{G}^{(r)} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}^{(r)})$ pour $r \geqslant -1$:

- $(i,j) \in \mathcal{A}^{(-1)}$ ssi $\exists$ chemin $i \rightarrow j$ ne passant par aucun sommet intermédiaire.
- $(i,j) \in \mathcal{A}^{(0)}$ ssi $\exists$ chemin $i \rightarrow j$ passant au plus par le sommet 0.

Ex.

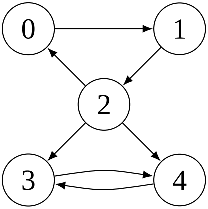
$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme de Roy et Warshall

Idée : construire de proche en proche des chemins (élémentaires) de plus en plus longs.
On construit $\mathcal{G}^{(r)} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}^{(r)})$ pour $r \geqslant -1$:

- $(i,j) \in \mathcal{A}^{(-1)}$ ssi $\exists$ chemin $i \to j$ ne passant par aucun sommet intermédiaire.
- $(i,j) \in \mathcal{A}^{(0)}$ ssi $\exists$ chemin $i \to j$ passant au plus par le sommet 0.

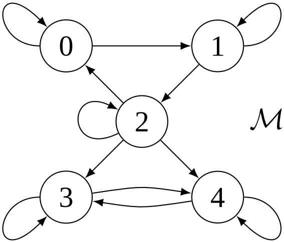
Ex.



$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

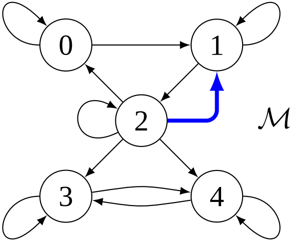
Calcul de $\mathcal{G}^{(-1)}$

On doit rajouter les boucles.



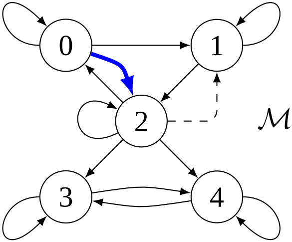
$$\mathcal{M}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $\mathcal{G}^{(0)}$ **:** on rajoute les chemins $(i, 0, j)$, ici $\{(2, 0, 1)\}$.



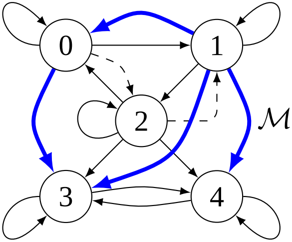
$$\mathcal{M}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $\mathcal{G}^{(1)}$ **:** tous les chemins passant dans $\{0, 1\}$, i.e., $\{(0, 1, 2), (2, 0, 1, 2)\}$.



$$\mathcal{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $\mathcal{G}^{(2)}$: on rajoute les chemins $\{(0,1,2,0),(0,1,2,3),(0,1,2,4),(1,2,0),(1,2,0,1),(1,2,3),(1,2,4)\}$



$$\mathcal{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et c'est tout.

$\square$

Algorithme

$(i,j) \in \mathcal{A}^{(r)}$ ssi $\exists$ chemin $i \to j$ ne passant par aucun sommet intermédiaire d'indice $> r$.

$\iff (i,j) \in \mathcal{A}^{(r-1)}$ ou ($(i,r) \in \mathcal{A}^{(r-1)}$ et $(r,j) \in \mathcal{A}^{(r-1)}$). En booléens :

$$\mathcal{M}_{i,j}^{(r)} = \mathcal{M}_{i,j}^{(r-1)} + \mathcal{M}_{i,r}^{(r-1)}\mathcal{M}_{r,j}^{(r-1)}.$$

```
RoyWarshall(M)
// M est la matrice d'adjacence booléenne n x n
// d'un graphe G
1. N <- copie(M); P <- matrice_identite(n, n);
2. pour r <- 0 à n-1 faire
    pour i <- 0 à n-1 faire
      pour j <-0 à n-1 faire
       P[i][j] <- N[i][j] OU (N[i][r] ET N[r][j]);
    N := P; // recopie de P dans N
3. retourner N; // matrice d'adjacence de G *
```

Prop. La complexité de cet algorithme est en $O(n^3)$.

Algorithme

$(i,j) \in \mathcal{A}^{(r)}$ ssi $\exists$ chemin $i \to j$ ne passant par aucun sommet intermédiaire d'indice $> r$.

$\Longleftrightarrow (i,j) \in \mathcal{A}^{(r-1)}$ ou ($(i,r) \in \mathcal{A}^{(r-1)}$ et $(r,j) \in \mathcal{A}^{(r-1)}$). En booléens :

$$\mathcal{M}_{i,j}^{(r)} = \mathcal{M}_{i,j}^{(r-1)} + \mathcal{M}_{i,r}^{(r-1)} \mathcal{M}_{r,j}^{(r-1)}.$$

```
RoyWarshall(M)
// M est la matrice d'adjacence booléenne n x n
// d'un graphe G
1. N <- copie(M); P <- matrice_identite(n, n);
2. pour r <- 0 à n-1 faire
     pour i <- 0 à n-1 faire
       pour j <-0 à n-1 faire
        P[i][j] <- N[i][j] OU (N[i][r] ET N[r][j]);
     N := P; // recopie de P dans N
3. retourner N; // matrice d'adjacence de G *
```

Prop. La complexité de cet algorithme est en $O(n^3)$.

□

Amélioration

Prop. la matrice **P** est inutile et on peut effectuer les calculs *en place*. (cf. poly pour la preuve)

```
RoyWarshall(M)
// M est la matrice d'adjacence booléenne n x n
// d'un graphe G
1. N <- copie(M);
   pour i <- 0 à n-1 faire N[i][i] <- true;
2. pour r <- 0 à n-1 faire
    pour i <- 0 à n-1 faire
     pour j <-0 à n-1 faire
      N[i][j] <- N[i][j] OU (N[i][r] ET N[r][j]);
3. retourner N; // matrice d'adjacence de G *
```

Le code en Java

```java
static Graphe RoyWarshall(Graphe G){
  Graphe F = G.copie();

  for(Sommet s : G.sommets())
    F.ajouterArc(s, s);
  for(Sommet r : G.sommets()){
    for(Sommet s : G.sommets())
      for(Sommet t : G.sommets())
        if(!F.existeArc(s, t)
           && (F.existeArc(s, r)
               && F.existeArc(r, t)))
          F.ajouterArc(s, t);
  }
  return F;
}
```

Résumé du cours

- Introduction aux graphes.
- Classe abstraite.
- Accessibilité (Roy-Warshall, Floyd).

Prochains rendez-vous : TD cet après-midi ; amphi 06 mercredi prochain 10/03.

Un occasion d'en savoir plus : François BACCELLI (INRIA, ENS, Académie des Sciences) : Routage Espace–Temps (avec des graphes aléatoires).
Jeudi 4 Mars, 17h30, CINE, Salle de Réunion du LIX (Aîle 0)